5

QUESTIONS SANS PRÉPARATION

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On définit les deux variables D_1 et D_2 par :

$$D_1 = \lfloor 10X \rfloor \qquad \text{et} \qquad D_2 = \lfloor 10^2 X - 10 D_1 \rfloor$$

(on rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel x.)

a) Que représentent les variables D_1 et D_2 ?

b) Déterminer les lois des variables D_1 et D_2.

c) D_1 et D_2 sont-elles indépendantes ?

---

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1$ est strictement croissante.

2. En déduire que si P est un polynôme réel tel que : $P(X^2+1) = [P(X)]^2 + 1$ et $P(0) = 0$, alors $P = X$.

Soit n un entier tel que $n \geqslant 1$ et p un nombre réel tel que $p \in \,]0,1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé et telles que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et Y est à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$.

Que pensez-vous de l'équivalence suivante ?

$$Y \text{ suit la loi } \mathcal{B}(n,p) \text{ si et seulement si } X+Y \text{ suit la loi } \mathcal{B}(2n,p)$$

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit t un réel strictement positif. Montrer que la variable aléatoire $\exp(tX)$ admet une espérance et la calculer.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, prouver que : $P(X \geqslant n) \leqslant \mathrm{e}^{-tn} E(\exp(tX))$.

3. En déduire que : $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^n \Big(\dfrac{\lambda}{n}\Big)^n$.
