5

QUESTIONS COURTES

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, Id l'endomorphisme identité, a et b deux réels distincts et f un endomorphisme de E tel que

$$\big(f - aId\big)^2 \circ \big(f - bId\big) \neq 0 \text{ et} \big(f - aId\big)^3 \circ \big(f - bId\big) = 0$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont la variance σ^2 existe et est non nulle. On suppose que X est symétrique, c'est-à-dire que X et $-X$ ont même loi de probabilité.

1. Calculer l'espérance de X.

2. On définit les variables U, V, et Y par les conditions

$$U(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \geq 0 \\ 0 & \text{si } X(\omega) < 0 \end{cases} \quad V(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } X(\omega) > 0 \end{cases} \quad \text{et } Y = U - V.$$

a) Montrer que la variable Y est symétrique.

b) On suppose que $P(X = 0) = 0$ et on note $|X|$ la valeur absolue de X. Montrer que les variables Y et $|X|$ sont indépendantes.

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires indépendantes de même loi avec $E(X_1) = \mu$ et $V(X_1) = \sigma^2$. On dispose de deux estimateurs de μ :

$$T_1(X_1, \ldots, X_n) = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \text{et} \quad T_2(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{X_1 - X_2}{2}.$$

Quel est le meilleur de ces deux estimateurs ?

Soit $a \in \,] -1, 1[$.

1. Pour tout $x > 0$, montrer l'existence de : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n}$.

2. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xS(x) = \frac{1}{1-a}$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$.

1. Montrer que $AX = 0$ si et seulement si ${}^tAAX = 0$.

2. En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.

Vous rentrez en voiture, et cherchez une place de parking en faisant le tour du quartier ; au n-ième tour, vous avez une probabilité de $\dfrac{n}{n+1}$ de trouver une place. On note X la variable aléatoire égale au(x) nombre(s) de tours nécessaires pour se garer.
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X > n)$. En déduire le nombre moyen de tours nécessaires pour vous garer.

Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels vérifiant

$$(X+3)P(X) = XP(X+1).$$

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A{}^tA$.
On suppose que A est nilpotente, *i.e.* qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$
Montrer que $A = 0$.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et que $P(Y = 1) = p, P(Y = -1) = 1 - p$, où $p \in \,]0, 1[$.

1. On pose $Z = XY$. Déterminer la loi de Z.

2. On suppose que $p \neq \dfrac{1}{2}$. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n^2}$, n^2 matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que la famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si la matrice $G \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ de terme général $(\mathrm{tr}(A_iA_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n^2}$ est inversible.
