5

QUESTIONS COURTES

1. Soit (u_n) une suite réelle. Que pensez-vous de l'assertion :
$$u_n \sim \frac{1}{n} \Longleftrightarrow u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n} \ ?$$

2. Etudier la suite (u_n) définie par $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln k}{n^2}\right)$.

3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un unique y_n solution de l'équation :
$$\ln x + x = \frac{1}{n}$$
Étudier la suite (y_n).
En notant ℓ sa limite, donner un équivalent de $y_n - \ell$ lorsque n tend vers l'infini.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on écrit en base 10 le nombre $\sum_{k=1}^{n} k$ et on note u_n son chiffre des unités. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est périodique, 20 étant une période de cette suite.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $v_n = \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+t^3}$.
Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que l'on a : $a_{i,j} = 1$ si $i = j+1$ ou $i = j-1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon)

1. Soit λ un scalaire. Que peut-on dire du rang de $A - \lambda I_n$?
2. Montrer que A admet exactement n valeurs propres réelles.

7. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

8. Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer que $A + I_n$ ou $A - I_n$ est inversible.

9. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et u et v deux endomorphismes de E.
On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est un automorphisme de E. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$.

10. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)\,dx$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Existe-il un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on ait $\langle A, P\rangle = P(0)$?
(On pourra considérer les polynômes $P_n = \sqrt{n}(1 - X)^n$)

11. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}^+$ et une espérance m_1 non nulle. On note F la fonction de répartition de X et on définit la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - F(x)}{m_1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que g est une densité de probabilité.

12. Soit n et m deux entiers naturels non nuls, deux urnes U_1 et U_2 et un stock de $n + m$ boules.
A chaque étape, indépendante des précédentes, on choisit une urne, l'urne U_1 étant choisie avec la probabilité p et l'urne U_2 étant choisie avec la probabilité q et on met une boule dans l'urne choisie.
On s'arrête lorsque l'urne U_1 contient n boules ou lorsque l'urne U_2 contient m boules. On note X le nombre d'étapes ainsi effectuées.
Écrire une fonction en Pascal permettant de simuler la variable aléatoire X.

13. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f continue sur $\mathbb{R}$ et admettant une espérance. On suppose qu'il existe b tel que pour tout x réel $f(b - x) = f(x)$. Quelle est l'espérance de X ?

14. Soit X une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et F sa fonction de répartition. On suppose que :

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

X admet une espérance $E(X)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - F(x) + F(-x)) = 0$.

Montrer que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} [1 - F(x) + F(-x)]\,dx$.

15. Une urne contient n boules rouges et n boules noires. On retire les boules de l'urne deux par deux jusqu'à ce que l'urne soit vide, à chaque rang du tirage toutes les poignées de deux boules possibles étant supposées équiprobables. Quelle est la probabilité que tout au long de l'épreuve on n'obtienne que des paires bicolores ?