QUESTIONS COURTES 2005

Question 1 ESCP 2005 F 1

Soit f continue sur $[0, +\infty[$ telle que $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq f(x) \leq \int_0^x f(t) dt$.

On définit la fonction H par $\forall x \in [0, +\infty[, H(x) = e^{-x} \int_0^x f(t) dt$.

Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, calculer H' . En déduire H puis f .

Question 2 ESCP 2005 F 3

Soit φ une fonction affine. On suppose qu'il existe deux fonctions convexes f et g telles que $\varphi = f + g$.

Montrer que f et g sont affines (on pourra commencer par le cas où f ou g est de classe $\mathcal{C}^2$).

Question 3 ESCP 2005 F 2

Soit n urnes, chacune contenant x boules blanches et y boules noires. On tire une boule de la première urne et on la met dans la deuxième urne ; puis on tire une boule de la deuxième urne et on la met dans la troisième, ... Enfin on tire une boule de la dernière urne.

Quelle est la probabilité que la dernière boule tirée soit blanche ?

Question 4 ESCP 2005 F 1

Une urne contient 14 boules numérotées de 1 à 14. On en tire 7 sans remise. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à la somme des numéros des boules non obtenues ?

Question 5 ESCP 2005 F 1

Soit X une variable aléatoire dont la loi dépend d'un paramètre θ .

Soit T_1, T_2 deux estimateurs indépendants, sans biais de θ , de variances respectives V_1 et V_2 . Pour tout a réel, on pose $\Theta_a = aT_1 + (1-a)T_2$.

Θ_a est-il un estimateur sans biais de θ ?

Déterminer a pour que la variance de Θ_a soit minimale. Quelle est la valeur de cette variance ?

Question 6 ESCP 2005 F 2

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout x réel, $f'(x) \leq 0$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2x$.

Question 7 ESCP 2005 F 2

Soient A et B deux matrices symétriques réelles telles que $A^2 + B^2 = A + B = 2I$. Que peut-on dire de A et B ?

Question 8 ESCP 2005 F 1

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les variables aléatoires indépendantes X et Y , pour que X et XY soient non corrélées

Question 9 ESCP 2005 F 2

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\langle Ax, x \rangle = 0$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$).
Montrer que $\text{Ker } A = (\text{Im } A)^\perp$.

Question 10 ESCP 2005 F 2

Soit $(X_n)_n$ et X des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé.

A-t'on : si la suite (X_n) converge en loi vers X , alors $(X_n - X)$ converge en loi vers 0 ?

Soit X, Y, Z des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé.

A-t'on : $[X, Y \text{ suivent la même loi}] \Rightarrow [XZ, YZ \text{ suivent la même loi}]$?

Question 11 ESCP 2005 F 1 élève

X et Y sont deux variables aléatoires suivant une loi de Poisson de paramètre a . Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On suppose X, Y et Z mutuellement indépendantes.

Montrer que $U = XZ$ et $V = YZ$ ne sont pas indépendantes.

Question 12 ESCP 2005 F 2 élève

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n réels strictement positifs dont la somme vaut 1.

Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$.