5

QUESTIONS COURTES

1. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. On note f une densité de X. Justifier l'existence et calculer, pour tout z de $\mathbb{R}$:

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leqslant zx) f(x)\, dx$$

Vérifier que G possède les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition.

2. Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables de Bernoulli de paramètres respectifs p_1, p_2 et p_3. On suppose ces variables définies sur le même espace probabilisé et indépendantes. On suppose que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ et on note $S = X_1 + X_2 + X_3$.
Déterminer la valeur maximale de la variance de S et préciser quand elle est atteinte.

3. Soit α un réel non nul, n un entier strictement plus grand que 1 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - \alpha I) = 0$. Montrer que A est diagonalisable.

4. L'équation matricielle $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a-t-elle des solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?
Donner un exemple non trivial d'une matrice nilpotente telle que l'équation matricielle $X^2 = A$ possède des solutions.

5. On considère l'équation $x^2 + px + q = 0$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$. On suppose que cette équation admet une solution complexe non réelle z telle que $|z| \leqslant 1$.

Montrer que $|z| = 1$ et qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z^n = 1$. Quelles sont les valeurs possibles de n ?

6. Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien. Trouver toutes les fonctions f définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (u, v) \in E^2, f(u + v) - f(u - v) = 4\langle u, v \rangle$$

7. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe des réels $k > 0$ et $\alpha > 1$ tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|^\alpha$$

A-t-on le même résultat si on suppose $0 < \alpha < 1$?

8. Soit A une matrice inversible telle que tous les coefficients de A et de A^{-1} sont positifs ou nuls. Montrer que chaque ligne et chaque colonne de A comporte un coefficient non nul et un seul.

9. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X - Y$.

10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \big(1 + \dfrac{1}{n}\big)^{2n} - \big(1 + \dfrac{2}{n}\big)^n$.
Déterminer la nature de la série de terme général u_n.