5

QUESTIONS COURTES

Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = {}^tA$.
Quand la matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
Montrer que A est une matrice orthogonale.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Soit g une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On suppose que $Xg(X)$ et $g'(X)$ admettent une espérance.

a) Montrer que $E(g'(X)) = E(Xg(X))$.

b) En déduire la valeur des moments de X.

Soit f une fonction T-périodique, avec $T > 0$, dérivable sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f s'annule en p points distincts de $[0, T[$. Montrer que f' s'annule en au moins p points de $[0, T[$ distincts de ceux de f.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - k)$.

a) Montrer qu'il existe un unique réel $r_n \in]0, 1[$ tel que $P_n'(r_n) = 0$.

b) Montrer que $\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x-k}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} r_n$.

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi géométrique de paramètre p.
Déterminer la probabilité de l'événement $3X = 2Y$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$; pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $P(X = k) = p_k$.
On suppose que X vérifie la propriété suivante :

$$\exists\, a \in \mathbb{R}_-, \exists\, b \in \mathbb{R}_+^* \text{ tels que } \forall\, k \in \mathbb{N}^*, p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

La variable aléatoire X peut-elle suivre :

a) une loi exponentielle ? b) une loi de Poisson ? c) une loi binomiale ? d) une loi géométrique ?

On considère un certain jeu de casino et on note X la variable aléatoire égale au gain du casino à chaque partie jouée. Un joueur joue une partie et il note X_0 la variable aléatoire égale à la somme qu'il perd.

Pour mesurer sa malchance, celui-ci observe les pertes $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ des joueurs suivants, en supposant que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.
Il s'intéresse alors à l'indice du premier joueur qui perd plus que lui, autrement dit à la variable aléatoire N du plus petit indice n tel que $X_n > X_0$ soit réalisé.

a) Justifier que $P(N > n-1) = \dfrac{1}{n}$.

b) Le joueur a-t-il raison de penser qu'il est vraiment malchanceux ?

Soit λ, μ deux réels fixés avec $\lambda \neq 0$ et P_0 un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit une suite $(P_n)_n$ de polynômes par son premier terme P_0 et la relation : pour tout $n \geqslant 0$, $P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P_n'$.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0, P_n \in \mathbb{R}_2[X]$

b) Soit n fixé, et $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Existe-t-il $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_n = Q$?

Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AMB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.