5

QUESTIONS COURTES

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle et vérifiant pour tous x, y réels

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n}$$

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. On appelle point fixe de f, tout réel x tel que $f(x) = x$.

1. Montrer que f admet un point fixe si et seulement si $f \circ f$ admet un point fixe.

2. Montrer que le nombre de points fixes de f est inférieur ou égal à celui de $f \circ f$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, n[$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
On note Y la partie entière de X et on pose $Z = X - Y$.
Déterminer la loi de Y puis celle de Z.

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles à densité, indépendantes et de même loi.
On note F la fonction de répartition de X_1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \min(X_1, ..., X_n)$.
On suppose que les X_n possèdent une densité f nulle sur $]-\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$ et telle que $f(0) > 0$. Montrer que la suite $(nM_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi.

On lance n fois $(n \geqslant 2)$ une pièce équilibrée et on considère les événements suivants :
$A =$ « on obtient au plus une fois Pile »
$B =$ « les résultats des différents lancers ne sont pas tous identiques »

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit U, V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Soit a un réel non nul et I_n la matrice identité d'ordre n. On pose

$$M = aI_n + U\,{}^tV.$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.

2. La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

On note $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On rappelle que $E_{i,j}$ est la matrice ne contenant que des 0 sauf à l'intersection de la ligne i et de la colonne j où se trouve un 1.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Calculer $(E_{i,i}+E_{i,j})^2$.
En déduire une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices de projecteurs.

On note E l'espace vectoriel des applications $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, bornées, de classe C^1, telles que $f(0)=0$.
On note $\langle\ ,\ \rangle$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$, définie par

$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,dx$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Soit $n \geqslant 2$ et f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f\circ g = g\circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

1. Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g.

2. En déduire que g est diagonalisable.