5

QUESTIONS COURTES

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et T définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$T(M) = M - \mathrm{tr}(M)A$$

où $\mathrm{tr}(M)$ est la somme des éléments diagonaux de M.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(A)$ pour que T soit bijective.

c) Caractériser T lorsque T n'est pas bijective.

2. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient : $A^t AA^t AA = I$.

3. Soit $n \geqslant 2$, E un espace euclidien de dimension n. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$, n vecteurs unitaires de E tels que pour tout $i \neq j$, $\|e_i - e_j\| = 1$.
Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

4. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi et admettant une espérance.
Montrer que $E\left(\dfrac{X}{X+Y}\right) = \dfrac{E(X)}{E(X+Y)}$.

5. Soit un réel $a > 0$. Pour tout entier $n > a$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi géométrique de paramètre a/n.
Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires définies par

$$Y_n = \frac{X_n}{n}.$$

6. Une urne contient $4n+2$ boules numérotées de 1 à $4n+2$. On tire $2n+1$ boules sans remise, quelle est la probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à la somme des numéros des boules restantes ?

7. On retourne une à une les cartes d'un jeu ordinaire (32 cartes) bien battu. Quel est le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour voir le premier as ?

8. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \mathrm{e}^{\frac{k}{2n}}$$

9. Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$ Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) = \mathrm{e}^{-a}$.

10. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et f un endomorphisme de E. Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker} f$ lorsque $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

11. Soit P un polynôme réel de degré n, admettant n racines relles distinctes.

a) Combien P' admet-il de racines relles ?

b) Comparer la moyenne arithmétique des racines de P à la moyenne arithmétique des racines de P'.