

ECRICOME PREPA 2024

Mathématiques appliqués

506599

BOULMAL

ELIAS

23/03/2005

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

506599



Né(e) le

23 / 03 / 2005

Signature

Nom

BOULMAL

Prénom(s)

ELIAS

20 / 20



Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

01 /

08

Numéro de table

016

Exercice 1

Partie I

1(a) Soit $k \in \mathbb{N}$, $p \in]0, 1[$ on a $X \sim G_p(p)$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$R_X(k) = P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$$

$$P(X > k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(X=i) = \sum_{i=k}^{+\infty} (1-p)^{i-1} p = p \sum_{i=k}^{+\infty} (1-p)^{i-1}$$

$$\text{On pose } j = i - k \text{ et on a : } R_X(k) = p \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^{j+k-1} = p(1-p)^{k-1} \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j$$

On reconnaît une série géométrique convergente de paramètre $|1-p| < 1$ et on a alors :

$$R_X(k) = p(1-p)^{k-1} \frac{1}{1-(1-p)} = p(1-p)^{k-1} \frac{1}{p} = (1-p)^{k-1}$$

Il y a probablement une erreur de calcul car : $P(X > k) = (1-p)^k$

(a) d'où $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P_X(k) = (1-p)^k$ on pourrait aussi raisonner en créant un modèle. $P^*[X > k]$ signifie qu'on a au moins k -éché(s).

$$(b) \text{ Dès lors } \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \frac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}} = (1-p) \frac{(1-p)^{k-1}}{(1-p)^{k-1}} = 1-p$$

En résumé :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = 1-p$$

soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$2) (a)^Y [X=k] = [X > k-1] \setminus [X > k]$$

~~car si X est strictement au~~

$$\text{Or } X > k-1 \subset X > k$$

$$\text{Donc } P(X=k) = P(X > k-1 \setminus X > k) = P(X > k-1) - P(X > k)$$

$$\text{ie } \underline{P(X=k) = R_X(k-1) - R_X(k)}$$

(b) ($\Rightarrow$) Si X et Y suivent la même loi, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$P(X=k) = P(Y=k)$$

d'où $R_X(k) = R_Y(k)$.

($\Leftarrow$) Si $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad R_X(k) = R_Y(k)$: ~~alors~~ d'après (a) on a :

$$\begin{cases} P(X=k) = R_X(k-1) - R_X(k) \\ P(Y=k) = R_Y(k-1) - R_Y(k) \end{cases}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\vee R_X(k) = R_Y(k) \Rightarrow R_X(k-1) = R_Y(k-1)$$

$$\text{et donc } P(X=k) = R_Y(k-1) - R_Y(k) = P(Y=k)$$

En résumé on a bien montré :

X et Y suivent la même loi si, et seulement si, pour tout entier naturel (non nul) k , $R_X(k) = R_Y(k)$

Partie II

$$3(a) \text{ Soit } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$$

$$\text{ie } \frac{a(n+1) - b}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!} \quad \text{d'où : } an + a - b = n$$

$$\text{donc on a le système : } \begin{cases} an = n \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = b = 1 \end{cases}$$

En posant $a = b = 1$ on a :

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Ainsi, on a : $a = b = 1$

b) Ainsi on a: $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right)$ (cf ce qui précède)

On reconnaît alors un télescopage en posant $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n = \frac{1}{n!}$

et on a alors ~~$\sum_{n \geq 1}$~~ en partant par les sommes partielles :

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \frac{1}{(1)!} - \frac{1}{(N+1)!} = 1 - \frac{1}{(N+1)!} \text{ par télescopage}$$

En passant à la limite on a alors que :

$$\frac{1}{(N+1)!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \text{ existe bien et}$$

vaut :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1} \quad \text{Ainsi} \quad \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1}$$

4) (a)(i) X est bien une variable aléatoire discrète car

$$\mathbb{N}^* \text{ est dénombrable et } \sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1$$

(ii) $E(X+1)$ existe $\Leftrightarrow \sum_{k \in X(\Omega)} (k+1) P(X=k)$ converge absolument par théorème de transfert

$$\text{Or } \sum_{k \in X(\Omega)} (k+1) P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}$$

en posant $i = k-1$. On reconnaît alors une série exponentielle de paramètre 1 et on a donc :

Numéro d'inscription

506599



Né(e) le

23 / 03 / 2005

Signature

Nom

BOULMAL

Prénom (s)

ELIAS

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

02 / 08

Numéro de table

016

$$E(X+1) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(1)^m}{m!} = e^1 = e$$

Ainsi on a montré que $E(X+1)$ existe et vaut $e \approx 2,7$

$$(iii) \quad E(X+1) = E(X) + E(1) = E(X) + 1 \quad \text{par linéarité de l'espérance}$$

$$\text{et ainsi on a : } e = E(X) + 1$$

$$\text{ie } \boxed{E(X) = e - 1}$$

$$(b) : E((X-1)(X+1)) \text{ existe } \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{+\infty} (m-1)(m+1) P(X=m) \text{ converge absolument par théorème de transfert.}$$

$$\text{Or } P(X=n) (m-1)(m+1) = \frac{1}{(n+1)!} (m-1)(m+1) = \frac{1}{(m-2)!} = \frac{(1)^{m-2}}{(m-2)!}$$

$$\text{de plus } \sum_{n=1}^{+\infty} (m-1) = \sum_{m=2}^{+\infty} (m-1) \quad \text{car le premier terme est nul.}$$

$$\text{d'où } \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n+1) P(X=n) = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(1)^{m-2}}{(m-2)!} \quad \text{on reconnaît une série exponentielle de paramètre 1 et}$$

donc $E((X-1)(X+1))$ ~~converge~~ existe bien par théorème de transfert et :

$$E((X-1)(X+1)) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1)^{n-2}}{(n-2)!} = e^1 = e$$

$$\text{Or } (X-1)(X+1) = X^2 - 1$$

$$\text{donc } E(X^2 - 1) = e$$

$$\text{ie } \underline{E(X^2) = e + 1} \quad \text{par linéarité}$$

et donc X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance d'après le cours.

(ii) D'après la formule de Koening-Huygens on a :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

d'où, d'après ce qui précède :

$$\underline{V(X) = e + 1 - (e)^2 = 1 + e(1 - e)}$$

Partie III

5) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in]0, 1[$

D'après l'énoncé, la ~~de~~ probabilité d'une panne ^{à l'année-k} vaut α_k .

X est la variable aléatoire égale à la durée de vie en années de l'appareil.

Puisqu'on suppose que l'appareil fonctionne à l'année 0

on a: $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

~~Ainsi qu'évoqué en partie II $R_X(k) = P(X > k)$ représente~~

~~le fait d'avoir k échecs, ici~~

$R_X(k) = P(X > k)$ signifie ici que la durée de vie (en années) de ~~l'appareil~~ est strictement supérieure à k

C'est à-dire que chaque année jusqu'à l'année k ^(inclusive), on sait que l'appareil fonctionne.

donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $R_X(k) = P(X > k) = \underset{(X > k-1)}{P(X > k-1)} P(X > k)$

d'où $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $R_X(k) = (1 - \alpha_k) P(X > k-1) = (1 - \alpha_k) R_X(k-1)$

En résumé on a bien montré:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, R_X(k) = (1 - \alpha_k) R_X(k-1)$$

6) d'après l'égalité qui précède on a: $\frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = (1 - \alpha_k)$ pour $R_X(k-1) \neq 0$

d'où par produit sur $\llbracket 1, m \rrbracket$ ($m \in \mathbb{N}^*$)

$$\prod_{k=1}^m \frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \prod_{k=1}^m (1 - \alpha_k)$$

or par télescopage $\prod_{k=1}^m \frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \frac{R_X(m)}{R_X(0)}$

et $R_X(0) = 1$ car on est quasi certain que l'appareil fonctionne au-moins 1 an (d'après l'énoncé) -

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_X(n) = \prod_{k=1}^n (1 - \alpha_k)$ puisque les variables sont muettes on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$

7) D'après Partie I, ~~ex~~ 2) (a) on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$P(X=k) = R_X(k-1) - R_X(k).$$

$$\begin{aligned} \text{d'où ici : } P(X=k) &= \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) - \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) - \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) \times (1 - \alpha_k) \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) \right) (1 - (1 - \alpha_k))$$

$$\text{d'où } \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i)$$

pour $k=1$ le produit est nul et $P(X=1) = \alpha_1$.

Numéro d'inscription

506599



Né(e) le

23 / 03 / 2005

Signature

Nom

BOULMAL

Prénom(s)

ELIAS

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03

/ 08

Numéro de table

016

8) ^(a) On a ici $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k = p$ ($p \in]0, 1[$ donc)

ainsi qd on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X=k) = \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) = p \prod_{i=1}^{k-1} (1-p) = (1-p)^{k-1} p$$

donc si la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est constante

$$X \sim G(p)$$

$$(b) \forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha_k = \frac{k}{k+1}$$

$$P(X=k) = \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{i+1}\right) = \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i+1} = \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{(k)!}$$

d'où $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = \frac{k}{(k+1)!}$ | donc X est bien une variable

aléatoire car elle a la même loi que la variable de la Partie II 4)

Exercice 2: Soit $a \in \mathbb{R}$

1) (a) D'après le développement limite d'ordre 1 de la fonction inverse de l'exponentielle, on a:

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad e^{-u} = 1 - u + o(u) \quad \text{as } u \rightarrow 0$$

$$1(a) \quad e^{-2at-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (i.e.) \quad \frac{e^{-2at-t^2}}{\frac{1}{t^2}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Or } \frac{e^{-2at-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = t^2 e^{-2at-t^2} = t^2 e^{-t^2} \times e^{-2at}$$

Pour $t^2 e^{-t^2}$ en posant $X = t^2$ on a: $X e^{-X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparées

$$\text{et } e^{-2at} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Donc on a bien } \frac{e^{-2at-t^2}}{\frac{1}{t^2}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{d'où } \underline{e^{-2at-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)}$$

(b) $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est $C^0([0, +\infty[)$ donc on a une

impropriété en $+\infty$: Or (cf ce qui précède), $e^{-2at-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ as $t \rightarrow +\infty$

et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge par critère de Riemann ($2 > 1$)

donc par théorème de négligeabilité

$\forall a \in \mathbb{R}, I_a$ est convergente

2)

$$2) \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, I_a(x) = \int_x^{+\infty} e^{2a(n-t)-t^2} dt$$

$$\text{ie } I_a(x) = e^{2ax} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$$

$$\text{Or } \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt - \int_0^x e^{-2at-t^2} dt \text{ par Charles}$$

$$\text{Donc } b(a, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, I_a(x) = e^{2ax} \left(I_a - \int_0^x e^{-2at-t^2} dt \right)$$

$x \mapsto e^{2ax}$ est définie sur $\mathbb{R}$, I_a aussi et

$t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est $C^0([0, x])$ donc on a bien

I_a est définie sur $\mathbb{R}$ par stabilité de l'espace vectoriel.

$$3) (a) \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt - \int_0^x e^{-2at-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt - \int_0^x e^{-2at-t^2} dt$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_n^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt - \int_0^n e^{-2at-t^2} dt \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt - \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt = 0 \end{aligned}$$

En résumé on a bien : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_n^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt \right) = 0$

(b) Soit $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{R}$, $t \geq n$ car les bornes commencent à n .

$$\text{ie } t \geq n \text{ car } I_a(n) = \int_n^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$$

d'où ~~par~~ bije $(t-n) \geq 0$

ie $(n-t) \leq 0$ ~~par~~ ce multipliant par -1 .

$\forall n \in \mathbb{R}$ ie $e^{(n-t)} \leq e^0 = 1$ par bijection croissante de $x \mapsto e^x$.
 $\forall e^{n-t} \leq 1$.

$$\text{d'où } e^{2a(n-t)} \leq e^{2a \times 0} = e^0 = 1$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{R} \quad e^{2a(n-t)} \leq 1$$

$$e^{2a(n-t)} \times e^{-t^2} = e^{2a(n-t)-t^2} \quad \text{d'après les propriétés de l'exp.}$$

$$\text{donc on a : } e^{2a(n-t)-t^2} \leq e^{-t^2}$$

en fin par croissance de l'intégrale (car les bornes sont dans l'ordre croissant) on a :

$$\int_n^{+\infty} e^{-2at(n-t)-t^2} dt \leq \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$\text{ie } \forall n \in \mathbb{R}, \quad \underline{I_a(n) \leq \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt}$$

Numéro d'inscription

506599



Né(e) le

23/03/2005

Signature

Nom

BOULNAL

Prénom (s)

ELIAS

20 / 20



Épreuve:

Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

04

/ 08

Numéro de table

016

$a \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $e^{-at} \leq e^0 = 1$ par suite décroissance de $a \mapsto e^{-a}$.

donc $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $e^{-2at-t^2} \leq e^0 \times e^{-t^2} = e^{-t^2}$

d'où: $\int_n^{+\infty} e^{-2at} dt$

c) $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^u \geq 0$ donc par croissance de l'intégrales (car les bornes sont dans l'ordre croissant) on a:

$\forall n \in \mathbb{R}$, $0 \leq I_a(n)$ et cf 3b) $I_a(n) \leq \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt$

d'où $\forall n \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq I_a(n) \leq \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt$

et on a $\forall n \in \mathbb{R}$, $I_a(n) = e^{2an} \int_n^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$

la relation $\forall n \in \mathbb{R}$, $I_a(n) \leq$

Ainsi: soit $a \geq 0$, alors: $0 \leq I_a(n) \leq \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt$ (cf 3b)

et $\int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt = \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^n e^{-t^2} dt \right)$ et $\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^n e^{-t^2} dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

et donc par théorème d'enlèvement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_a(n)) = 0.$$

** Soit $a < 0$, alors $I_a(n) = e^{2an} \int_n^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$

Or $\int_n^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt \xrightarrow{+\infty} 0$ (cf 3a)

et $e^{2an} \xrightarrow{+\infty} 0$ car $a < 0$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_a(n)) = 0$ par produit.

En résumé, $\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} (I_a(n)) = 0$

Partie II:

1) $y' = 2ay \Leftrightarrow y' - 2ay = 0$ on reconnaît alors une équation homogène et l'ensemble E_0 des solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{2at}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

5)(a)(i) On reconnaît que F_a représente la primitive fondamentale

de $x \mapsto e^{-2ax-x^2}$ en 0.

En tant que primitive F_a est dérivable et même $C^1(\mathbb{R})$
car $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est $C^0(\mathbb{R})$.

Ainsi F_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, F'_a(x)$

(ii) On note G $g(x) \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-2ax-x^2}$ et $G(x)$ une primitive de g .

ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, F_a(x) = G(x) - G(0)$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}, F'_a(x) = G'(x) - 0$

$$F'_a(x) = g(x)$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, F'_a(x) = e^{-2ax-x^2}$

(b) On l'a déjà montré en : (exercice 2, Partie I, 2).

remontrons-le : Soit $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt = \int_x^{+\infty} e^{2ax-2at-t^2} dt$

$e^{2ax-2at-t^2} = e^{2ax} \times e^{-2at-t^2}$. $\int_x^{+\infty} e^{2ax-2at-t^2} dt = e^{2ax} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$
par linéarité de l'intégrale et car $\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{d'où et } \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt - \int_0^x e^{-2at-t^2} dt \quad (\text{Chasles}) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt - \int_0^x e^{-2at-t^2} dt \end{aligned}$$

d'où $\forall (a, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, I_a(n) = e^{2ax} \left(\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt - \int_0^x e^{-2at-t^2} dt \right)$

ie $\forall (a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, I_a(n) = e^{2ax} (J_a - F_a(n))$

(c) $(x) \mapsto e^{2ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions qui le sont : $n \mapsto 2an$ qui est affine avec $n \mapsto e^x \in C^1(\mathbb{R})$.

F_a est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente

et J_a aussi car $t \mapsto e^{-2at-t^2} \in C^1(\mathbb{R})$ puisqu'elle est l'intégrale) ne dépend pas de n , c'est une constante.

Ainsi par somme et J_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions qui le sont.

(ii) et on a : $\forall n \in \mathbb{R}, I_a'(n) = 2a e^{2ax} (J_a - F_a(n)) + e^{2ax} x - F_a'(n)$

ie $\forall n \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, I_a'(n) = e^{2ax} [2a (J_a - F_a(n)) - F_a'(n)]$

ie $I_a'(n) = 2a I_a(n) - F_a'(n) e^{2ax}$

$F_a'(n) e^{2ax} = e^{-2ax-x^2} e^{2ax} = e^{-x^2}$

Ainsi en posant $y = I_a$ on a bien l'égalité (1):

$y' = 2ay - e^{-x^2}$ Donc I_a est solution de (1)

Numéro d'inscription

506599



Né(e) le

23/03/2005

Signature

Nom

BOULMAL

Prénom (s)

ELIAS

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

05

/ 08

Numéro de table

016

6) On a montré que $\lambda \in \mathbb{R}$, $I_a(x)$ est solution de (1)

et $x \mapsto \lambda e^{2ax}$ sont solutions de (2) ($\lambda \in \mathbb{R}$)

donc l'ensemble des solutions de (1) sont les fonctions :

$$y : x \mapsto \lambda e^{2ax} + I_a(x), \lambda \in \mathbb{R}$$

7) a) soit $a < 0$ alors $\lambda e^{2ax} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$$I_a(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{cf Partie I 3 c})$$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x)) = 0$ avec $y : x \mapsto \lambda e^{2ax} + I_a(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(b) $a = 0$ on a : $y(x) = \lambda e^0 + I_0(x) = \lambda + (J_0 - F_0(x))$

$$= \lambda + \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt$$

ici $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

l'ensemble des solutions de (1) telles que $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ avec $a = 0$ sont les fonctions du type

$$\underline{y: x \mapsto I_a(x)} \quad (\text{car } \lambda = 0)$$

$$(c) \ a > 0 : y(x) \mapsto \lambda e^{2ax} + I_a(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$I_a(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{cf Partie I 3c})$$

et pour $a > 0$ $e^{2ax} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc il faut que λ soit nul.

Ainsi pour $a > 0$, l'ensemble des solutions y de (1) telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x)) = 0$ sont les fonctions de :

$$a > 0, \quad \underline{y: x \mapsto I_a(x)} \quad (\text{car } \lambda = 0)$$

Partie III

~~$$8 (a) \text{ soit } X \in \mathcal{X}(-a, 1/2)$$~~

~~On note f la densité de X et on a :~~

~~$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - (-a))^2}{2(\frac{1}{2})^2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2(x+a)^2}$$~~

Partie III)
 8a) pour $\forall m, \sigma^2 \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ($m \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}$) on a en notant f_Y une densité:

$$\forall n \in \mathbb{R} \quad f_Y(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n-m)^2}{2\sigma^2}}$$

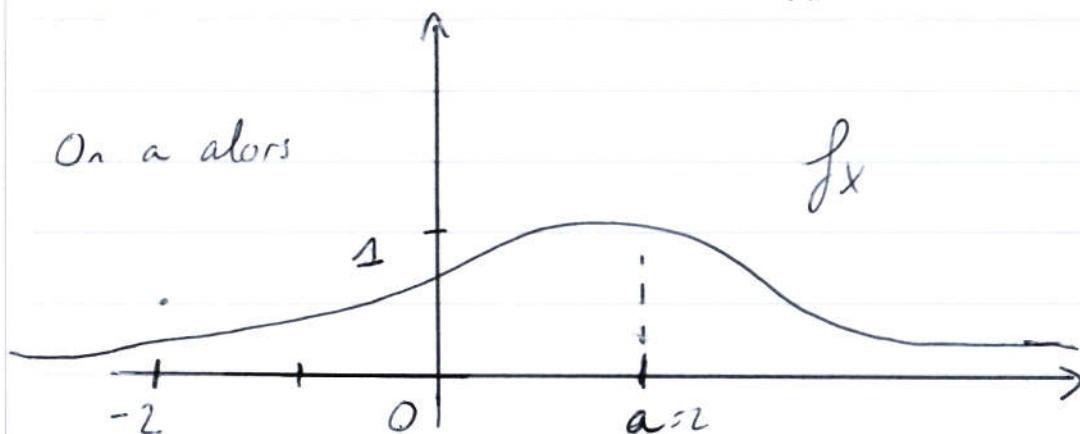
donc pour $X \sim \mathcal{N}(-a, 1/2)$ en notant f_X une densité on a:

$$\forall n \in \mathbb{R}, f_X(n) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n-(-a))^2}{2 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(n+a)^2} = f_X(n)$$

$$(b) \text{ pour } a=2, \forall n \in \mathbb{R}, f_X(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(n+2)^2}$$

$$f_X(-2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(0)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx \frac{1}{\sqrt{3.14}} > \frac{1}{\sqrt{4}} \approx \frac{1}{2}$$

$$f_X(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-4} \quad f_X(-1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-1^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi} e} \approx \frac{1}{\sqrt{3.14} \times 2.71} \approx \frac{1}{4}$$



car f_X représente une gaussienne centrée en $a=2$

id est la courbe est symétrique de $]-\infty, a]$ et de $[a, +\infty[$.

9) soit $n \in \mathbb{R}$, $P(X \geq n) = P(X > n) = \int_n^{+\infty} f_X(t) dt$ car X est à densité

$$\text{ie } \forall n \in \mathbb{R}, P(X \geq n) = \int_n^{+\infty} \frac{e^{-(t+a)^2}}{\sqrt{\pi}} dt$$

$$(b) P(X > n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_n^{+\infty} e^{-(t+a)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_n^{+\infty} e^{-t^2 - 2at - a^2} dt$$

$$= \frac{e^{-a^2}}{\sqrt{\pi}} \int_n^{+\infty} e^{-2at - t^2} dt$$

$$I_a(n) = e^{2an} \int_n^{+\infty} e^{-2at - t^2} dt$$

$$\text{d'où } I_a(n) = \frac{\sqrt{\pi}}{e^{-a^2}} \int_n^{+\infty} e^{-2at - t^2} dt P(X > n) \times e^{2an}$$

$$\forall n \in \mathbb{R}, I_a(n) = \sqrt{\pi} e^{a^2 + 2an} P(X > n)$$

$$\text{car } \frac{e^{-a^2}}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{e^{-a^2}} = 1.$$

$$10) (a) \text{ soit } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\text{en posant } \begin{cases} \alpha = 1/\sqrt{2} \\ \beta = -a \end{cases} \text{ on a: } \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} Z - a \text{ suit la même loi que } X}$$

$$\text{en effet } E\left(\frac{1}{\sqrt{2}} Z - a\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} E(Z) - a \text{ par linéarité}$$

$$= -a \quad \text{car } E(Z) = 0 \quad (Z \sim \mathcal{N}(0,1))$$

$$\text{et } V(Z) = V\left(\frac{1}{\sqrt{2}} Z - a\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 V(Z) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

```
(b) import numpy as np
import numpy.random as rd
def estim_proba(a, x):
    num = 0
    for i in range(10000):
        Z = rd.normal()
        X = -1*a + Z / (2**(1/2))
```

Numéro d'inscription

506599



Né(e) le

23 / 03 / 2005

Signature

JA

Nom

BOUVAL MAL

Prénom (s)

ELIAS

20 / 20



Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐

1

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

06 / 08

Numéro de table

016

```

: if i >= x :
:     num = num + 1
: return (num)
return (1/num)
    
```

voir la suite s.v.p.

Exercice 3:

Partie I

1) (a) D'après le théorème spectral, M est diagonalisable en tant que matrice symétrique.

$$(b) (M+I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M+I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(M+I)$$

$1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 3$

$$\text{On a } (M+I)^2 = 3(M+I)$$

$$\text{ie } M^2 + 2M + I = 3M + 3I$$

$$\text{ie } M^2 + 2M + I - 3M - 3I = 0$$

$$\text{ie } M^2 - M - 2I = 0$$

$$\text{ie } (M+I)(M-2I) = 0$$

en posant $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P: x \mapsto (x+1)(x-2)$
en polynôme annulateur de M

On en déduit:

$$\underline{\text{Sp}(M) \subset \{-1, 2\}}$$

$$(c)(i) \text{ Soit } X \in \mathcal{O}_{3,1}(\mathbb{R}) / X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{O}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

$$-1 \in \text{Sp}(\Pi) \Leftrightarrow \Pi X = -X \\ \text{ie } (\Pi + \text{I}) X = 0$$

$$\text{d'où le système: } \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y-z \end{cases}$$

$$\text{d'où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $-1 \in \text{Sp}(\Pi)$ car X existe bien et le sous espace propre E_{-1} associée à la valeur propre -1 vaut:

$E_{-1} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une famille libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre et génératrice (présence du vect) donc c'est une base de E_{-1} .

de même (ça nous aidera pour la suite) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ en et on multiplie les vecteurs par $-1 \in \mathbb{R}$.

$$(ii) E_2: \exists 2 \in \text{Sp}(\Pi) \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{O}_{3,1}(\mathbb{R}) / X \neq 0 / \Pi X = 2X \\ \text{ie } (\Pi - 2\text{I}) X = 0 \quad -2 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$$

$$\text{pour } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ on a: } (\Pi - 2\text{I}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \parallel$ avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne base de E_2 car $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. et $2 \in \text{Sp}(M)$.

$$\dim(E_1) + \dim(E_2) = 3 \text{ et } \cancel{A} \in M_3(\mathbb{R})$$

donc on retrouve bien que M est diagonalisable.

idest $\exists P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$, D diagonale telles que $M = P D P^{-1}$
 Par concaténation des vecteurs propres associées, on a :

$$\cancel{M = P D P^{-1}} \quad \cancel{P^{-1} = P^{-1}} \quad P = P \text{ définie dans l'énoncé.}$$

(d) Ainsi on a montré que P est inversible.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ / $PX = Y$ on a alors le système :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ -x + z = b \\ -y + z = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ z = b + x = c + y \end{cases}$$

$$\text{ie } \begin{cases} x + y + z = a \\ z = b + x \\ y = x - c + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + (x - c + b) + (b + x) = a \\ z = b + x \\ y = x + b - c \end{cases}$$

$$\text{ie } \begin{cases} 3x - c + 2b = a \\ z = b + x \\ y = x + b - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(a - 2b + c) \\ y = x + b - c \\ z = x + b \end{cases}$$

Numéro d'inscription

506599



Né(e) le

23 / 03 / 2005

Signature

Nom

BOULMAL

Prénom(s)

ELIAS

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

06 / 08

Numéro de table

016

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(a - 2b + c) \\ y = x + b - c \\ z = x + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(a - 2b + c) \\ y = \frac{1}{3}(a + b - 2c) \\ z = \frac{1}{3}(a + b + c) \end{cases}$$

d'où P^{-1} existe et $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{CQFD}$

(e) cf ce qui précède $\Pi = P D P^{-1}$
 ie $P \Pi = P^{-1} P D P^{-1} = I D P^{-1} = D P^{-1}$
 ie $P^{-1} \Pi P = D P^{-1} P = D I = D$.

Donc, $D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
 $= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad 2 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 1 = 6.$

ie $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ce qui est cohérent car
 $\dim(E_{-1}) = 2$ ($-1 \in \text{sp}(M)$) et $2 \in \text{sp}(M)$ et

$$\dim(E_2) = 1.$$

(f) Montrons par récurrence $\forall k \in \mathbb{N}, \Pi^k = P D^k P^{-1}$.

Initialisation: $k=0, \Pi^0 = I$. $P D^0 P^{-1} = P I P^{-1} = P P^{-1} = I$
donc $\mathcal{P}$ est vraie.

Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé, supposons $\mathcal{P}_k$ vraie

$$\Pi^{k+1} = \Pi \times \Pi^k = \Pi \times P D^k P^{-1} \text{ par hypothèse de récurrence}$$

$$\text{Or, } \Pi = P D P^{-1} \text{ (y 1d)}$$

$$\text{d'où, } \Pi^{k+1} = P D (P^{-1} P) D^k P^{-1} = P D I D^k P^{-1} = P (D D^k) P^{-1}$$

$$\text{Ainsi } \Pi^{k+1} = P D^{k+1} P^{-1} \text{ d'où } \mathcal{P}_{k+1} \text{ vérifiée.}$$

Conclusion: Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, \Pi^k = P D^k P^{-1}$

$$(g) \text{ Soit } k \in \mathbb{N} \text{ on a: } (\Pi + I)^2 = 3(\Pi + I)$$

$$\begin{cases} \Pi^2 = 1 \times \Pi + 0 \times I_3 \\ \Pi \otimes 0 = 0 \times \Pi + 1 \times I_3 \end{cases}$$

$$\Pi \otimes 0 = 0 \times \Pi + 1 \times I_3$$

$$(\Pi + I)^2 = 3(\Pi + I) \Leftrightarrow \Pi^2 - \Pi - 2I = 0$$

$$\text{c'est } \Pi^2 = 1 \times \Pi + 2 \times \underline{I}_3$$

donc on a les informations:

$$\begin{array}{ll} b_0 = 1 & a_0 = 0 \\ b_1 = 0 & a_1 = 1 \\ b_2 = 2 & a_2 = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \Pi \times \Pi^k &= \Pi \times (a_k \Pi + b_k \mathbb{I}_3) \\ &= a_k \Pi^2 + b_k \Pi \\ \Pi^{k+1} &= a_k (\Pi + 2\mathbb{I}) + b_k \Pi \end{aligned}$$

ie $\Pi^{k+1} = (a_k + b_k) \Pi + 2a_k \mathbb{I}$

donc $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{k+1} = a_k + b_k \\ b_{k+1} = 2a_k \end{cases}$

d'où $\forall k \in \mathbb{N}, a_{k+2} = a_{k+1} + b_{k+1} = a_{k+1} + 2a_k$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui a pour équation caractéristique:

$$\begin{aligned} n^2 &= n + 2 \Leftrightarrow n^2 - n - 2 = 0 \\ &\Rightarrow n = -1 \text{ ou } n = 2 \end{aligned}$$

d'où $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \lambda x(-1)^k + \mu x(2)^k, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, déterminons les:

$$\begin{cases} a_0 = \lambda + \mu = 0 \\ a_1 = -\lambda + 2\mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ 3\mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ \mu = \frac{1}{3} \end{cases}$$

donc $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{1}{3} (2^k - (-1)^k)$

et $\forall k \in \mathbb{N}, b_{k+1} = 2a_k$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, b_k = \frac{2}{3} (2^{k-1} - (-1)^{k-1})$

2) On remarque que les résultats sont cohérents avec les informations qu'on a, id est $a_0 = 0 / b_0 = 1$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b_1 = 0 \\ b_2 = 2 \end{array}$$

2) (a) Montrons par récurrence: $\forall k \in \mathbb{N}^*, (J_n)^k = m^k J_n$ ("J_n")^k = m^k · J_n

Initialisation: $k=1$ $(J_n)^1 = J_n$. $m^{1-1} J_n = 1 \times J_n = J_n$

donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie.

$$(J_n)^{k+1} = (J_n)^k \times J_n = m^{k-1} \times J_n \times J_n \text{ par hypothèse de récurrence}$$

$$J_n \times J_n = (J_n)^2$$

$$\text{Or } (J_n)^2 = m J_n \text{ par calcul}$$

$$\text{d'où } (J_n)^{k+1} = m^{k-1} \times m J_n = m^k J_n \text{ d'où } \mathcal{P}_{k+1} \text{ vérifiée.}$$

$$\text{Conclusion: } \forall k \in \mathbb{N}^*, (J_n)^k = m^{k-1} J_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$(b) \quad \underline{\Pi_n = J_n - I_n}$$

$$(c) \quad \text{D'où } (\Pi_n)^k = J \text{ Soit } k \in \mathbb{N}^*, \text{ d'où } (\Pi_n)^k = (J_n - I_n)^k$$

Numéro d'inscription

506599



Né(e) le

23/03/2005

Signature

Nom

BOULMAL

Prénom(s)

ELIAS

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

08

08

Numéro de table

016

$$\text{Or } J_n \times (-I_n) = -1 \times J_n \times I_n = -1 \times I_n \times J_n = -J_n$$

Donc J_n et $-I_n$ commutent, d'où par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (M_n)^k &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (J_n)^i (-I_n)^{k-i} \\ &= \binom{k}{0} (J_n)^0 (-I_n)^{k-0} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (J_n)^i (-I_n)^{k-i} \\ &= 1 \times I \times (-1)^k \times I_n^k + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} J_n \times (-1)^{k-i} \times I^{k-i} \\ &= (-1)^k I + \cancel{\sum_{i=1}^k} J_n \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} \end{aligned}$$

en posant $c_k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}$ (cf comme dans l'énoncé)

$$\text{On a bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*, (M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n$$

$$(d) \text{ Soit } k \in \mathbb{N}^*, c_k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}$$

$$c_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} - \binom{k}{0} n^{0-1} (-1)^{k-0}$$

$$c_k = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i} - (-1)^k \right)$$

$$c_k = \frac{1}{n} \left((n-1)^k + (-1)^{k+1} \right) \text{ par le binôme de Newton.}$$

$$\text{Ainsi on a bien } \forall k \in \mathbb{N}^*, c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$$

$$(e) \text{ Ainsi } \forall k \in \mathbb{N}^*, (\mathcal{M}_n)^k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} J_n + (-1)^k I_n$$

d'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \gamma(\mathcal{M}_n)^k = \begin{pmatrix} \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} + (-1)^k & \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} & & \\ \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} \\ \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} & & \left(\frac{(n-1)^k + (-1)^k}{n} + (-1)^k \right) \end{pmatrix}$$

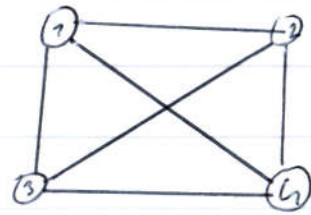
Ainsi chaque terme de la diagonale vaut : $\frac{(n-1)^k + (-1)^k}{n} + (-1)^k$
 et ceux qui s'y sont pas valent $\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$

Partie II

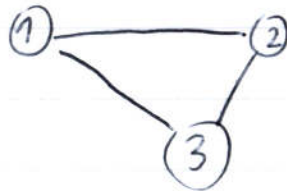
3) K_2 :



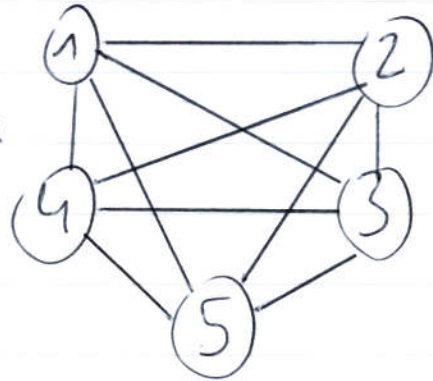
K_4 :



K_3 :



K_5 :



4) (a) notons Π_m cette matrice :

$$\Pi_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

(b) pour le chemin de longueur k on s'intéresse à $(\Pi_n)^k$

son premier coefficient vaut : $\frac{(n-1)^k + (-1)^k}{n} + (-1)^5 = \frac{(n-1)^k + 1}{n} - 1$

$$\approx n^3 + \frac{1}{n} - 1 \approx n^3 - 1$$

Donc $n^3 - 1$ chemins de longueur

Soyons précis, il y a : $\left[\frac{(n-1)^k + (-1)^k}{n} \right] \left[\frac{(n-1)^k + 1}{n} - 1 \right]$ chaînes de longueur k menant du sommet 1 à lui-même.

5) Chaque sommet du graphe K_n est de degré $(n-1)$.

6) le nombre total d'arêtes ^{du graphe K_m} est $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$.

Partie III

$$7) V_0 = (P(X_0=1) \dots P(X_0=m))$$

$$V_0 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-1}$

$$V_1 = (0 \ \underbrace{\frac{1}{n-1} \dots \frac{1}{n-1}}_{n-1})$$

10(2) $V_{k+1} = \Pi_n V_k$

(b) On le démontre par récurrence

$$c) X_n \xrightarrow{\alpha} V_k \xrightarrow{\beta} \left(\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} J_n + (-1)^k I_n \right) V_0 \times \frac{1}{(n-1)^k}$$

$$V_k \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} J_n V_0 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} X = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \text{ une variable certaine égale à } \frac{1}{n}$$

Donc $\underline{V_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\alpha} X \in \mu([1, n])}$