5

QUESTIONS COURTES

1. Extremums de la fonction $f : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{1-x-y}$, (x, y) décrivant $[0, 1]^2$.

(On rappelle que la moyenne géométrique de trois nombres positifs est toujours inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique).

2. Soit P une fonction polynomiale. Montrer que l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions réelles.

3. Trouver toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. a) Soit $u \geqslant 1$. Comparer $\ln u$ et $u - 1$.

b) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x > 0, f(x) > 1$. Montrer que pour tout $x > 0$

$$[f'(x) \geqslant \frac{1}{\ln(f(x))}] \implies [f(x) \geqslant 1 + \sqrt{2x}]$$

5. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$. On définit la fonction F sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en posant :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{xf(t)}{x+t} dt$$

Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$ et que

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^1 f(t) dt$$

6. Soit X une variable aléatoire de densité $x \mapsto \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{1+x} \times \mathbf{1}_{[0,1]}$.

Montrer que $Y = \frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor$ suit la même loi que X.

7. Soit E un espace euclidien de dimension n, avec $n \geqslant 2$. On suppose qu'il existe $n+1$ vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ tels que pour $i \neq j$: $\langle e_i, e_j \rangle < 0$.

a) Montrer, en utilisant la norme de u, que si $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0$

b) Montrer que n quelconques de ces vecteurs forment une base de E.

8. On casse un bâton de longueur 1. Le point de rupture suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
Calculer la probabilité que le grand morceau soit au moins 3 fois plus grand que le petit morceau.

9. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que 2 événements A et B soient indépendants est que

$$P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B) \times P(A \cap \overline{B})$$

10. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont toutes les racines sont réelles. Montrer que pour tout x réel : $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$.

Réciproquement si pour tout réel x, $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$, P a-t-il toutes ses racines réelles ?