

A6-00075
264048
Mat Appro



Code épreuve : 282

Nombre de pages : 21

Session : 2024

Épreuve de : MATHS ESSEC/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1

1) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de permutation

On écrit $P = (P_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$

On a ${}^tP = (P_{j,i})_{(i,j) \in [1,n]^2}$

Donc $\forall (i,j) \in [1,n]^2$, $P_{j,i} = \delta_{j,\sigma(i)}$ on a

$${}^tP_{i,j} = P_{j,i}$$

${}^tP_{i,j} = \delta_{j,\sigma(i)}$ où σ est une bijection de $[1,n]$ dans $[1,n]$

$$\begin{aligned} \bullet \forall (i,j) \in [1,n]^2, [{}^tPP]_{i,j} &= \sum_{k=1}^n [{}^tP]_{i,k} \times [P]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n (P)_{k,i} \times (P)_{k,j} \end{aligned}$$

$$[{}^tPP]_{i,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{k,\sigma(i)} \times \delta_{k,\sigma(j)}$$

* Si $i \neq j$, alors $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ car σ établit une bijection de $[1,n]$ dans $[1,n]$.

Donc $\forall k \in [1,n]$, $\delta_{k,\sigma(i)} \times \delta_{k,\sigma(j)} = 0$ car $\delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(A)

* Si $i = j$, alors on a

$$[{}^tPP]_{i,i} = \sum_{k=1}^n \delta_{k,\sigma(i)}^2$$

On a σ qui établit une bijection de $[1,n]$ dans $[1,n]$
~~Donc $\exists ! l \in [1,n], \sigma(l) = i$~~

~~Donc on a~~

Donc $\sigma(i) \in [1,n]$

$$\cancel{[{}^tPP]_{i,i}} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \text{Donc } \exists ! l \in [1,n], \sigma(i) = l$$

Donc, on a $[{}^tPP]_{i,i} = \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \delta_{k,\sigma(i)}^2 \right) + \delta_{i,i}^2$

$$= 0 + 1$$

$$\underline{[{}^tPP]_{i,i} = 1} \quad (B)$$

D'après (A) et (B), on a que ${}^tPP = I_n$

Donc P est orthogonale

• On a $[{}^tP]_{i,j} = [P]_{j,i} \quad \forall (i,j) \in [1,n]^2$

$$= \delta_{j,\sigma(i)} \quad \forall (i,j) \in [1,n]^2$$

2) Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Supposons que Q est une matrice de Hadamard.

Alors, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a

$$\begin{aligned} [{}^tQQ]_{i,j} &= \sum_{k=1}^n [{}^tQ]_{i,k} \times [Q]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n [Q]_{k,i} \times [Q]_{k,j} \end{aligned}$$

* Si $i = j$, alors on a

$$[{}^tQQ]_{i,i} = \sum_{k=1}^n 1^2 = \underline{n}$$

* Si $i \neq j$, alors

$$\begin{aligned} [{}^tQQ]_{i,j} &= \sum_{k=1}^n [Q]_{k,i} \times [Q]_{k,j} = L_{+Q_i} \times C_{Q_j} \\ &= \underline{L_{+Q_i} \times C_{Q_j}} \end{aligned}$$

On sait que $[{}^tQQ]_{i,j} = L_{+Q_i} \times C_{Q_j}$ avec L_{+Q_i} la ligne i de la matrice tQ et C_{Q_j} la colonne j de Q

$$= C_{Q_i} \times C_{Q_j}$$

$= 0$ car les colonnes sont donc à donc orthogonales avec le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$

Donc on a ${}^tQQ = nI_n$

De plus, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $Q_{i,j} = 1$ ou $Q_{i,j} = -1$

donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $Q_{i,j}^2 = 1$

On a seulement montré l'implication dans le sens direct.
On admet l'équivalence.

3) On a d'une part : ${}^t({}^tH) \times {}^tH = H {}^tH$

On sait que $\forall (i, j) \in \{1, n\}^2$, $\underline{{}^tH_{i,j}^2 = H_{j,i}^2 = 1}$

car H est une matrice de Hadamard et donc vérifie l'équivalence

De plus, comme H est une matrice d'Hadamard, on a que

${}^tH H = n I_n$ donc $\left(\frac{1}{n} {}^tH\right) H = I_n$

Donc H est inversible et son inverse est $\left(\frac{1}{n} {}^tH\right)$

Donc on a la commutativité : $H \times \frac{1}{n} {}^tH = I_n$

Or, $\underline{{}^t({}^tH) \times {}^tH = H {}^tH}$
 $\underline{= n I_n}$

Donc on vient de montrer que tH est une matrice d'Hadamard d'après l'équivalence de la question 2

4) ~~On a ${}^t(PH) PH = {}^tH {}^tP P H$
 $= H P^2$
 $= H$~~

On a ${}^t(DH) DH = {}^tH {}^tD D H$
 $= {}^tH D^2 H$ car D diagonale
 $= {}^tH I_n H$
 $= {}^tH H$
 ${}^t(DH) DH = n I_n$

Copie anonyme - n°anonymat : 264048

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 21

Session : 2024

Épreuve de : MATHS ESSEC / HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{aligned} \text{On a } \forall (i, j) \in \{1, n\}^2, (DH)_{i,j}^2 &= \left(\sum_{k=1}^n D_{i,k} H_{k,j} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n D_{i,k} H_{k,j} + D_{i,i} H_{i,j} \right)^2 \\ &= (D_{i,i} H_{i,j})^2 \end{aligned}$$

$$\underline{DH_{i,j}^2 = 1} \quad \text{car } D_{i,i} H_{i,j} = 1 \text{ ou } -1$$

Donc d'après q2, DH est une matrice d'Hadamard

$$\begin{aligned} \text{On a } {}^t(HD)HD &= {}^tD^tHHD \\ &= D_n I_n D \quad \text{car } H \text{ est une matrice d'Hadamard} \\ &= n D^2 \\ \underline{{}^t(HD)HD} &= n I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \forall (i, j) \in \{1, n\}^2, (HD)_{i,j}^2 &= \left(\sum_{k=1}^n [H]_{i,k} [D]_{k,j} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n [H]_{i,k} [D]_{k,j} + [H]_{i,j} [D]_{j,j} \right)^2 \\ &= (0 + [H]_{i,j} [D]_{j,j})^2 \end{aligned}$$

$$\underline{(HD)_{i,j}^2 = 1} \quad \text{Donc } HD \text{ est une matrice d'Hadamard}$$

$$\triangleright \text{On a } {}^t(PH)PH = {}^tH {}^tP PH$$

$$= {}^tH I_n H \quad \text{car } P \text{ est orthogonale}$$

$$= {}^tH H$$

$$\underline{{}^t(PH)PH = I_n}$$

$$\forall (i, j) \in \{1, n\}^2, [PH]_{i,j}^2 = \left(\sum_{k=1}^n [P]_{i,k} \times [H]_{k,j} \right)^2$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \delta_{i,k} \times [H]_{k,j} \right)^2$$

Comme σ est bijection de $\{1, n\}$ dans $\{1, n\}$:

$\exists ! l \in \{1, n\}$, tel que $\sigma(l) = i$ car $i \in \{1, n\}$

On a alors

$$[PH]_{i,j}^2 = \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^n \delta_{i,\sigma(k)} \times [H]_{k,j} + \delta_{i,\sigma(l)} \times [H]_{l,j} \right)^2$$

$$= \left(0 + [H]_{l,j} \right)^2 \quad \text{car } \forall l \in \{1, n\}, l \neq l, \delta_{i,\sigma(l)} = 0$$

$$\underline{[PH]_{i,j}^2 = 1}$$

Donc PH est une matrice d'Hadamard

$$\triangleright \text{On a } {}^t(HP)HP = {}^tP {}^tH HP$$

$$= {}^tP {}^tH I_n P$$

$$= {}^tP P$$

$$\underline{{}^t(HP)HP = I_n}$$

car P orthogonale

$$\forall (i,j) \in \{1,m\}^2, (HP)_{i,j}^2 = \left(\sum_{l=1}^m [H]_{i,l} [P]_{l,j} \right)^2$$

$$= \left(\sum_{l=1}^m [H]_{i,l} \times \sigma_{l,\sigma(j)} \right)^2$$

On pose l'unique $l \in \{1,m\}$, tel que $\sigma(j)=l$

On a alors

$$(HP)_{i,j}^2 = \left(\sum_{\substack{1 \leq l \leq m \\ l \neq l}} [H]_{i,l} \times \sigma_{l,\sigma(j)} + [H]_{i,l} \times \sigma_{l,\sigma(j)} \right)^2$$

$$= (0 + [H]_{i,l})^2$$

$$\underline{(HP)_{i,j}^2 = 1}$$

(car H est une matrice d'Hadamard

Donc HP est une matrice d'Hadamard

2) Nous admettons les réponses précédentes -

$$\text{On a } \forall (i,m) \in \{2,n\}^2, \text{ if } m \sum_{l=1}^m (S_{i,l}+1)(S_{m,l}+1) = m$$

On admet que m peut être égal à 2

Soit $n \geq 3$

$$\text{On a } \forall (i,m) \in \{2,n\}^2, \text{ if } m \forall l \in \{1,m\}, (S_{i,l}+1)(S_{m,l}+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_{i,l} = -1 \\ 0 & \text{si } S_{m,l} = -1 \\ 0 \\ 4 & \text{si } S_{m,l} = S_{i,l} = 1 \end{cases}$$

Donc on a m qui est égale à une somme de

4
Donc m est un multiple de 4

5) On peut poser une matrice D diagonale tel que ses coefficients diagonaux sont 1 ou -1 de tel sorte que

$$D, \forall i \in [1, n], (D)_{i,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } H_{1,i} = 1 \\ -1 & \text{si } H_{1,i} = -1 \end{cases}$$

On aura alors sur la première ligne de la matrice HD que ~~des~~ le vecteur $(1, \dots, 1)$ et $HD \in M_n(\mathbb{R})$

De plus, on sait que HD est une matrice d'Hadamard

Donc il existe bien une matrice de taille $n \times n$ dont la première ligne est $(1, \dots, 1)$

9) ~~On sait qu'il~~ Soit $n > 2$

On sait qu'il existe une matrice de Hadamard de taille $n \times n$ dont la première ligne est $(1, \dots, 1)$

~~Notons S cette matrice de la~~

~~On sait que~~

$$\forall (i, m) \in [2, n]^2, i \neq m, \sum_{l=1}^n (S_{i,l} + 1)(S_{m,l} + 1) = 0$$

Soit $q \in [1, n-3]$, $l \in [q, n-2]$

~~On a~~ $\sum_{l=1}^n S$ Vérifions que la matrice est bien de Hadamard

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & | & 1 & \dots & 1 & | & 1 & \dots & 1 & | & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & | & 1 & \dots & 1 & | & -1 & \dots & -1 & | & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \dots & 1 & | & -1 & \dots & -1 & | & 1 & \dots & 1 & | & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 264048

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 21

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques ESSEC/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Notons S la matrice

$$\text{D'après q7: } \forall (i, m) \in \{1, m\}, i \neq m \quad \sum_{k=1}^m (S_{i,k} + 1)(S_{m,k} + 1) = m$$

Pour $i = 2$ et $m = 3$, on a

$$\sum_{k=1}^3 (S_{1,k} + 1)(S_{2,k} + 1) + \sum_{k=3}^3 (S_{1,k} + 1)(S_{2,k} + 1) = m$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^3 4 + 0 = m \quad \text{car la deuxième somme va à 0 avec le -1}$$

$$\text{donc } 4 \cdot 3 = m$$

Or on sait que $\forall m > 2, m = 4l$ avec $l \in \mathbb{N}^*$

Donc on a bien vérifié que la qu'il existe une telle matrice S

10) Supposons que la matrice admette le même nombre de colonnes par chaque bloc

En remarquant qu'il y a 4 blocs, on a déduit que il y a 4 l avec colonnes avec $l \in \mathbb{N}^*$

Donc m est nécessairement divisible par 4

12)

11) Supposons que A et B sont des matrices de Hadamard.

On a $^t(A \otimes B) A \otimes B =$

13)

```
import numpy as np
def test_hadamard(M):
    a, p = np.shape(M)
    m, p = np.shape(M)
    if m != p:
        return -2
    else:
        for i in range(0, m):
            for j in range(0, m):
                if M[i, j] != -1 and M[i, j] != 1:
                    return -1
            for j in range(0, m):
                for l in range(0, m):
                    if np.dot(np.transpose(M)[i, :], M[j, :]) != 0:
                        return 0
        return 1
```

141

```

import numpy.random as rd
def rand_ladam (m, n):
    matpm = np.ones((m, n))
    for i in range (0, m):
        mb_en = 0
        j = 0
        while 2 * mb_en < m and j < n:
            val = rd.randint (0, 2)
            mb_en += val
            matpm [i, j] = 2 * val - 1
            j = j + 1
        if (2 * mb_en == m):
            for l in range (j, n):
                matpm [i, l] = -1
    if (test_ladamad (matpm) == 1):
        return (matpm)
    return np.zeros ((m, n))

```

Partie II

15) On pose $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \sum_{k=1}^n p_k x_k y_k$

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\text{On a } \varphi(x, y) = \sum_{k=1}^n p_k x_k y_k$$

En fait que somme, $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}$

Donc φ est une forme

$$\begin{aligned} \text{On a } \varphi(x, y) &= \sum_{k=1}^n p_k x_k y_k \\ &= \sum_{k=1}^n p_k y_k x_k \end{aligned}$$

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

Donc φ est symétrique

Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda a + b, c) &= \sum_{k=1}^n p_k (\lambda a_k + b_k) c_k \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n p_k a_k c_k + \sum_{k=1}^n p_k b_k c_k \quad \text{par linéarité de la somme} \end{aligned}$$

$$\varphi(\lambda a + b, c) = \lambda \varphi(a, c) + \varphi(b, c)$$

Donc φ est linéaire à gauche. Donc par symétrie, φ est linéaire à droite

Donc φ est bilinéaire

Copie anonyme - n°anonymat : 264048

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 21

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques ESSEC/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

▮ Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
On a :

$$\begin{aligned}\varphi(x, x) &= \sum_{k=1}^n p_k x_k x_k \\ &= \sum_{k=1}^n p_k x_k^2\end{aligned}$$

Donc $\varphi(x, x) \geq 0$ en fait que somme de réels positifs
car les probabilités sont positives

Donc φ est positif.

▮ Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x, x) = 0$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^n p_k x_k^2 = 0$$

Pour somme de réels positifs, on a $\forall k \in \{1, n\}, p_k x_k^2 = 0$

Or, les probabilités p_k sont non nulles car $p_k = P(\{\omega_k\})$
et on sait que $\omega_k \in \Omega$ donc $P(\{\omega_k\}) > 0$

Donc $\forall k \in \{1, n\}, x_k^2 = 0$ donc $x_k = 0$

Ainsi $x = (0, \dots, 0)$

Donc φ est défini positif.

Finalement, φ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

17) On a d'une part :

$$\begin{aligned}\langle v, u_0 \rangle &= \sum_{k=1}^n p_k V(w_k) \times 1 \\ &= \sum_{k=1}^n P(\{w_k\}) V(w_k)\end{aligned}$$

$\langle v, u_0 \rangle = E(V)$ par définition d'une ~~espérance~~ de l'espérance
d'une variable discrète (variable
dénombrable)

D'autre part, $\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^n P(\{w_k\}) V(w_k) \times W(w_k)$

$\langle v, w \rangle = E(VW)$ par espérance du produit

18) ^{$\forall (k, i) \in \{1, n\}^2, i \neq j$} On a donc $\langle x_i, u_0 \rangle = E(X_i)$

On, $\forall i \in \{1, n\}, X_i = a_i Z_i + b_i$

Donc $E(X_i) = E(a_i Z_i + b_i)$
 $= 0$

Donc $\langle x_i, u_0 \rangle = E(X_i) = 0$

On a $\langle x_i, x_i \rangle = E(X_i^2)$

On sait que $V(X_i) = V(a_i Z_i + b_i) = 1$

D'après la formule de covariance - Huygens, on a que $E(X_i^2) = (E(X_i))^2 + 1 = 1$

Pour $E(X_i) = 0$, on a que $E(X_i^2) = 1$

Donc $\langle x_i, x_i \rangle = 1$

$$\begin{aligned} \text{On a } \langle x_i, x_j \rangle &= E(X_i X_j) \\ &= E((a_i Z_i + b_i)(a_j Z_j + b_j)) \end{aligned}$$

On sait que Z_i et Z_j sont indépendants, alors d'après le lemme des coalitions, $(a_i Z_i + b_i)$ et $(a_j Z_j + b_j)$ sont indépendants et comme ils admettent une variance car sont des variables aléatoires discrètes, on a que

$$E((a_i Z_i + b_i)(a_j Z_j + b_j)) = E(a_i Z_i + b_i) \times E(a_j Z_j + b_j) = 0$$

Donc $\langle x_i, x_j \rangle = 0$

20) b) Soit $(Q, P) \in (\Pi_{m-1}(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{On a } T(\lambda Q + P) &= (Q(\lambda Q + P)(x_1) \dots Q(\lambda Q + P)(x_m)) \\ &= (\lambda Q(x_1) + P(x_1) \dots \lambda Q(x_m) + P(x_m)) \\ T(\lambda Q + P) &= \lambda T(Q) + T(P) \end{aligned}$$

Donc T est une application linéaire

▷ Soit $Q \in \ker(T)$
Alors $(Q(x_1) \dots Q(x_m)) = (0 \dots 0)$

Donc $\forall i \in [1, m], Q(x_i) = 0$

Donc Q admet m racines

Or Q est de degré inférieur ou égal à $m-1$

Donc Q est le polynôme nul.

$$\text{Donc } \ker(T) = \{0_{\mathbb{R}_{m-1}(x)}\}$$

Donc T est injective.

$$\hookrightarrow \text{On a } \dim(\mathbb{R}_{m-1}(x)) = m = \dim(\mathbb{R}^m)$$

Donc comme les dimensions sont égales à m et que T est injective, alors T est bijective.

Donc T est un isomorphisme

21) a) On admet le résultat.

$$b) \text{ On a } n = \# \{ i \in [1, l], \# X_i(n) \geq 2 \}$$

$$\text{Donc } n \leq l$$

$$\text{donc } l + n \geq 2n$$

$$\text{donc } n-1 \geq 2n$$

$$\text{donc } \underline{\underline{\frac{n-1}{2} \geq n}}$$

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 21

Session : 2024

Épreuve de : MATHS ESSEC/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie III

23) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^{n^2})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{On a } \varphi(\lambda x + y) = \left[(\lambda x + y)_{(i-1)n+j} \right]_{(i,j) \in \{1,n\}^2}$$

$$= \lambda \left[x_{(i-1)n+j} \right]_{(i,j) \in \{1,n\}^2} + \left[y_{(i-1)n+j} \right]_{(i,j) \in \{1,n\}^2}$$

par somme de somme de matrices

$$\underline{\varphi(\lambda x + y) = \lambda \varphi(x) + \varphi(y)}$$

Donc φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

▷ Soit $x \in \mathbb{R}^{n^2}$

$$\|\varphi(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{(i-1)n+j}^2$$

On a donc le résultat.

24) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2$$

$$\begin{aligned} \text{De plus } \text{Tr}(^tAA) &= \sum_{i=1}^n (^tAA)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (^tA)_{i,k} (A)_{k,i} \\ \text{Tr}(^tAA) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n A_{k,i}^2 \end{aligned}$$

Les indices étant mués, on a $\text{Tr}(^tAA) = \|A\|^2$

25) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$|\langle A, B \rangle| \leq \|A\| \cdot \|B\| \text{ avec } (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

~~On peut choisir la matrice nulle remplie de 1.~~

$$\text{On a donc } \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} \times 1 \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2 \right)^{1/2} \times \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1^2 \right)^{1/2}$$

$$\text{donc } \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} \right| \leq n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

~~On d'après l'inégalité~~ On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{et } |A| = \begin{pmatrix} |a_{1,1}| & \dots & |a_{1,n}| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |a_{n,1}| & \dots & |a_{n,n}| \end{pmatrix}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy - Schwarz, on a :

$$\left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{i,j} \times 1 \right| \leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |A_{i,j}|^2 \right)^{1/2} \times \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m 1^2 \right)^{1/2}$$

$$\left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |A_{i,j}| \right| \leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{i,j}^2 \right)^{1/2} \times (m^2)^{1/2}$$

$$\text{donc } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |A_{i,j}| \leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{i,j}^2 \right)^{1/2} \times m$$

$$\text{donc } F(A) \leq m \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

46) Supposons q

Partie II

16) Supposons qu'un tel couple existe, alors (Analyse)

$$E(a_i Z_i + b_i) = 0 \text{ donc } E(Z_i) = -\frac{b_i}{a_i} \text{ car } a_i \neq 0 \text{ ou } b_i = -a_i E(Z_i)$$

$$\text{De plus } V(a_i Z_i + b_i) = 1 \text{ donc } a_i^2 V(Z_i) = 1$$

$$\text{donc } a_i^2 = \frac{1}{V(Z_i)}$$

$$\text{donc } a_i = \frac{1}{\sigma(Z_i)}$$

$$\text{(Synthèse): Soit } \begin{cases} a_i = \frac{1}{\sigma(Z_i)} \in \mathbb{R}_+^* \text{ car } \sigma(Z_i) \in \mathbb{R}_+^* \\ b_i = -a_i E(Z_i) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{On a } E(a_i Z_i + b_i) = a_i E(Z_i) + b_i = a_i E(Z_i) - a_i E(Z_i) = 0$$

par linéarité

De plus, $V(a_i Z_i + b_i) = a_i^2 V(Z_i)$
 $= \frac{1}{V(Z_i)}$

$V(a_i Z_i + b_i) = 1$

On vient de montrer par analyse synthétique qu'il existe un unique couple $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que

$E(a_i Z_i + b_i) = 0$ et $V(a_i Z_i + b_i) = 1$

20) On a $\sum_{k=1}^m P(Z = a_k) \beta$

a) Soit $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$ une suite de réelles tels que

$\sum_{k=1}^m P(Z = a_k) \beta_k = 0$

Donc $\langle B, u \rangle = 0$ donc $B \perp u_0$

De plus $\sum_{k=1}^m P(Z = a_k) d_k \beta_k = 0$

Donc $\langle B, Z \rangle = 0$ ou $Z = (d_1, \dots, d_m)$

Donc $B \perp Z$

Donc au final, $B \perp$

On admet le résultat

Copie anonyme - n°anonymat : 264048

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 21

Session : 2024

Épreuve de : MATHS ESSEC/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) On a ~~$E(Q)$~~ Soit $Q \in \mathbb{R}_{m-1}(x)$

$$\text{On a } E(Q(Z)) = \sum_{k=1}^m P(Z=a_k) Q(a_k) \quad \text{d'après le théorème de transfert}$$

$$\text{On a } E(Q(Z)Z) = \sum_{k=1}^m P(Z=a_k) Q(a_k) a_k$$

On a admis à la question 20.a l'existence de réels $\beta_1, \dots, \beta_m$ vérifiant les égalités au dessus.

Donc comme T est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{m-1}(x)$ dans $\mathbb{R}^m$ tel que $T(Q) = (Q(a_1), \dots, Q(a_m))$ alors on a qu'il existe un réel polynôme Q tel que

$$(Q(a_1), \dots, Q(a_m)) = (\beta_1, \dots, \beta_m) \text{ et qui vérifie}$$

$$E(Q(Z)) = 0 \quad E(Q(Z)Z) = 0 \quad \text{et } Q(Z)(Z) \neq \{0\} \text{ car } (\beta_1, \dots, \beta_m) \neq (0, \dots, 0)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

