

ECRICOME PREPA 2024 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique

503577

RAHMANI

ETTAYIB

02/09/2003

---

Note de délibération : 19.15 / 20

---



Numéro d'inscription

503577

Né(e) le

02 / 09 / 2003

Signature



Nom

RAHMANI

Prénom(s)

ETRAYIB

19.15 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

02 /

Numéro de table

002

Exercice n°1

1) a) on a

$$M = A - I$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

càd

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{4} & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) on a

$$2M + I = \cancel{2A} - I = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{et } (2M + I)^2 &= (2M + I)(2M + I) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et ainsi  $(2M+I)^3 = (2M+I)^2(2M+I)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

car  $(2M+I)^3 = 0$

c) ome

$$M(8M^3 + 12M + 6I) = 8M^3 + 12M^2 + 6M$$

$$\Rightarrow \cancel{12M^2} + 6M$$

$= I$

or,  $(2M+I)^2 = 4M^2 + 4M + I$

et  $(2M+I)^3 = (2M+I)^2(2M+I)$

$$= (4M^2 + 4M + I)(2M+I)$$

$$= 8M^3 + 12M^2 + 6M + I$$

car  $M(8M^2 + 12M + 6M + I) = 2(2M+I)^3 + I$

or,  $(2M+I)^3 = 0$

car  $(2M+I)^3 + I = 0$

car  $(2M+I)^3 = -I$

d) ome  $M(8M^2 + 12M + 6I) = -I$

car  $M(-8M^2 - 12M - 6I) = I$

car  $M(-8M^2 - 12M - 6I) = I = (-8M^2 - 12M - 6I)$

donc  $M$  est inversible et  $M^{-1} = -8M^2 - 12M - 6I$

2) Définition  $\forall m \in \mathbb{N}$  on a

$$\begin{aligned}
 AX_m + B &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_m \\ s_m \\ t_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}s_m + 2t_m \\ r_m + s_m - t_m \\ \frac{1}{2}t_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}s_m + 2t_m \\ r_m + s_m - t_m \\ \frac{1}{2}t_m + 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

co'd  $AX_m + B = \begin{pmatrix} r_{m+1} \\ s_{m+1} \\ t_{m+1} \end{pmatrix} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

3) a)

On a

$$\begin{aligned}
 AC + B &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{co'd } AC + B = C
 \end{aligned}$$

b)  $AC + B = C$

co'd  $AC + B - C = 0$

eq'a  $C(A - I) + B = 0$

co'd  $C(A - I) = -B$

$$\text{càd } C(A-I) = -I$$

$$\text{eqv } -(A-I) = I$$

$$\text{càd } -(A-I) = I = (A-I)C$$

donc  $(A-I)$  est inversible.

on utilise la méthode des pivot:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{1}{4} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Lop L  
2 1

on obtient à gauche une matrice triangulaire  
sans 0 sur la diagonale donc  $A-I$   
est inversible

$$\begin{aligned} \text{c) on a } Ax + B &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}y + 2z \\ x + y - z \\ \frac{1}{2}z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{càd } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}y + 2z \\ x + y - z \\ \frac{1}{2}z + 1 \end{pmatrix}$$

Numéro d'inscription

5 0 3 5 7 7



Né(e) le

0 2 / 0 9 / 2 0 0 3

Signature

Nom

R A H M A N I

Prénom(s)

E T T I Y I B

19.15 / 20



Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 2 /

Numéro de table

0 0 1

$$\text{càd} \begin{cases} -\frac{1}{4}y + 2z = x \\ x + y - z = 2 \\ \frac{1}{2}y + z = 2 \end{cases}$$

$$\text{équ} \begin{cases} -x = -\frac{1}{4}y - 2z \\ x = y \\ -\frac{1}{2}z = -1 \end{cases}$$

$$\text{càd} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\text{car } x = y = z$$

ainsi

C'est l'unique matrice colonne telle que

$$X = AX + B$$

4) Définition:  $\forall m \in \mathbb{N} : H_m : X_m - C = A^m (X_0 - C)$   
ou encore  $X_m = A^m (X_0 - C) + C$

Initialisation:  $m=0$ .

$$\text{car } A^0 (X_0 - C) = I(X_0 - C) = X_0 - C$$

et d'autre part  $X_0 - C$

donc  $H_0$  est vraie.

Hérédité: Soit  $m \geq 0$  un entier fixé on suppose

que  $H_m$  est vraie et on veut prouver que

$$H_{m+1} \text{ est vraie "càd } X_{m+1} = A^{m+1} (X_0 - C) + C$$

Or,  $X_{m+1} = AX_m + B$  d'après 2')  
 $= A(A^m(X_0 - C) + C) + B$  hypothèse d'induction  
 $= A^{m+1}(X_0 - C) + AC + B$   
 $= A^{m+1}(X_0 - C) + C$  car  $AC + B = C$ .

donc  $H_{m+1}$  est vraie.

Conclusion: On a prouvé que  $H_0$  est vraie  
 et que  $H_m$  est héréditaire  $\forall m \in \mathbb{N}$  donc  $H_m$  est  
 vraie  $\forall m \in \mathbb{N}$ .

Ainsi,  $X_m = A^m(X_0 - C) + C \quad \forall m \in \mathbb{N}$

5) a) On a  $(2A - I) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $(2A - I)^2 = (2A - I) \begin{pmatrix} 2A - I \end{pmatrix}$   
 $= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   
 $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et  $(2A - I)^3 = (2A - I)^2 (2A - I)$

$$= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -3 & -1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$= \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{càd } (2A - 3I)^3 = 0$$

On sait que les valeurs propres possibles de  $A$  sont parmi les racines du polynôme annulateur de  $A$ . Or, on a  $(2A - 3I)^3 = 0$ .

On pose  $\forall x \in \mathbb{R} \quad P: x \mapsto (2x - 1)^3$ .

On a donc Or,  $2x - 1$  est une expression du premier degré annulant

$$2x - 1 = 0$$

$$\text{càd } 2x = 1$$

$$\text{d'où } x = \frac{1}{2}$$

Ainsi,  $\lambda = \frac{1}{2}$  est la seule valeur propre possible de  $A$

b) i) On suppose que  $A$  est diagonalisable.

On sait alors qu'il existe une matrice

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

matrice dont les diagonales sont des valeurs propres non nulles de  $A$ .

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de  $A$  et dont l'ordre a été imposé par  $D$ .

ona alors la relation

$$AR = RD.$$

ca'd  $AR = R \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix} I$

ca'd  $R^{-1}AR = R^{-1}R \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix} I$

eqa  $\frac{1}{2} I = R^{-1}AR$

puisque  $A$  est inversible  
et  $I$  également  
donc  $R$  est inversible

ii) ona  $A = RDR^{-1}$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix} R^{-1}$$

ca'd  $A = \frac{1}{2} I$

$$= \frac{1}{2} (RIR^{-1})$$

$$= \frac{1}{2} (RR^{-1})$$

ca'd  $A = \frac{1}{2} I$

c) iii) on a  $A = \frac{1}{2} I$

Cela permet de conclure que  $A$  n'admet pas  
3 valeurs propres distinctes donc  $A$  n'est  
pas diagonalisable.

6) a) ona  $QR = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right|$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ca'd  $QR = 2I$

b) ona  $QR = 2I$

ca'd  $\frac{1}{2}(QR) = I$

eqa  $P \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix} Q = I = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix} P$

Numéro d'inscription

503577

Né(e) le

02/09/2003

Signature

Nom

RAHMANI

Prénom(s)

ETTAYIO

19.15 / 20

Ecricome

Épreuve : .....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03/

Numéro de table

002

donc Perimversible et  $P^{-1} = \frac{1}{2} P$ 

$$\begin{aligned}
 c) \quad \text{on a} \quad \frac{1}{4} P T P &= \frac{1}{4} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{3} & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{3} & 4 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 8 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

cà d

$$A = \frac{1}{4} P T P$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad \text{Definition : } \forall m \in \mathbb{N} : H_m'' A^m &= \frac{1}{2^{m+1}} P T^m P \\
 \text{Initialisation : } m=0 & \\
 \text{on a } \frac{1}{2} P T^0 P &= \frac{1}{2} P I P = \frac{1}{2} P P = P P^{-1} \\
 &= I = A^0
 \end{aligned}$$

donc  $H_0$  est vraie.

car d'après b)

$$= I = A^0$$

Hérédité : soit  $m \geq 0$  un entier fixé on suppose que  $H_m$  est vraie et on veut prouver que

$$H_{m+2} \text{ est vraie } \text{ c'ad } A^{m+2} = \frac{1}{2^{m+2}} P T^{m+2} Q.$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } A^{m+2} &= A^m A \\ &= \left( \frac{1}{2^{m+1}} P T^m Q \right) A \\ &= \left( \frac{1}{2^{m+1}} P T^m Q \right) \left( \frac{1}{2} P T Q \right) \\ &= \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) \left( \frac{1}{2} \right) P^2 T^{m+2} Q = \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) \left( \frac{1}{2 \times 2} \right) P^2 T^{m+2} Q \\ &= \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) \frac{1}{2} P^2 T^{m+2} Q \\ &= \left( \frac{1}{2^{m+2}} \right) P^2 T^{m+2} \left( \frac{1}{2} Q Q \right) = \frac{1}{2^{m+2}} \left( P^2 P^{-2} T^{m+2} Q \right) \\ &= \frac{1}{2^{m+2}} \left( P T^{m+2} Q \right). \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

donc  $H_{m+2}$  est vraie

conclusion: on a prouvé que  $H_0$  est vraie et

que  $H_m$  est héréditaire  $\forall m \in \mathbb{N}$ . donc  $H_m$

est vraie  $\forall m \in \mathbb{N}$ .  $A^m = \frac{1}{2^{m+1}} P T^m Q \quad \forall m \in \mathbb{N}$

e)  $\forall m \in \mathbb{N}$  on a

$$A^m = \frac{1}{2^{m+1}} P T^m Q.$$

c'ad

e) Definition:  $\forall m \in \mathbb{N} : H_m \equiv T^m = \begin{pmatrix} 1 & 2m & 2m(m-1) \\ 0 & 1 & 2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Initialisation:  $m=0 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = T^0$

donc  $H_0$  est vraie.

Hérédité: Soit  $m \geq 0$  un entier fixé on suppose que  $H_m$  est vraie et on veut prouver que  $H_{m+1}$  est vraie. C'est  $\overbrace{T^{m+1}}^{T^m T} = \begin{pmatrix} 1 & 2(m+1) & 2(m+1)m \\ 0 & 1 & 2(m+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C'est  $T^{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(m+1) & 2(m+1)m \\ 0 & 1 & 2(m+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Or,  $T^{m+1} = T^m T$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2m & 2m(m-1) \\ 0 & 1 & 2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2+2m & 4m+2m(m-1) \\ 0 & 1 & 2+2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  d'après l'hypothèse de récurrence.

$= \begin{pmatrix} 1 & 2(m+1) & 2\{m|2m+m-1\} \\ 0 & 1 & 2(m+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc  $H_{m+1}$  est vraie.

Conclusion: on a prouvé que  $H_0$  est vraie et  $H_m$  est héréditaire  $\forall m \in \mathbb{N}$  donc  $H_m$  est vraie  $\forall m \in \mathbb{N}$

Ainsi,  $\boxed{T^m = \begin{pmatrix} 1 & 2m & 2m(m-1) \\ 0 & 1 & 2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall m \in \mathbb{N}}$

7)  $\forall m \in \mathbb{N}$  on a l'équation:  $\forall m \in \mathbb{N}$  on a d'après 4)

$$A^m = \frac{1}{2^{m+2}}$$

$$\begin{pmatrix} P & T^m & Q \end{pmatrix}$$

$$X_m = A^m (X_0 - C) + C$$

$$= A^m \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + C$$

$$= A^m \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-2m+2}{2^{m+2}} & -\frac{m}{2^{m+2}} & \frac{-3m^2+11m}{2^{m+2}} \\ \frac{4m}{2^{m+2}} & \frac{2m+2}{2^{m+2}} & \frac{6m^2-10m}{2^{m+2}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{2^{m+2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{càd } \begin{pmatrix} r_m \\ s_m \\ t_m \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{m+2}} \begin{pmatrix} -2m+3m^2-11m \\ 4m+2-6m^2+10m \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

± on fait une égalité place par place on a

$$\begin{cases} r_m = 2 + \frac{1}{2^{m+2}} (3m^2 - 13m) \\ s_m = 8 + \frac{1}{2^m} (-3m^2 + 2m + 2) \\ t_m = 2 - \frac{1}{2^m} \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Numéro d'inscription

503577

Né(e) le

02/09/2003

Signature

Nom

RAHMANI

Prénom(s)

ETTAYIB

19.15 / 20



Épreuve : .....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

04 /

Numéro de table

002

$$\begin{aligned}
 8) a) \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m^2}{2^n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( m^2 \times \frac{1}{2^n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( m^2 \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2^n} \right) \quad \text{car } \lim(a \cdot b) = \lim a + \lim b \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (m) - \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n) \quad \text{car } \lim(a^n) = n \lim(a) \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (m) - m \lim_{n \rightarrow \infty} (2) \quad \text{et } \lim\left(\frac{1}{a}\right) = -\lim(a) \\
 &= m \left( -\lim_{n \rightarrow \infty} (2) + \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} (m)}{m} \right) \\
 \text{cà d } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m^2}{2^n} \right) &= m \left( -\lim_{n \rightarrow \infty} (2) + \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} (m)}{m} \right) \quad \forall m \in \mathbb{N}^*
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m^2}{2^n} \right) = m \left( \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} (m)}{m} - \lim_{n \rightarrow \infty} (2) \right)$$

$$\text{or, } \sum_{m=0+\delta}^{\infty} \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} (m)}{m} = 0 \quad \text{par croissance comparée.}$$

$$\text{donc } \sum_{m=0+\delta}^{\infty} \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} (m)}{m} - \lim_{n \rightarrow \infty} (2) = -\lim_{n \rightarrow \infty} (2)$$

$$\text{donc par produit, } \sum_{m=0+\delta}^{\infty} m \left( \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} (m)}{m} - \lim_{n \rightarrow \infty} (2) \right) = -\infty$$

donc il vient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty.$$

donc par composition  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = -\infty.$

ca'd  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$

de la même façon on a  $\ln\left(\frac{n}{2^n}\right) = n \left( -\ln(2) + \frac{\ln(n)}{n} \right)$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) pour  $t_n$  on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{2^n} = 2$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 2$

$$\Gamma_n = 2 + \frac{3n^2}{2^{n+2}} - \frac{13n}{2^{n+2}}.$$

or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{2^{n+2}} - \frac{13n}{2^{n+2}} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma_n = 2$

et  $S_n = 2 + \frac{-3n^2}{2^{n+2}} + \frac{7n}{2^{n+2}} + \frac{21}{2^n}$

or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n^2}{2^{n+2}} + \frac{7n}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^n} = 0$

$$\text{càd } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = p$$

Exercice n° 2:

Partie 1:

1) a) On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$

Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{1+e^x} = \frac{4}{1} = 4.$

càd  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$

La droite d'équation  $y = 4$  est asymptote horizontale à  $f$  en  $-\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  donc par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1+e^x} = 0.$$

La droite d'équation  $x = 0$  est asymptote

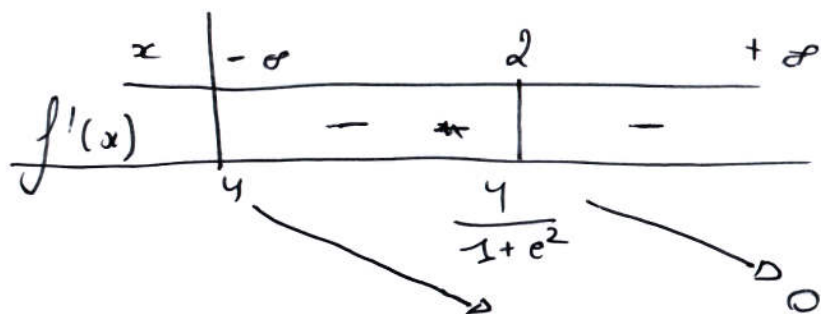
2) a) La fonction est un quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a  $f'(x) = \frac{-(1+e^x)' \cdot 4}{(1+e^x)^2}$

càd  $f'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b)

puisque une exponentielle est toujours strictement positive cette expression est du signe de  $-4e^x$ . or on a  $e^x > 0$

soit  $\frac{-4e^x}{e^x} > 0$  car  $-4e^x < 0$ .  
 soit  $\frac{-4e^x}{e^x} < 0$  car  $-4e^x < 0$ .  
 soit  $f'(x) < 0$ .



c) on a  $f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ .

$f(x) - 4 = 0$   
 soit  $\frac{4}{1+e^x} - \frac{4(1+e^x)}{1+e^x} = 0$

soit  $\frac{4 - 4 - 4e^x}{1+e^x} = 0$

soit  $f'(x) = 0$ .

soit  $f'(x) < 0$  donc

on est descendu de la droite d'équation  $y = 4$

d) on a  $f'(0)(x-0) + f(0)$

or,  $f'(0)(x-0) = \frac{-4}{(1+e^0)^2} x = -\left(\frac{4}{4}\right)x = -x$

et  $f(0) = 2$   
 donc  $y = 2 - x$

Numéro d'inscription

303777

Né(e) le

02/09/2003

Signature



Nom

RAHMANI

Prénom(s)

ETAYI

19.15 / 20



Épreuve : .....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

05 /

Numéro de table

0.2

3) a) La fonction  $f'$  est un quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4e^x(1+e^x)^2 - (2e^x(1+e^x)(-4e^x))}{(1+e^x)^4} \\ &= 4e^x \left( \frac{(1+e^x)(-4e^x(1+e^x) - 2e^x(-4e^x))}{(1+e^x)^4} \right) \\ &= \frac{-4e^x(1+e^x) - 2e^x(-4e^x)}{(1+e^x)^3} \\ &= \frac{4e^x(-1 - e^x + 2e^x)}{(1+e^x)^3} = \frac{4e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3} \end{aligned}$$

car  $f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) Cette expression est du signe de  $e^x - 1$ .

or,  $e^x - 1 \geq 0$

car  $e^x \geq 1$

car  $x \geq 0$

car  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$

| $x$      | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|-----|-----------|
| $f''(x)$ | $-$       | $0$ | $+$       |

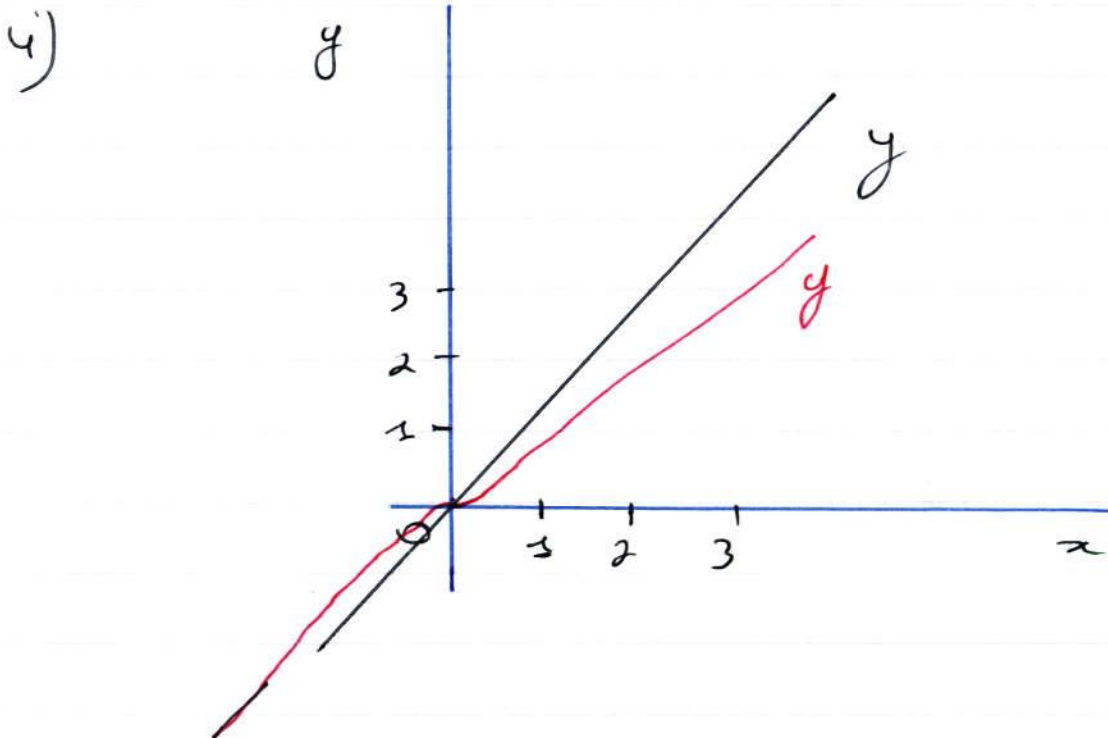
ainsi,  $f$  est ~~concave~~ concave en  $]-\infty; 0]$  et convexe sur  $[0; +\infty[$ . Cela assure que  $f$  possède un unique point d'inflexion en  $O$  avec  $A(0; f(0))$  c-à-d  $A(0; 2)$

c)  $\forall x \in \mathbb{R}$   
 $f(x) - x = 0$   
 ég à  $\frac{4}{1+e^x} - x = 0$

c-à-d  $\frac{4 - x - x e^x}{1 + e^x} = 0$   
 c-à-d

or  $f(x)$  est décroissante donc  $f(x) - x$  l'est également donc cela assure que

$f$  est en dessous de sa tangente au point d'abscisse  $x = 0$



5) a)  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a

$$f(x) = \frac{4}{1+e^x} = 4x \cdot \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{e^{-x}}$$

$$= 4x \cdot \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}}$$

ceci  $\boxed{f(x) = 4x \cdot \frac{e^{-x}}{e^x+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

b) la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Partie 2:

6) a) la fonction  $g$  est continue sur  $]0; 4[$ .  
 La fonction  $g$  est dérivable sur  $]0; 4[$

$$\text{et } g'(y) = -\frac{4}{y^2} \times \frac{1}{\frac{y}{y}-1}$$

$$= -\frac{4}{y^2} \left( \frac{1}{\frac{y-y}{y}} \right)$$

$$= -\frac{4}{y^2} \left( \frac{y}{y-y} \right) = -\frac{4}{y(4-y)} < 0$$

ceci la fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $]0; 4[$

Cela assure que  $g$  réalise une bijection  
 de  $g(\mathbb{R}) = \left( \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{y}{y} - 1 \right| ; \lim_{y \rightarrow 4^-} \ln \left| \frac{y}{y} - 1 \right| \right)$

$$g(]0; 4[) = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left| \frac{y}{y} - 1 \right| ; \lim_{x \rightarrow y} \ln \left| \frac{y}{y} - 1 \right| \right[$$

$$= ]-\infty ; +\infty[$$

ainsi  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $]0; 4[$

b) i) on  $\forall y \in ]0; 4[$ .

$$f(g(y)) = \frac{4}{1 + e^{\ln(\frac{4}{y}-1)}} = \frac{4}{1 + \frac{4}{y} - 1}$$

$$= \frac{4}{\frac{4}{y}} = 4 \times \frac{y}{4} = y$$

car  $f(g(y)) = y \quad \forall y \in ]0; 4[$

ii) ~~La fonction  $g$  est un point fixe~~ de la fonction  $f$ . La fonction  $g$  une solution de l'équation  $f(g(y)) = y$  elle est l'unique solution dans cet intervalle.  $(]0; 4[)$  pour  $f$ .

c) la fonction  $f$  réalise une bijection sur  $]0; 4[$  de  $\mathbb{R}$  dans  $]0; 4[$ .

donc  $f(x)$  admet une <sup>unique</sup> solution telle que  $0 \leq x \leq 4$

car  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$

car  $f(0) \geq f(x) \geq f(4)$

à  $2 \geq f(x) \geq \frac{4}{1+e^4} \geq 0,05$

car  $0,05 \leq f(x) \leq 2$

7)  $\int_{0,05}^2 f(x) dx =$

Numéro d'inscription

503577



Né(e) le

02 / 09 / 2003

Signature

Nom

R A H M A N

Prénom(s)

E t t a y i B

19.15 / 20

Ecricome

Épreuve : .....

Sujet

☐

1

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐

06

/

☐

Numéro de table

☐

00

2

a) Pour avoir oma

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{4}{1+e^x} dx = \left[ 4 \ln(e^x + 1) \right]_1^2$$

$$= 4 \ln(e^2 + 1) - 4 \ln(e + 1) = 4 \ln\left(\frac{e^2 + 1}{e + 1}\right)$$

Partie 3:

8) a) La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $\forall d > 0$   
 $\int_0^d |f(t)| dt$  existe.

$$\text{et } \int_0^d |f(t)| dt = \int_0^d \frac{4}{1+e^t} dt = \left[ 4 \ln(1+e^t) \right]_0^d$$

$$= 4 \ln(1+e^d) - 4 \ln(2)$$

$$\int_0^d |f(t)| dt = \int_0^d \frac{4e^{-t}}{1+e^{-t}} dt = 4 \int_0^d \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} dt$$

par linéarité  
de l'intégrale.

$$= 4 \left[ \ln(e^{-x} + 1) \right]_0^d = -4 \ln(e^{-d} + 1) + 4 \ln(2)$$

or,  $\lim_{d \rightarrow +\infty} e^{-d} + 1 = 1$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = 0$  donc par composition,  
 $\lim_{d \rightarrow +\infty} -4 \ln(e^{-d} + 1) = 0.$

càd  $\int_0^d f(t) dt$  converge et vaut  $4 \ln(2)$

b) • La fonction  $g$  et  $h$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

•  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a  $d h(x) \geq 0$

• La fonction  $h$  est continue sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

(continuité)  
~~composée~~ : Si  $x < 0$  : alors  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} d h(x) = 0$

• Si  $x \geq 0$  alors  $d h(x) = d f(x)$ .

or,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$  càd  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} d f(x) = 2d$ .

Ainsi,  $h$  admet une limite finie à droite et à gauche en 0.

Finalement  $h$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

Convergence: Si  $x < 0$  : alors  $\int_{-\sigma}^0 f(x) dx$  converge et vaut 0.

Si  $x \geq 0$  : alors  $\forall \beta > 0$  on a

$$\int_0^\beta f(x) dx = \int_0^\beta d f(x) = -\gamma d \ln(e^{-d} + 1) + \gamma d \ln(d)$$

ainsi, avec  $d = \frac{1}{\gamma \ln(\beta)}$  on a

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^\beta f(x) dx = 1.$$

cela assurerait que  $\int_0^{+\infty} h(x) dx$  converge et que  $\int_0^{+\infty} h(x) dx = 1$ .

Ainsi,  $\int_{-\sigma}^{+\sigma} h(x) dx$  converge et d'après (Charles),

$$\text{on a } \int_{-\sigma}^{+\sigma} f(x) dx = \int_{-\sigma}^0 h(x) dx + \int_0^{+\sigma} h(x) dx = 1.$$

si et seulement si  $d = \frac{1}{\gamma \ln(2)}$

Ainsi  $d h$  est une densité avec  $d = \frac{1}{\gamma \ln(2)}$

c) d'après le cours la fonction de répartition de  $F(x)$  vaut :

$$F: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

d)  $\text{oma } 0 \leq x < 1$   
 $\text{ca'u } 0 \leq$

e)  $\forall x \in \mathbb{R}^+$   $\text{oma}$   
 ~~$P(X \leq x) = P\left(-\ln(e^{(1-U)\ln(2)}) - 1\right) \leq x\right)$   
 $= P\left(- (1-U)\ln(2) - 1 \leq x\right)$~~

$=$   
 $P(X \leq x) = P\left(-\ln(e^{(1-U)\ln(2)}) - 1\right) \leq x$

$\Leftarrow$  Or,  $\text{oma}$

$0 \leq 1 - \frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} < 1$

$\text{ca'u } -1 \leq -\frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} < 0$

$\text{eq'a } 1 \geq \frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} > 0$

$\text{ca'd } \ln(2) \geq \ln(1+e^{-x}) > 0$

$\text{ca'u } (1-U)\ln(2) \geq \ln(1+e^{-x}) \quad \text{car } U \in ]0;1[$   
 $\text{donc } 1-U > 0.$

$\text{ca'u } P(X \leq x)$

$P(X \leq x) = P\left(\ln(1+e^{-x}) \leq (1-U)\ln(2)\right)$   
 $= P\left(\ln(1+e^{-x}) \leq \ln(2) - U\ln(2)\right)$   
 $= P\left(U\ln(2) \leq \ln(2) - \ln(1+e^{-x})\right)$   
 $= P\left(U \leq 1 - \frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)}\right)$   
 $= F\left(1 - \frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)}\right)$

Numéro d'inscription

503577

Né(e) le

02/09/2003

Signature

fge

Nom

RATHMANI

Prénom(s)

ETATAYIN

19.15 / 20



Épreuve : .....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

07 /

Numéro de table

$$* \text{ ca'd } P(X \leq x) = 1 - \frac{\ln(1+e^x)}{\ln(2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

d'après la  
fonction de  
répartition de  
U.

f) On a  $G(x) = P(X \leq x)$

$$= P(-\ln(e^{(1-u)\ln(2)} - 1) \leq x)$$

$$= P(\ln(e^{(1-u)\ln(2)} - 1) \geq -x)$$

$$= P(e^{(1-u)\ln(2)} - 1 \geq e^{-x})$$

$$= P(e^{(1-u)\ln(2)} \geq e^{-x} + 1)$$

$$= P(e^{(1-u)\ln(2)} \geq e^{-x} + 1)$$

$$= P(e^{1-u} \geq e^{-x} + 1 - e^{\ln(2)})$$

$$= P(1-u \geq \ln(e^{-x} + 1 - e^{\ln(2)}))$$

$$= P(-u \geq \ln(e^{-x} + 1 - e^{\ln(2)}) - 1)$$

$$= P(u \leq -\ln(e^{-x} + 1 - e^{\ln(2)}) + 1)$$

$$= F(-\ln(e^{-x} + 1 - e^{\ln(2)}) + 1)$$

(Voir page 10 sup)

On a aussi

avec G comme fonction de répartition de X.

$$G(x) = P(X \leq x) = 1 - \frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)}$$

$$\text{ca'd } G(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice n°3:

1) Définition:  $\forall m \in \mathbb{N}^*$  :  $H_m$  "  $a_m + b_m + c_m = 1$  "

Initialisation:

$$m=1 \text{ on a } a_1 + b_1 + c_1 = \frac{3}{8} + 0 + \frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1.$$

donc  $H_1$  est vraie.

Hérédité: Soit  $m \geq 1$  un entier fixé, on suppose que  $H_m$  est vraie et on veut prouver que  $H_{m+1}$  est vraie c'est-à-dire  $a_{m+1} + b_{m+1} + c_{m+1} = 1$ .

$$\text{or, } a_{m+1} = \frac{2}{11} a_m + \frac{3}{11} b_m + \frac{3}{11} c_m$$

$$\text{et } b_{m+1} = \frac{4}{11} a_m + \frac{3}{11} b_m + \frac{4}{11} c_m$$

$$\text{et } c_{m+1} = \frac{5}{11} a_m + \frac{5}{11} b_m + \frac{4}{11} c_m.$$

donc

$$a_{m+1} + b_{m+1} + c_{m+1} = \frac{2}{11} a_m + \frac{4}{11} a_m + \frac{5}{11} a_m + \frac{3}{11} b_m + \frac{3}{11} b_m + \frac{5}{11} b_m + \frac{3}{11} c_m + \frac{4}{11} c_m + \frac{4}{11} c_m = 1.$$

donc  $H_{m+1}$  est vraie.

Combes. on a prouvé que  $H_{a_1}$  est vraie  
 et que  $H_m$  est héréditaire  $\forall m \in \mathbb{N}^*$  donc  
 $H_m$  est vraie  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ .

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \text{ on a } a_m + b_m + c_m = 1$$

2) On a  $\forall m \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= a_{m+1} + b_{m+1} + c_{m+1} \\ &= 1 \end{aligned} \quad \text{de ce qui précède.}$$

et  $x_m = 1$

donc la suite  $(x_m)$  est constante

3) a)  $\forall m \in \mathbb{N}^*$  on a

$$y_{m+1} = -a_{m+1} + 2b_{m+1} - c_{m+1}$$

$$\begin{aligned} &= - \left( \frac{2}{11} a_m + \frac{3}{11} b_m + \frac{3}{11} c_m \right) + 2 \left( \frac{4}{11} a_m + \frac{3}{11} b_m + \frac{4}{11} c_m \right) \\ &- \left( \frac{5}{11} a_m + \frac{5}{11} b_m + \frac{4}{11} c_m \right) \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{-2+8-5}{11} a_m \quad \frac{-3+8-5}{11} b_m + \frac{3-3-4}{11} c_m \right.$$

$$= \frac{1}{11} a_m - \frac{2}{11} b_m + \frac{1}{11} c_m$$

$$= -\frac{1}{11} (-a_m + 2b_m - c_m)$$

car il  $y_{m+1} = -\frac{1}{11} y_m \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$

donc  $(y_m)$  est géométrique de raison  $q = -\frac{1}{11}$

On a alors

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad y_m = y_1 \left(-\frac{1}{11}\right)^m = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{11}\right)^m$$

$$\text{or, } y_{11} = -a_{11} + 2b_{11} - c_{11}$$

$$= -\frac{3}{8} - \frac{5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

4) a)  $\forall m \in \mathbb{N}^*$  on a

$$y_{m+1} = -5q_{m+1} - 5b_{m+1} + 7c_{m+1}$$

$$= -5(a_{m+1} + b_{m+1}) + 7c_{m+1}$$

$$= -5\left(\frac{6}{11}q_m + \left(\frac{6}{11}b_m + \frac{7}{11}c_m\right)\right) + \frac{35}{11}q_m + \frac{35}{11}b_m + \frac{20}{11}c_m$$

$$= \frac{-30}{11}a_m - \frac{30}{11}b_m - \frac{35}{11}c_m + \frac{35}{11}a_m + \frac{35}{11}b_m + \frac{20}{11}c_m$$

$$= \frac{5}{11}a_m + \frac{5}{11}b_m - \frac{7}{11}c_m$$

$$= -\frac{1}{11} \left(-5q_m - 5b_m + 7c_m\right) = -\frac{1}{11}y_m$$

on a ainsi,  $(y_m)$  est géométrique de raison  $q = -\frac{1}{11}$

On a alors

$\forall m \in \mathbb{N}^*$

$$y_m = y_1 \left(-\frac{1}{11}\right)^m = \frac{20}{8} \left(-\frac{1}{11}\right)^m = \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{11}\right)^m$$

5) a)  $\forall m \in \mathbb{N}^*$  on a

$$\frac{1}{3}(x_m + y_m) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{11}\right)^m\right)$$

Numéro d'inscription

5 0 3 5 7 7

Né(e) le

0 2 / 0 9 / 2 0 0 3

Signature

Nom

R A H M A N I

Prénom(s)

E t t A y i o

19.15 / 20



Épreuve : .....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 9 /

Numéro de table

0 0 2

15) a)  $\{X+Y=15\}$  on veut que  $X$  et  $Y$  attrapent  
une totale 15 poisson

$$\text{donc } [X+Y=15] = \bigcup_{k=0}^{15} ([X=k] \cap [Y=15-k])$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } P(X+Y=15) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{15} (X=k \cap Y=15-k)\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{15} P(X=k \text{ et } Y=15-k) \quad \text{par incompatibilité} \\
 &= \sum_{k=0}^{15} P(X=k) P(Y=15-k) \quad \text{par indépendance} \\
 &= \sum_{k=0}^{15} P \frac{1^{15-k}}{k!} e^{-1} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } P(X+Y=15) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{15} [X=k] \cap [Y=15-k]\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{15} P(X=k \text{ et } Y=15-k) \quad \text{par incompatibilité des événements.} \\
 &= \sum_{k=0}^{15} P(X=k) P(Y=15-k) \quad \text{par indépendance} \\
 &= \sum_{k=0}^{15} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \times \frac{\mu^{15-k}}{(15-k)!} e^{-\mu} \\
 &= \sum_{k=0}^{15} \frac{\lambda^k \times \mu^{15-k}}{k! (15-k)!} e^{-\lambda-\mu} \\
 &= \sum_{k=0}^{15} \frac{15!}{15!} \times \frac{\lambda^k \times \mu^{15-k}}{k! (15-k)!} \times e^{-\lambda-\mu} \\
 &= \frac{1}{15!} \times \sum_{k=0}^{15} \frac{15!}{k! (15-k)!} \lambda^k \times \mu^{15-k} \times e^{-\lambda-\mu} \\
 &= \frac{1}{15!} \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \lambda^k \times \mu^{15-k} \times e^{-\lambda-\mu} \quad \text{car } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 \text{car } P(X+Y=15) &= \frac{1}{15!} \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \lambda^k \mu^{15-k} e^{-\lambda-\mu}
 \end{aligned}$$

c) ~~Donc~~  $P(X+Y=15) = \frac{1}{15!} \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \lambda^k \mu^{15-k} e^{-\lambda-\mu}$

orma  $P(X+Y=15) = \frac{1}{e^{-\lambda-\mu}} \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \lambda^k \mu^{15-k} \frac{1}{15!}$   
 $= \frac{e}{15!} \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \lambda^k \mu^{15-k}$   
 $= \frac{e^{-\lambda-\mu}}{15!} \times (\lambda + \mu)^{15}$  car  $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k} = (a+b)^m$   
 d'après la formule du binôme de Newton.

cad  $P(X+Y=15) = \frac{e^{-\lambda-\mu}}{15!} (\lambda + \mu)^{15}$

d)  $\forall k \in \{0; 15\}$  orma  
 $P(X=k) = \frac{P(X=k \text{ et } X+Y=15)}{P(X+Y=15)} = \frac{P(X+Y=k+15)}{P(X+Y=15)}$

$= \frac{P(X=k) P(X+Y=15)}{P(X+Y=15)}$

$= \frac{P(X=k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \times \frac{e^{-\lambda-\mu}}{15!} (\lambda + \mu)^{15}}{P(X+Y=15)}$

cad  $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{15k!} e^{-\lambda-\mu} (\lambda + \mu)^{15} \quad \forall k \in \{0; 15\}$

e)



Numéro d'inscription

502577

Né(e) le

02 / 09 / 2003

Signature



Nom

RAHMANI

Prénom(s)

Ettagyid

19.15 / 20



Épreuve : .....

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

018 /

Numéro de table

002

5)0)

Oma

 $b_m$ 

$$\frac{1}{3}(x_m + y_m) = \frac{1}{3}(1 - a_m + 2b_m - c_m)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}a_m + \frac{2}{3}b_m - \frac{1}{3}c_m$$

$$b_m = \frac{1}{3}x_m - \frac{1}{3}a_m - \frac{1}{3}c_m$$

Oma  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ 

$$\frac{1}{3}(x_m + y_m) = \frac{1}{3}x_m + \frac{1}{3}y_m$$

$$= \frac{1}{3}a_m + \frac{1}{3}b_m + \frac{1}{3}c_m + \frac{1}{3}(-a_m + 2b_m - c_m)$$

$$= \frac{1}{3}a_m + \frac{1}{3}b_m + \frac{1}{3}c_m - \frac{1}{3}a_m + \frac{2}{3}b_m - \frac{1}{3}c_m$$

$$= b_m$$

càd

$$\frac{1}{3}(x_m + y_m) = b_m \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{et, } \frac{1}{12}(5x_m + 3y_m) = \frac{1}{12}(5a_m + 5b_m + 5c_m - 5a_m - 5b_m + 7c_m)$$

$$= \frac{1}{12}(12c_m) = c_m \quad \text{càd } \frac{1}{12}(5x_m + 3y_m) = c_m$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*$$

(Suite page 10)

Partie 2: Soit  $\Omega$  un univers  $\Omega$  de cette expérience.

7) on a  $g_1 = P(G_1) = \frac{3}{8}$  car il y a trois  
 rayons pour un total  
 de 8 poissons.  
 $P_1 = P(P_1) = 0$   
 car 2 perches prennent pour.

et  $t_1 = P(T_1) = \frac{5}{8}$  car il y a cinq truites  
 sur 8 poissons.

8) a) on a  $P(G_2) = \frac{2}{11} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{11}$   
 $P(G_2) = \frac{3}{11}$

b) on veut  $P(G_2)$ .

Or,  $P(G_2) = P_{G_1} P(G_2) + P_{T_1} P(G_2) + P_{P_1} P(G_2)$

$= \frac{3}{11} + \frac{2}{11} = \frac{5}{11}$

car  $P(G_2) = \frac{5}{11}$

d) on veut  $P(T_1 | G_2)$

$$\begin{aligned} \text{or } P(T_1 | G_2) &= \frac{P(T_1 \text{ et } G_2)}{P(G_2)} \\ &= \frac{P(T_1) P(G_2)}{P(G_2)} = \frac{\frac{5}{8} \times \frac{3}{11}}{\frac{5}{11}} \\ &= \frac{\frac{15}{88}}{\frac{5}{11}} = \frac{15}{88} \times \frac{11}{5} \\ \text{càd } P(T_1 | G_2) &= \frac{3}{11} \end{aligned}$$

10) ~~Une suite d'événements  $G_n, P_n$  et  $T_n$  forment un système complet d'événements~~

~~$P(G_{n+1}) = P(T)$~~

a)  $P(G_{n+1} | G_n) = \frac{2}{11}$  et  $P(G_{n+1} | P_n) = \frac{3}{11} = P(G_{n+1} | T_n)$

b) les événements  $G_n, P_n$  et  $T_n$  forment un système complet d'événements donc d'après la formule de probabilités totale on a

$$P(G_{n+1}) = P(G_n) P(G_{n+1} | G_n) + P(P_n) P(G_{n+1} | P_n) + P(T_n) P(G_{n+1} | T_n)$$

~~car~~  $\frac{1}{11} = \frac{2}{11} G_n + \frac{3}{11} P_n + \frac{3}{11} T_n$

$$P(T_{n+1}) = P(T_n) P(T_{n+1} | T_n) + P(G_n) P(T_{n+1} | G_n) + P(P_n) P(T_{n+1} | P_n)$$

$$c) \text{ orma } P(U=0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

6 Partie 3:

13) a) La variable  $U$  compte le nombre de succès "le pêcheur attrape un poisson" lors d'une succession de ~~20~~ ~~30~~ ~~20~~ épreuves de Bernoulli tous identiques et indépendantes donc  $U$  suit la loi binomiale de paramètres  $p = \frac{1}{4}$  et  $n = 20$

b)  $U$  ~~com~~ compte le nombre de succès "le pêcheur attrape un poisson" lors d'une succession de 60 épreuves de Bernoulli tous identiques et indépendantes.

donc  $U$  suit la loi binomiale de paramètre  $p = \frac{1}{4}$  et  $n = 60$

14) a)  $X(\omega) = 1N$   $P(X=\frac{m}{N}) = \frac{1^{\frac{m}{N}} e^{-\lambda}}{m!}$

et  $E(X) = \lambda$  et  $V(X) = \lambda$

b) avec  $\lambda = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Numéro d'inscription

503577

Né(e) le

02 / 03 / 2003

Signature



Nom

RATHANI

Prénom(s)

Ettyib

19.15 / 20



Épreuve : .....

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

10

/

Numéro de table

002

(f) Partie 3 exercice n°2: on note  $G$  la fonction de répartition de  $X$ .  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned}
 G(x) = P(X \leq x) &= P(\ln|1+e^x| \leq (1-u)\ln|2|) \\
 &= P(\ln|1+e^x| \leq \ln|2| - \ln|2|u) \\
 &= P(\ln|2|0 \leq \ln|2| - \ln|1+e^x|) \\
 &= P\left(u \leq 1 - \frac{\ln|1+e^x|}{\ln|2|}\right) \\
 &= F\left(1 - \frac{\ln|1+e^x|}{\ln|2|}\right)
 \end{aligned}$$

Si on a donc

 $G(x) =$ 

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{\ln|1+e^x|}{\ln|2|} & \text{si } x \in [0;1[ \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

f

La fonction  $G$  est dérivable sur  $[0;1]$ et  $\forall x \in [0;1]$  on a

$$G'(x) = - \left( \frac{-e^x}{1+e^x} \left| \frac{1}{1+e^x} \right| \ln|2| \right)$$

$$= \frac{e^{-x} \ln|2|}{(1+e^{-x}) \ln|2|^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4e^{-x}}{(1+e^x)} \times \frac{1}{4\ln|2|} \quad (\text{et } 5^a) \\
 &= d \int_0^x h(x) \text{ d'après b)}
 \end{aligned}$$

Ainsi:  $X$  est une variable aléatoire à densité  $dh$

$$g) \quad X = 1 - m_p \cdot \log(1 + m_p \cdot \exp(-s)) / (m_p \cdot \log(2))$$

h) il s'agit de la loi faite de grands nombres car on fait tendre  $n$  vers  $10000$  soit une quantité importante et on voit qu'elle tend à converger vers 0.

### Exercice n°3 Partie 1

$$5b) \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \text{ on a } a_m = 1 - c_m - b_m$$

$$c_{m+s} = ?$$

$$= 1 - \left( \frac{1}{12} (5x_m + y_m) \right) - \frac{1}{3} (x_m + y_m)$$

$$= 1 - \frac{5}{12} x_m - \frac{1}{12} y_m - \frac{1}{3} x_m - \frac{1}{3} y_m$$

$$\text{car } a_m = 1 - \frac{9}{12} x_m - \frac{1}{12} y_m - \frac{1}{3} y_m \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$c) \text{ on a alors } \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$b_m = (x_m + y_m) \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{11} \right)^m$$

$$\text{car } b_m = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \left( -\frac{1}{11} \right)^m \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{et } c_m = \frac{1}{12} (5x_m + y_m)$$

$$= \frac{1}{12} \left( 5 + \frac{5}{2} \left( -\frac{1}{11} \right)^m \right)$$

$$\text{ad } c_m = \frac{5}{12} + \frac{5}{24} \left( -\frac{1}{11} \right)^m \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{et } a_m = 1 - \frac{3}{12} x_m - \frac{1}{12} y_m - \frac{1}{3} y_m.$$

$$= 1 - \frac{3}{12} - \frac{5}{24} \left( -\frac{1}{11} \right)^m - \frac{1}{12} \left( -\frac{1}{11} \right)^m$$

$$\text{ad } a_m = \frac{3}{12} - \frac{7}{24} \left( -\frac{1}{11} \right)^m \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$6) \text{ or } \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{11} \right)^m = 0 \quad \text{car } -\frac{1}{11} \in ]-1; 1[.$$

$$\text{d'où } \sum_{m=0}^{\infty} \frac{7}{24} \left( -\frac{1}{11} \right)^m = 0$$

$$\text{ainsi, } \sum_{m=0}^{\infty} a_m = \frac{3}{12} \quad \text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{3}$$

$$\text{et } \sum_{m=0}^{\infty} c_m = \frac{5}{12}$$

