$\boxed{\textbf{F 1}}$ Assez simple ou proche du cours.

$\boxed{\textbf{F 2}}$ Demande du travail.

$\boxed{\textbf{F 3}}$ Délicat.

QUESTIONS COURTES 2003

Question 1 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Soient A, B deux matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes et que tout vecteur propre de A est également vecteur propre de B.
Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$.

Question 2 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 4 et une variance non nulle. Minimiser la quantité

$$f(a,b) = E[(X^2 - a - bX)^2]$$

lorsque (a, b) parcourt $\mathbb{R}^2$.

Question 3 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soient H_1, H_2 deux hyperplans de E (sous–espaces vectoriels de dimension $n - 1$). Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$?

Question 4 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de surface totale S, quel est celui (quels sont ceux) de volume maximal ?

Question 5 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit X une variable aléatoire de densité f paire et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que X^2 suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer f.

Question 6 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) réels pour que φ définie sur E^2 par

$$\varphi(X,Y) = {}^tX \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Y$$

soit un produit scalaire sur E.

Question 7 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable aléatoire X. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$?

Question 8 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle. Peut–on avoir M semblable à $2M$? (on pourra commencer par étudier les valeurs propres d'une telle matrice).

Question 9 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Pour allumer un feu, on dispose de N allumettes. La probabilité d'allumer le feu avec une allumette donnée est $p \in]0,1[$. Vous finissez par allumer le feu.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restantes. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Question 10 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Existe–t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?

Existe–t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles ?
