

SUJET Maths Approfondies 1

Exercice principal Maths Approfondies 1

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. Dans toute la suite M désigne un entier naturel et Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \min(Y, M).$$

1. Question de cours : rappeler la loi géométrique ainsi que l'espérance et la variance associées.
2. Déterminer la loi de Z ? On considère désormais les polynômes $(T_n)_{n \geq 0}$ définis par la relation de récurrence :

$$T_0(X) = 1, T_1(X) = X \text{ et } T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

3. Montrer que pour tout $n \geq 0$, T_n est de degré égal à n et déterminer son coefficient dominant.
On note dans la suite $a_{n,k}$, $0 \leq k \leq n$, les coefficients du polynôme T_n . Ainsi :

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} X^k.$$

On convient désormais que $a_{n,k} = 0$ pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $n < k$.

4. Ecrire une fonction **Python** ayant comme paramètres d'entrée un entier n et un réel x et qui renvoie $T_n(x)$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
6. Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x) q^n$ converge. Puis établir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x) q^n = \frac{1 - qx}{q^2 - 2qx + 1}$$

7. Soit $x \in [-1, 1]$. On pose

$$H_M(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(a_{Z,k}) x^k.$$

Montrer que $H_M(x)$ est bien défini et que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} H_M(x) = p \frac{1 - qx}{q^2 - 2qx + 1}.$$

Solution :

1. p23 ECappro1
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k > M$, on a

$$\mathbb{P}(Z = k) = 0.$$

Si $k < M$, on a

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k.$$

Si $k = M$, on a

$$\mathbb{P}(Z = M) = \mathbb{P}(Y \geq M) = 1 - \sum_{k=0}^{M-1} P(Y = k) = 1 - \sum_{k=0}^{M-1} pq^k = q^M.$$

3. Par récurrence, on montre facilement que pour tout $n \geq 0$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} .
- 4.

```
def cheb(n, x):  
    res = 0  
    if (n == 0):  
        res = 1  
    elif (n == 1):  
        res = x  
    elif (n >= 2):  
        res = 2*x*cheb(n-1, x) - cheb(n-2, x)  
  
    return res
```

5. On procède par récurrence. Pour $n = 0$ ou 1 l'affirmation est vraie. Supposons qu'elle est vraie jusqu'à un certain $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos(\theta)) &= 2 \cos \theta T_n(\cos \theta) - T_{n-1}(\cos \theta) \\ &= 2 \cos(\theta) \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ &= \cos(\theta) \cos(n\theta) - \sin(\theta) \sin(n\theta) = \cos((n+1)\theta). \end{aligned}$$

6. Soit $x \in [-1, 1]$. Il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$. Ainsi

$$|T_n(x)| = |T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leq 1.$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, |T_n(x)q^n| \leq q^n.$$

Comme la série $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ converge, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)q^n$ est absolument convergente.

7. Soit $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n q^{k+2} T_{k+2}(x) = 2x \sum_{k=0}^n q^{k+2} T_{k+1}(x) - \sum_{k=0}^n q^{k+2} T_k(x).$$

D'où

$$\sum_{k=2}^{n+2} q^k T_k(x) = 2xq \sum_{k=1}^{n+1} q^k T_k(x) - q^2 \sum_{k=0}^n q^k T_k(x).$$

On fait tendre $n \rightarrow +\infty$ (tous les termes convergent) :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} q^k T_k(x) = 2xq \sum_{k=1}^{+\infty} q^k T_k(x) - q^2 \sum_{k=0}^{+\infty} q^k T_k(x).$$

En posant

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k T_k(x)$$

on a

$$F(x) - qx - 1 = 2xq(F(x) - 1) - q^2 F(x).$$

D'où

$$F(x) = \frac{1 - qx}{q^2 - 2qx + 1}.$$

8. On pose pour tout $k \leq N$, $Y_k = a_{Z,k}$. Puisque $Y_k = 0$ pour $k > M$, la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_k) x^k \text{ est finie et}$$

$$H_M(x) = \sum_{k=0}^M \mathbb{E}(Y_k) x^k.$$

On a

$$\begin{aligned} H_M(x) &= \sum_{k=0}^M \mathbb{E}(a_{Z,k} x^k) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^M a_{Z,k} x^k\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^Z a_{Z,k} x^k\right) \\ &= \mathbb{E}(T_Z(x)) = \sum_{k=0}^M P(Z = k) T_k(x) = \sum_{k=0}^{M-1} p q^k T_k(x) + q^M T_M(x) \\ &= p \sum_{k=0}^{M-1} T_k(x) q^k + q^M T_M(x). \end{aligned}$$

Or

$$q^M T_M(x) \rightarrow 0 \text{ car } |q^M T_M(x)| \leq q^M.$$

Par ailleurs, la somme $\sum_{k=0}^{M-1} T_k(x) q^k$ converge vers

$$\sum_{k=0}^{+\infty} T_k(x) q^k = \frac{1 - qx}{q^2 - 2qx + 1}.$$

D'où le résultat.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 1

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer BA .

Solution :

On note $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ les applications canoniquement associées à A et B respectivement.

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

L'énoncé donne : $f \circ g(e_2) = e_2$ et $f \circ g(e_3) = e_3$. D'où $g(f \circ g(e_2)) = g(e_2)$ et $g(f \circ g(e_3)) = g(e_3)$. On montre ensuite que la famille $(g(e_2), g(e_3))$ est libre.

Soit en effet $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$ag(e_2) + bg(e_3) = 0 \iff af(g(e_2)) + bf(g(e_3)) = 0 \iff ae_2 + be_3 = 0.$$

Ainsi $(g(e_2), g(e_3))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$, dont les vecteurs sont invariants par $f \circ g$, qui est donc l'identité.

Ainsi $BA = I_2$.

SUJET Maths Approfondies 2

Exercice principal Maths Approfondies 2

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

1. Cours : donner la définition de la convergence en loi.
2. On suppose que X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la suite $(n(1 - M_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi. Préciser la loi limite.
3. (a) Représenter graphiquement la fonction $\varphi : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.
(b) Montrer que $\arctan(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
4. On suppose que X_1 admet pour densité :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}.$$

- (a) Déterminer la loi de $\arctan(X_1)$.
- (b) Écrire en Python une fonction simulant la réalisation d'une variable aléatoire de densité f .
- (c) Montrer que la suite $\left(\frac{n}{M_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi. Préciser la loi limite.

Solution :

1. Cours : cf programme EC maths approfondies page 21.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire $n(1 - M_n)$ étant à valeurs dans $[0, n]$, on a

$$\forall x < 0, \mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq x) = 0.$$

Soit $x \geq 0$. Par indépendance de $X_1, \dots, X_n$, on a :

$$n \geq x \Rightarrow \mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq x) = \mathbb{P}\left(M_n \geq 1 - \frac{x}{n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_n < 1 - \frac{x}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1 - e^{-x}$ donc la suite $(n(1 - M_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

3. (a) L'étude de la fonction φ montre qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée nulle.
Elle est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, respectivement égale à $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

- (b) La fonction $\arctan$ est dérivable en 0 donc :

$$\arctan(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} \arctan(0) + \arctan'(0)u + o(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u + o(u).$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on trouve que :

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'après la question 3.(a), $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x > 0$
donc :

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. (a) Remarquons que $\arctan(X_1)$ est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi :

$$\forall t \leq -\frac{\pi}{2}, \mathbb{P}(\arctan(X_1) \leq t) = 0 \text{ et } \forall t \geq \frac{\pi}{2}, \mathbb{P}(\arctan(X_1) \leq t) = 1.$$

Soit $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\mathbb{P}(\arctan(X_1) \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq \tan t) = \int_{-\infty}^{\tan t} \frac{dx}{\pi(x^2 + 1)} = \frac{t + \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{t - (-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}) - (-\frac{\pi}{2})}.$$

On en déduit que $\arctan(X_1)$ suit la loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

- (b) On utilise le résultat de la question précédente (simulation par inversion) :

```
import numpy as np
```

```
def simule_X1():
    u = np.pi * np.random() - np.pi / 2
    return np.tan(u)
```

- (c) Soit $t \leq 0$.

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq 0\right) = \mathbb{P}(M_n \leq 0) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit $t > 0$.

$$\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(M_n \geq \frac{n}{t}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_n < \frac{n}{t}\right) = 1 - \left(\int_{-\infty}^{\frac{n}{t}} \frac{dx}{\pi(1+x^2)}\right)^n = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{t}\right)\right]^n$$

D'après la question 3.(b),

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{t}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{t}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{n}{M_n} \leq t \right) = 1 - e^{-\frac{t}{\pi}}.$$

La suite $\left(\frac{n}{M_n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc en loi vers la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\pi}$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une réelle symétrique et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P'(\lambda) \neq 0$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que :

$$A = P(S).$$

Solution :

Puisque P' ne s'annule pas, il est de signe de constant (d'après le T.V.I.). Il en résulte que P est strictement monotone. Comme c'est un polynôme, ses limites en $\pm\infty$ sont infinies. Donc P est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème spectral, A est diagonalisable : $A = QDQ^{-1}$ avec D diagonale et Q inversible (on peut même choisir Q orthogonale). Il suffit de choisir $S = QP^{-1}(D)Q^{-1}$ où $P^{-1}(D) = \text{diag}(P^{-1}(d_{1,1}), \dots, P^{-1}(d_{n,n}))$.

Soit maintenant S' une matrice symétrique vérifiant $A = P(S')$. Il en résulte que tout vecteur propre de S' est aussi vecteur propre de A . Soit $E'_1, \dots, E'_m$ les sous-espaces propres de S' . Chacun de ces sous-espaces propres de S' est inclus dans un sous-espace propre de A : $E'_i \subset E_i$. Comme $E'_1 \oplus \dots \oplus E'_m = \mathbb{R}^n$ on en déduit que $E'_i = E_i$ pour tout $i \leq m$. Donc S' et A ont les mêmes sous-espaces propres. Il en résulte que $D_0 = Q^{-1}S'Q$ est aussi diagonale. Or $P(S') = A$. Donc $QP(D_0)Q^{-1} = A = QDQ^{-1}$. Donc $P(D_0) = D$. Puisque P est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, forcément $D_0 = P^{-1}(D)$ où $P^{-1}(D)$ est la matrice diagonale ci-dessus. Ainsi, $S' = QD_0Q^{-1} = S$.

SUJET Maths Approfondies 3

Exercice principal Maths Approfondies 3

On remarque qu'à une station de métro londonien, la durée moyenne entre deux métros consécutifs est de 10 minutes.

On fixe un instant 0, on note X_1 la variable aléatoire égale à la durée (en minutes) entre l'instant 0 et le passage du premier métro et, pour tout entier naturel k non nul, X_k la variable aléatoire égale à la durée (en minutes) entre le passage du k -métro et du suivant. On suppose que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ forme une famille de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi exponentielle.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k le temps (en minutes) de passage du k -ème métro depuis l'instant 0 (on convient que $S_0 = 0$). Pour un instant $t > 0$, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre de métros qui sont passés entre l'instant 0 et l'instant t (compris).

1. Cours : loi de somme de n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.
2. Quel est le paramètre de la loi exponentielle suivies par les variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$?
3. Écrire le code d'une fonction en Python prenant en argument un flottant $t > 0$ (inutile de vérifier cette condition) et simulant la variable aléatoire N_t .
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que S_n est une variable à densité dont on déterminera une densité.
5. Montrer que la variable aléatoire N_t suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
6. Un passager arrive à la station à l'instant $t > 0$ et attend le prochain métro. On note A_t la variable aléatoire égale à son temps d'attente (en minutes).
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}(A_t \mid S_n < t \leq S_{n+1}) = 10n + 10 - t$.
 - (b) En déduire que le temps moyen d'attente du métro est de 10 minutes.

Solution :

1. Cours : cf programme EC maths approfondies page 16.
2. D'après l'énoncé, la loi est d'espérance $\frac{1}{\lambda} = 10$; son paramètre est donc $\lambda = \frac{1}{10}$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, X_k \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{10}\right).$$

3.

```

import numpy.random as rd
def simule_N(t):
    n = 0
    s = 0
    while s < t:
        s += rd.exponential(10)
        n += 1
    return n-1

```

4. On trouve immédiatement que $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Puisque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lambda X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1),$$

la variable aléatoire λS_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes (par le lemme des coalitions) suivant la loi $\mathcal{E}(1) = \gamma(1)$. La variable aléatoire λS_n suit donc la loi $\gamma(n)$ par stabilité de la loi γ pour la somme. On montre sans difficulté que la variable aléatoire S_n est à densité, de densité donnée par :

$$f_n : x \mapsto \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x).$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $[N_t = n] = [S_n \leq t < S_{n+1}] = [S_n \leq t] \setminus [S_{n+1} \leq t]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} \leq t) \\
 &= \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t) \\
 &= \int_{-\infty}^t f_n(x) dx - \int_{-\infty}^t f_{n+1}(x) dx \\
 &= \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} dx.
 \end{aligned}$$

En intégrant par parties la première intégrale (les fonctions $u : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ et $v : x \mapsto \frac{\lambda^{n-1} x^n}{n!}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, t]$), on trouve que :

$$\int_0^t \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{\lambda^{n-1} x^n}{n!} \lambda e^{-\lambda x} \right]_0^t + \int_0^t \frac{\lambda^{n-1} x^n}{n!} \lambda^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} + \int_0^t \frac{(\lambda x)^n}{n!} \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

On en déduit que $\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ puis que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt .

6. (a) Sous l'hypothèse que l'événement $[S_n < t \leq S_{n+1}]$ est réalisé, $A_t = S_{n+1} - t$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(A_t \mid S_n < t \leq S_{n+1}) = \mathbb{E}(S_{n+1} - t) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(X_k) - t = 10n + 10 - t.$$

- (b) Remarquons que $([S_n < t \leq S_{n+1}])_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système (quasi-)complet d'événements. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^N \mathbb{P}(S_n < t \leq S_{n+1}) \mathbb{E}(A_t \mid S_n < t \leq S_{n+1}) &= \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(N_t = n) [10n + 10 - t] \\
&= 10 - t + 10 \sum_{n=1}^N n \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= -t + 10 + \sum_{n=1}^N \frac{\lambda^{n-1} t^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \\
&= -t + 10 + t \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 10.
\end{aligned}$$

Puisque A_t est une variable aléatoire positive et puisque la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(S_n < t \leq S_{n+1}) \mathbb{E}(A_t \mid S_n < t \leq S_{n+1})$$

converge, la variable aléatoire X_t admet une espérance, égale à 10.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes et non certaines. On pose $Z = X + Y$ et on suppose que $\mathbb{P}(X = 0) < \mathbb{P}(Y = 0)$ et que $\mathbb{P}(Z > 4) = 0$ et $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 3) = 0$ et que

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z = 4) = \frac{1}{6}.$$

On définit la fonction

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On définit de même G_Y et G_Z .

1. Montrer que G_X , G_Y et G_Z sont des polynômes en t et que

$$G_Z = G_X G_Y.$$

2. Trouver les lois de X et de Y .
-

Solution :

1. Puisque $\mathbb{P}(Z > 4) = 0$ on a forcément $P(X > 4) = P(Y > 4) = 0$. Ainsi, les sommes définissant G_X , G_Y et G_Z sont des sommes finies (uniformément en t) et les trois fonctions sont polynomiales. On a par indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned} G_Z(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X + Y = k)t^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell \geq 0, m \geq 0 \text{ et } m+\ell=k} \mathbb{P}(X = m) \cap \mathbb{P}(Y = \ell)t^k, \\ &= \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = m)t^m \right) \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = \ell)t^\ell \right) \\ &= G_X(t)G_Y(t) \end{aligned}$$

(on observe que toutes les sommes impliquées ici sont finies, et qu'on peut donc les permuter).

2. Les fonctions G_X , G_Y et G_Z sont des polynômes. De plus $G_Z = G_X G_Y$. Ainsi, G_X et G_Y divisent G_Z . De plus,

$$G_Z(t) = \frac{1}{6}(2 + 3t^2 + t^4) = \frac{1}{6}(t^2 + 1)(t^2 + 2). \quad (1)$$

Donc $G_X(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$ et $G_Y(t) = \frac{1}{3}(t^2 + 2)$ car $P(X = 0) \leq P(Y = 0)$ ($G_X \neq 1$, $G_Y \neq 1$ car X et Y ne sont pas certaines).

SUJET Maths Approfondies 4

Exercice principal Maths Approfondies 4

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice A .

1. Question de cours : caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide des dimensions des sous-espaces propres.
2. (a) Ecrire une fonction Python prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen (**True** ou **False**) indiquant s'ils sont colinéaires. *On pourra représenter les vecteurs par des types array.*
(b) Ecrire une fonction Python prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen indiquant s'il est vecteur propre de A .
3. (a) Vérifier que les vecteurs $(-1, 2, 0)$, $(0, 1, -1)$ et $(1, 0, -1)$ sont des vecteurs propres de f .
(b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. (a) Ecrire un programme Python permettant de déterminer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre -10 et 10 (bornes incluses).
(b) Pour N un entier naturel non nul, calculer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre $-N$ et N (bornes incluses).
5. Soit N un entier naturel non nul. Une expérience consiste à choisir au hasard de manière indépendante N vecteurs à coefficients entiers dans $\llbracket -N, N \rrbracket^3$.
(a) Quelle est la probabilités p_N d'obtenir au moins un vecteur propre de A parmi ces N vecteurs ?
(b) Quelle est la limite de p_N quand N tend vers $+\infty$.

Solution :

1. EC2p8

2. (a) _____

```
import numpy as np
def colineaires(U,V):
    matrice = np.array([U,V])
    return np.linalg.matrix_rank(matrice)<2
```

(b) On propose (pas la seule solution).

```
def vp_A(U):
    if U==[0,0,0]:
        return False
    else:
        AU=[-4*U[0]-3*U[1]-3*U[2],2*U[1],6*U[0]+3*U[1]+5*U[2]] # ou np.dot(A,U)
        return colineaires(AU,U)
```

3. (a) On calcule :

- $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$: vecteur propre associé à la valeur propre 2
- $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: vecteur propre associé à la valeur propre 2
- $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$: vecteur propre associé à la valeur propre -1

(b) Les deux premiers vecteurs forment une famille libre ; l'espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 2. Donc, en utilisant la question de cours, f est diagonalisable.

4. (a) _____

```
def compte_vp_A():
    compteur = 0
    for x in range(-10,11):
        for y in range(-10,11):
            for z in range(-10,11):
                if vp_A([x,y,z]):
                    compteur +=1
    return compteur
```

(b) Pour la valeur propre -1, on compte les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$ avec

$$k \in \llbracket -N, N \rrbracket \text{ et } k \neq 0.$$

Il y en a $2N$.

Pour la valeur propre 2, on compte les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha + \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$

avec contraintes :

- Première contrainte : $-N \leq \alpha \leq N$.
- Deuxième contrainte : $-N \leq \beta \leq N$.
- Troisième contrainte : $-N \leq -2\alpha + \beta \leq N$, c'est-à-dire $-N + 2\alpha \leq \beta \leq N + 2\alpha$.

Pour connaître la quantité totale, on distingue les cas selon le signe de α .

— Si $\alpha < 0$, la troisième contrainte donne $-N \leq \beta \leq N + 2\alpha$.

Il y a donc $N + 2\alpha - (-N) + 1 = 2N + 2\alpha + 1$ valeurs de β possibles.

— Si $\alpha = 0$, il y a $2N$ valeurs de β possibles.

— Si $\alpha > 0$, la troisième contrainte donne $-N + 2\alpha \leq \beta \leq N$ et il y a $2N - 2\alpha + 1$ valeurs de β .

$$\text{Au total il y a : } \sum_{\alpha=-N}^{-1} (2N + 2\alpha + 1) + 2N + \sum_{\alpha=1}^N (2N - 2\alpha + 1) =$$

$$2 \sum_{\alpha=1}^N (2N - 2\alpha + 1) + 2N$$

$$\boxed{4N + 2N^2 = 2N(N + 2)}$$

5. (a) Pour un vecteur : $p_v = \frac{2N(N + 2)}{(2N + 1)^3}$.

Par indépendance, la probabilités qu'aucun vecteur ne soit propre est :

$$\boxed{p_N = 1 - \left(1 - \frac{2N(N + 2)}{(2N + 1)^3}\right)^N}$$

(b) $\frac{2N(N + 2)}{(2N + 1)^3} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2N^2}{8N^3}$ donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2N(N + 2)}{(2N + 1)^3} = 0$

Ainsi, $N \ln \left(1 - \frac{2N(N + 2)}{(2N + 1)^3}\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{4}$ et $\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N = e^{-\frac{1}{4}}}$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 4

Un élève prépare trois concours. Il a une probabilité $p \in [0, 1]$ de réussite pour chacun des trois. Il pense que s'il se présente aux trois concours, il a une probabilité $3p$ d'intégrer. Trouver les valeurs de p pour lesquelles l'erreur que fait cet élève soit inférieure à 10%.

Solution :

1. Soit X le nombre de succès de l'élève au concours. X est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres 3 et p . L'événement A considéré est l'événement ($X \geq 1$).

On calcule $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - (1 - p)^3$.

Notons E l'erreur commise par l'élève. On a $E = 3p - \mathbb{P}(A) = p^2(3 - p)$ (l'erreur est effectivement positive!). De plus, $E \leq 0.1 \iff p^2(3 - p) \leq 0.1$.

Considérons la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(p) := p^3 - 3p^2 + 0.1$. f est dérivable, et $f'(p) = 3p(p - 2) < 0$ pour $p \in]0, 1]$. On trace le tableau de variations :

p	0	p_0	1
$f'(p)$	0	—	
$f(p)$	0.1	↘ 0	↘ -1.9

f , étant strictement décroissante, réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[f(1), f(0)] = [-1.9, 0.1]$. f est aussi continue, donc par théorème des valeurs intermédiaires, f atteint une fois et une seule la valeur 0, en p_0 . Ainsi, l'ensemble des valeurs p solution est l'intervalle $[0, p_0]$.

2. *Question subsidiaire* : Proposer un programme Python pour déterminer une valeur approchée de p_0 . (les examinateurs donneront l'encadrement une fois le programme rédigé, puis pourront demander d'interpréter le résultat).

On peut par exemple proposer un algorithme de dichotomie.

```
def dichotomie(f, a, b, e):  
    delta = 1  
    while delta > e:  
        m = (a + b) / 2
```

```

        delta = abs(b - a)
        if f(m) == 0:
            return m
        elif f(a) * f(m) > 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b

print(dichotomie(lambda p: p**3 - 3*(p**2) + 0.1, 0, 1, 1e-3))
>>> (0.1884765625, 0.18896484375)

```

En conclusion, si l'élève a entre 0 et 18% de chances de réussir l'un des concours, il triple ses chances en présentant les 3 concours (avec 10% d'erreur au plus).

SUJET Maths Approfondies 5

Exercice principal Maths Approfondies 5

1. Question de cours : énoncer les théorèmes de comparaison pour les intégrales généralisées.

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t) dt$$

2. Déterminer l'ensemble de définition de f .
3. (a) Montrer que f est positive et préciser sa monotonie.
(b) En déduire que f admet une limite à droite et à gauche en 0.
(c) Montrer que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ est convergente et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq \frac{\pi}{2} - f(x) \leq -x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$$

- (d) En déduire la limite de f à droite en 0 .
4. Former une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.
5. On pose pour $x > 0$:

$$\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$$

Montrer que :

$$\forall x > 0 \quad \varphi(x+1) = \varphi(x)$$

Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Déterminer un équivalent à f en -1^+ .

Solution :

1. Question de cours : p18 EC1 maths approfondies
2. Déterminer l'ensemble de définition de f .

$$\text{Soit } \varphi : \begin{array}{l} \left] 0, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto \sin t^x = e^{x \ln(\sin t)} \end{array}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi \in C^0\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^x, \text{ or } \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^x dt \text{ converge si et seulement si } x > -1.$$

$$\text{Par comparaison, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t) dt \text{ converge ssi } x > -1.$$

$$f \text{ est définie sur }]-1, +\infty[.$$

3. (a) *Montrer que f est positive et préciser sa monotonie.*

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi(t) \geq 0.$$

$$\text{Comme } \frac{\pi}{2} > 0, \text{ par positivité de l'intégrale, } f \text{ est positive sur }]-1, +\infty[.$$

$$\text{Soit } (x, y) \in]-1, +\infty[^2 \text{ tels que } x < y$$

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin^x(t) \geq \sin^y(t)$$

On conclut encore par positivité de l'intégrale que f est décroissante.

(b) *En déduire que f admet une limite à droite et à gauche en 0*

Conséquence de la monotonie.

(c) *Montrer que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ est convergente et que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq \frac{\pi}{2} - f(x) \leq x \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln(\sin(t)) dt$$

$$t \mapsto \ln(\sin t) \text{ est continue et négative sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et}$$

$$\ln(\sin t) = \ln(t + o(t)) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) = \ln(t) + o(1) \underset{0}{\sim} \ln(t)$$

Or $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t) dt$ converge donc par comparaison $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ est convergente

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq f(0) - f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^{x \ln(\sin t)}) dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} -x \ln(\sin t) dt$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq \frac{\pi}{2} - f(x) \leq -x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$$

(d) *En déduire la limite de f à droite en 0*

Par encadrement, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} = f(0)$$

4. *Former une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.*

$$\begin{aligned}
f(x+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \sin^x(t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \sin^x(t) dt \\
&= f(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{\cos t \sin^x(t)}^{\uparrow} \underbrace{\cos t}_{\downarrow} dt \\
&= f(x) - \left[\frac{\sin^{x+1}(t)}{x+1} \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{x+1}(t)}{x+1} (-\sin t) dt \\
&= f(x) - \frac{1}{x+1} f(x+2)
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{(x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)}$

5. On pose pour $x > 0$,

$$\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$$

Montrer que

$$\forall x > 0, \varphi(x+1) = \varphi(x)$$

Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $x-1 \in]-1, +\infty[$.

$$\varphi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x) = xf(x-1)f(x) = \varphi(x). \text{ D'où } \varphi(n) = \varphi(1).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(1) = 1 \cdot f(1)f(0) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \frac{\pi}{2} \left[-\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) = \frac{\pi}{2}}$

6. Déterminer un équivalent à f en -1^+ .

$$\forall x > 0 \quad \frac{\pi}{2} = xf(x)f(x-1). \text{ Or } f(x) \underset{0^+}{\sim} f(0) = \frac{\pi}{2} \text{ donc } f(x-1) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x} \text{ d'où}$$

$$\boxed{f(x) \underset{-1^+}{\sim} \frac{1}{x+1}}$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 5

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que :

$$\forall n \geq 1 : P([X_n = 1]) = P([X_n = -1]) = \frac{1}{2}$$

Pour tout entier non nul n on pose :

$$W_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k}$$

1. Ecrire un programme **Python** qui prend en entrée un entier n et retourne une réalisation de la variable aléatoire W_n .
2. Montrer que la suite $(E(|W_n|))_{n \geq 1}$ est croissante.
3. En déduire que la suite $(E(|W_n|))_{n \geq 1}$ est convergente.

Solution :

1.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul(n):
    W = 0
    for k in range(1, n+1):
        u = 2 * rd.binomial(1, 0.5) - 1
        W += u/k
    return W
```

2. $W_{n+1} = W_n + \frac{X_{n+1}}{n+1}$ et d'après la formule de l'espérance totale :

$$\begin{aligned} E(|W_{n+1}|) &= E(|W_{n+1}| \mid X_{n+1} = 1) P(X_{n+1} = 1) + E(|W_{n+1}| \mid X_{n+1} = -1) P(X_{n+1} = -1) \\ &= \frac{1}{2} E\left(\left|W_n + \frac{1}{n+1}\right|\right) + \frac{1}{2} E\left(\left|W_n - \frac{1}{n+1}\right|\right) \\ &\geq \frac{1}{2} E(|2W_n|) = E(|W_n|) \end{aligned}$$

par inégalité triangulaire donc la suite $(E(|W_n|))_{n \geq 1}$ est croissante.

3. On a : $0 \leq E(|W_n|) \leq (E(W_n^2))^{1/2}$ du fait que : $V(|W_n|) = E(W_n^2) - (E(|W_n|))^2 \geq 0$.

W_n étant centrée on a :

$$E(W_n^2) = V(W_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} V(X_k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

La suite $(E(|W_n|))_{n \geq 1}$ est donc croissante et majorée et, de ce fait, converge.

SUJET Maths Approfondies 6

Exercice principal Maths Approfondies 6

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $s \in]0, +\infty[$ les séries

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{s^k}{k!} \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k)^2 \frac{s^k}{k!}$$

sont absolument convergentes. Dans toute la suite, pour tout $\lambda \in]0, +\infty[$, X_λ désigne une variable aléatoire discrète qui suit une loi de Poisson de paramètre λ et on pose

$$Y_\lambda = \frac{X_\lambda - \lambda}{\lambda}.$$

1. Question de cours : rappeler la loi de Poisson, l'espérance et la variance associées.
2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la variable aléatoire $\varphi(X_\lambda)$ admet une espérance et une variance.

On pose dans la suite

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[, H(\lambda) = \mathbb{E}(\varphi(X_\lambda)).$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

est absolument convergente et en déduire que la variable aléatoire $X_\lambda \varphi(X_\lambda)$ admet une espérance.

4. Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon \in]-1, 1[$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$|(\lambda + \varepsilon)^k - \lambda^k - k\varepsilon\lambda^{k-1}| \leq \frac{1}{2}k(k-1)\varepsilon^2(\lambda + 1)^{k-2}.$$

(on convient que $t^0 = 1$ pour tout $t \in]0, +\infty[$).

5. En déduire que H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, H'(\lambda) = \mathbb{E}(\varphi(X_\lambda)Y_\lambda).$$

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. En considérant la fonction

$$Q(t) = \mathbb{E}\left((\varphi(X_\lambda) - H(\lambda) + tY_\lambda)^2\right) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

montrer que

$$\mathbb{V}(\varphi(X_\lambda)) \geq \lambda H'(\lambda)^2.$$

Solution :

1. Voir programme.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_\lambda = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

D'après les hypothèses de l'exercice, la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \mathbb{P}(X_\lambda = k)$$

est absolument convergente. En appliquant le théorème de transfert, on en déduit que $\varphi(X_\lambda)$ admet une espérance et que

$$H(\lambda) = \mathbb{E}(\varphi(X_\lambda)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \mathbb{P}(X_\lambda = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

De même $\varphi(X_\lambda)^2$ admet une espérance et donc $\varphi(X_\lambda)$ admet une variance.

3. Soit $s > \lambda$ fixé. On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \varphi(k) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right| = \left| \varphi(k) \frac{s^k}{k!} \right| \left(\frac{\lambda}{s} \right)^k k.$$

Etant donné que la série $\sum \varphi(k) \frac{s^k}{k!}$ est absolument convergente, la suite $(\varphi(k) \frac{s^k}{k!})_{k \geq 0}$ converge vers 0 ; elle est donc majorée en valeur absolue par une constante $M > 0$. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \varphi(k) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right| \leq M \left(\frac{\lambda}{s} \right)^k k.$$

La série à droite est absolument convergente. On conclut par comparaison que la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

converge absolument et donc converge. Par théorème de transfert on en déduit que la variable aléatoire $X_\lambda \varphi(X_\lambda)$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X_\lambda \varphi(X_\lambda)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \varphi(k) \mathbb{P}(X_\lambda = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

4. L'inégalité est clairement vraie pour $k = 0$ et $k = 1$. Supposons que $k \geq 2$. On considère sur $[-1, 1]$ la fonction

$$h(x) = (\lambda + x)^k, \quad x \in [-1, 1].$$

On a $h(0) = \lambda^k$ et $h'(0) = k\lambda^{k-1}$. De plus

$$\forall x \in [-1, 1], |h''(x)| = k(k-1)|\lambda+x|^{k-2} \leq k(k-1)(|\lambda|+|x|)^{k-2} \leq k(k-1)(|\lambda|+1)^{k-2}.$$

En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, on en déduit que pour tout $\varepsilon \in]-1, 1[$

$$|h(\varepsilon) - h(0) - h'(0)\varepsilon| \leq \frac{1}{2!}k(k-1)(|\lambda|+1)^{k-2}\varepsilon^2.$$

5. Posons $F(\lambda) = e^\lambda H(\lambda)$. On a

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^k}{k!} \\ |F(\lambda + \varepsilon) - F(\lambda) - \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}| &= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{(\lambda + \varepsilon)^k - \lambda^k - k\varepsilon\lambda^{k-1}}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi(k)| \frac{|(\lambda + \varepsilon)^k - \lambda^k - k\varepsilon\lambda^{k-1}|}{k!} \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} |\varphi(k)| \frac{(\lambda + 1)^{k-2}}{(k-2)!}. \end{aligned}$$

On montre comme dans la question 3 que la série

$$\sum_{k=2}^{+\infty} |\varphi(k)| \frac{(\lambda + 1)^{k-2}}{(k-2)!}$$

converge. Et on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\lambda + \varepsilon) - F(\lambda)}{\varepsilon} = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Donc F est dérivable en λ et

$$F'(\lambda) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Il en résulte que H est aussi dérivable en λ et

$$H'(\lambda) = e^{-\lambda} F'(\lambda) - e^{-\lambda} F(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - H(\lambda)$$

En comparant avec la formule de $\mathbb{E}(X_\lambda \varphi(X_\lambda))$ on obtient :

$$H'(\lambda) = \frac{\mathbb{E}(X_\lambda \varphi(X_\lambda))}{\lambda} - \mathbb{E}(\varphi(X_\lambda)) = \mathbb{E}(Y_\lambda \varphi(X_\lambda)),$$

d'où le résultat.

6. Observons que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \mathbb{E}(Y_\lambda^2)t^2 + 2\mathbb{E}((\varphi(X_\lambda) - H(\lambda))Y_\lambda)t + \mathbb{E}\left((\varphi(X_\lambda) - H(\lambda))^2\right) \\ &= \mathbb{V}(Y_\lambda)t^2 + 2\mathbb{E}(\varphi(X_\lambda)Y_\lambda)t + \mathbb{V}(\varphi(X_\lambda)), \\ &= \frac{1}{\lambda}t^2 + 2H'(\lambda)t + \mathbb{V}(\varphi(X_\lambda)), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\mathbb{E}(Y_\lambda) = 0$. Comme Q est un trinôme qui ne change pas de signe, son discriminant est négatif, c'est-à-dire

$$H'(\lambda)^2 \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{V}(\varphi(X_\lambda)).$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 6

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe α dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que :

$$f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = f(\alpha)$$

2. Plus généralement, montrer que pour tout n entier non nul il existe α_n dans $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que :

$$f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha_n)$$

3. Ecrire une fonction Python qui prend en entrée f et n et qui sort une approximation de α_n à 10^{-2} près.

Solution :

1. Soit g telle que

$$g(t) = f\left(t + \frac{1}{2}\right) - f(t)$$

g est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ avec $g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0)$
du fait que $f(0) = f(1)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires g s'annule sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et l'existence de α est établie.

2. Soit g_n définie sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ par

$$g_n(t) = f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t)$$

Supposons par l'absurde que g_n ne s'annule pas sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ et supposons alors $g_n > 0$ par exemple.

On a alors :

$g\left(\frac{k}{n}\right) > 0$ pour tout k compris entre 0 et $n - 1$.

Ainsi :

$f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) > 0$ (somme télescopique). Contradiction.

3.

```
def alpha(f,n):
    k=1
    while (f((k+1)/n)-f(k/n))*(f(1/n)-f(0))>0 :
        k+=1
    a=(k-1)/n
    b=k/n
    while b-a>0.01:
        c=(a+b)/2
        if (f(a+1/n)-f(a))*((f(c+1/n)-f(c)))<0:
            b=c
        else :
            a=c
    return a
```

SUJET Maths Approfondies 7

Exercice principal Maths Approfondies 7

On considère deux suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. On suppose toutes ces variables mutuellement indépendantes.

1. Cours : densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n^2 .
3. Soit $x \in]0, 1]$. Montrer la convergence et calculer l'intégrale :

$$h(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{tx - t^2}}.$$

On pourra réaliser le changement de variable $t = \frac{x}{2} (\sin(u) + 1)$.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n^2 + Y_n^2$ admet une densité g . Déterminer une expression de $g(x)$ pour tout $x \leq 1$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = 1$ si $X_n^2 + Y_n^2 \leq 1$ et 0 sinon et $S_n = \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n Z_k$.

On admet que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

- (a) Écrire en Python une fonction prenant en argument un entier n non nul et simulant la variable S_n .
- (b) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable dont on déterminera la loi.
- (c) Comment peut-on choisir n pour que S_n soit une approximation de π à 10^{-5} -près avec une probabilité supérieure à 90% ?

Solution :

1. Cours : cf programme EC maths approfondies page 16.
2. On trouve sans difficulté la fonction de répartition de X_n :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X_n^2 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On en déduit sans difficulté aussi que X_n^2 est à densité, donnée par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,1]}(x).$$

3. Comme proposé par l'énoncé, on considère la fonction $\varphi : u \mapsto \frac{x}{2} (\sin u + 1)$. On vérifie que φ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Puisque $\varphi\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]0, x[$, le théorème du changement de variable assure que l'intégrale $h(x)$ est de même nature que l'intégrale :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{x}{2} \cos(u) du}{\frac{x}{2} \sqrt{1 - \sin^2(u)}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du.$$

Puisque cette intégrale converge et vaut π , l'intégrale $h(x)$ converge et vaut π (toujours en vertu du théorème de changement de variable).

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque X_n et Y_n sont indépendantes, X_n^2 et Y_n^2 le sont aussi. De plus, on a montré à la question 2 que X_n^2 et Y_n^2 sont de densité f_n . On en déduit que leur somme $X_n^2 + Y_n^2$ est à densité, donnée par la fonction :

$$g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) dt$$

D'après ce qui précède, on trouve que $g(x) = 0$ si $x \leq 0$ et :

$$\forall x \in]0, 1], g(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{tx - t^2}} = \frac{\pi}{4}.$$

5. (a) `import numpy as np`

```
def simule_S(n):
    S = 0
    for k in range(n):
        x, y = np.random.random(), np.random.random()
        if x**2 + y**2 <= 1:
            S += 1
    return 4*S/n
```

- (b) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire Z_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p où :

$$p = \mathbb{P}(X_k^2 + Y_k^2 \leq k) = \int_{-\infty}^1 g(x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

Puisque les variables aléatoires $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ admettent la même espérance et la même variance, la loi faible des grands nombres assure que :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k - \frac{\pi}{4}\right| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n - \pi| \geq \varepsilon) = 0.$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc en loi vers une variable presque-sûrement constante égale à π .

(c) On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\mathbb{P}(|S_n - \pi| \leq 10^{-5}) \geq 90\%,$$

ce qui revient à choisir n tel que :

$$\mathbb{P}(|S_n - \pi| > 10^{-5}) \leq 10\%,$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$\mathbb{P}(|S_n - \pi| \geq 10^{-5}) \leq \frac{\pi(4 - \pi)}{n \times 10^{-10}}.$$

Il suffit donc de choisir n tel que $\frac{\pi(4 - \pi)}{n \times 10^{-10}} \leq 10^{-1}$, i.e. $n \geq \pi(4 - \pi) \times 10^{11}$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 7

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note : $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M \text{ est semblable à } A\}$.

Que dire de A lorsque $\mathcal{C}(A) = \{A\}$?

Solution :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(A) = \{A\} &\Leftrightarrow \forall P \in GL_n(\mathbb{R}) \quad P^{-1}AP = A \\ &\Leftrightarrow \forall P \in GL_n(\mathbb{R}) \quad AP = PA \quad (*)\end{aligned}$$

- S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I$ alors vérifie (*).
- Réciproquement si A vérifie (*) alors A commute avec toute matrice inversible et en particulier avec toutes les matrices de la forme :

$$P = I + E_{ij}$$

où : $(E_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ désigne la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

On a ainsi, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$A(I + E_{ij}) = (I + E_{ij})A$$

soit

$$AE_{ij} = E_{ij}A$$

En notant $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, il en résulte que :

$$\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{ii} = a_{jj}$$

et donc A est de la forme $A = \lambda I$.

Bilan :

$$\mathcal{C}(A) = \{A\} \iff A \in \text{Vect}(I)$$

SUJET Maths Approfondies 8

Exercice principal Maths Approfondies 8

L'objectif de cet exercice est de démontrer de deux manières **indépendantes** le résultat suivant :

Pour tout entier $n \geq 2$ et tous réels $x_1, \dots, x_n$ strictement positifs tels que $\sum_{k=1}^n x_k = 1$ on a :

$$(\star) \quad \sum_{k=1}^n \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^3 \geq n \left(n + \frac{1}{n} \right)^3$$

1. Question de cours : Fonctions convexes .

2. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I .

On suppose que $X(\Omega) \subset I$ et que les variables aléatoires X et $f(X)$ admettent une espérance.

a) En remarquant que la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de toutes ses tangentes établir l'inégalité :

$$f(E(X)) \leq E(f(X))$$

b) En introduisant une variable aléatoire bien choisie en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n \quad \text{tel que} \quad \sum_{k=1}^n t_k = 1 : \quad f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k).$$

c) En utilisant le résultat précédent établir alors l'inégalité $(\star)$.

3. Soit F la fonction à n -variables définie sur l'ouvert $U =]0, 1[^n$ par :

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^3$$

a) Etablir que le n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in U$ est un point critique pour F sous la contrainte linéaire $\sum_{k=1}^n x_k = 1$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{x_k^2} \right) = \lambda$$

- b) En déduire que, sous cette contrainte linéaire, F admet un unique point critique que l'on précisera.
 c) A l'aide de ce qui précède, établir une nouvelle preuve de l'inégalité $(\star)$.

Solution :

1. Cours

2.a) Pour tout $(x, a) \in I^2$ on a :

$$f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$$

et donc : $f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$.

En prenant $a = E(X) \in I$ on obtient, par croissance de l'espérance :

$$E(f(X)) \geq f(E(X))$$

du fait que la variable aléatoire $Y = X - E(X)$ est centrée.

b) Si les $x_1, \dots, x_n$ sont 2 à 2 distincts on prend X telle que :

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(X = x_k) = t_k$$

On a alors :

$$E(f(X)) = \sum_{k=1}^n t_k f(x_k) \text{ at } E(X) = \sum_{k=1}^n t_k x_k$$

d'où l'inégalité attendue.

Si les $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas 2 à 2 distincts on "regroupe" les t_j et on a bien le resultat d'après le cas précédent.

c) On applique le résultat précédant à la fonction convexe f donnée, pour tout $t \in]0, 1[$ par

$$f(t) = \left(t + \frac{1}{t}\right)^3$$

$$\left(f'(t) = 3\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 \text{ et } f''(t) = \frac{6}{t^3}\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 + 6\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2\left(t + \frac{1}{t}\right) > 0\right)$$

$$\text{On obtient : } f(\bar{x}_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \text{ avec } \bar{x}_n = \frac{1}{n} \text{ et donc } f(\bar{x}_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^3.$$

L'inégalité $(\star)$ en résulte.

3.a) Posons $g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$.

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$ est un point critique de F sous la contrainte linéaire $g(\vec{x}) = 1$ lorsque :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} / \nabla F(\vec{x}) = \alpha \nabla g(\vec{x})$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$\partial_k F(\vec{x}) = 3 \left(1 - \frac{1}{x_k^2} \right) \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^2$$

et

$$\partial_k g(\vec{x}) = 1.$$

La propriété attendue en résulte (en posant $\lambda = \frac{\alpha}{3}$).

b) La fonction $g : t \mapsto \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) \left(t + \frac{1}{t} \right)^2$ réalise une bijection croissante de $]0, 1[$ sur $] -\infty, 0[$ du fait que :

$$g'(t) = f''(t) > 0 \quad (\text{calcul en 2c.})$$

Il en résulte que si $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ est un point critique de F sous la contrainte $x_1 + \dots + x_n = 1$ alors : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_k = \frac{1}{n}$.

Bilan : Sous cette contrainte l'unique point critique est

$$\vec{x} = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

3c) On remarque que $F(x_1, \dots, x_n)$ tend vers $+\infty$ lorsque l'un des x_k tend vers 0 . Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que, sous cette contrainte linéaire, F atteint un minimum global sur le compact $K_\epsilon = [\epsilon, 1 - \epsilon]^n \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in U / x_1 + \dots + x_n = 1\}$.

D'après ce qui précède ce minimum est atteint en $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$ et puisque $F\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) =$

$n \left(n + \frac{1}{n} \right)^3$ l'inégalité (*) en résulte.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 8

1. Soit $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P définisse une fonction injective, respectivement surjective sur $\mathbb{R}$.
2. On définit une fonction sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $M \mapsto P(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que cette fonction n'est jamais injective si le degré de P est supérieur à 2.

Solution :

1. $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective ssi P' est de signe constant, donc les racines réelles de P' sont de multiplicité paire. $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective ssi le degré de P est impair.
2. On commence par remarquer que si P est injectif sur $\mathbb{R}$, P est injectif sur les matrices diagonales, donc sur les matrices symétriques. On cherche alors un exemple sur les matrices anti-symétriques $M = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$. Quitte à décaler par une constante, il suffit de trouver deux matrices M_1, M_2 telles que $P(M_1) = P(M_2) = 0$. Tout polynôme admet des facteurs de degré 2, il suffit de considérer $P(X) = X^2 + aX + b$. L'équation $P(M) = 0$ donne

$$x^2 - y^2 + ax + b = 0, \quad y(2x + a) = 0$$

Si le discriminant de P est < 0 , on a alors deux solutions pour $x = -a/2$ et y les deux racines de $-a^2/4 + b$. Si $P(X) = (X - \alpha)^2$, on a en plus la matrice diagonale $M = \alpha I_2$, la matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ qui est annulée par P . Enfin si $P(X) = (X - \alpha)(X - \beta)$, $\alpha \neq \beta$, on prend $M = \alpha I_2$ et βI_2 .

SUJET Maths Approfondies 9

Exercice principal Maths Approfondies 9

Soit f une fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ continue.

1. Question de cours : rappeler l'inégalité des accroissements finis.
2. Ecrire une fonction **Python** ayant comme paramètres d'entrée deux réels a et b avec $a \leq b$, un entier $N \geq 1$ et une fonction h et qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale

$$\int_a^b h(t) dt$$

calculée par la méthode des rectangles à N pas.

3. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que l'intégrale

$$\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$$

converge.

On pose désormais pour tout $x \in [0, 1[$:

$$F(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt.$$

4. Montrer que la limite $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$ existe et trouver sa valeur ℓ .
On pose désormais $F(1) = \ell$.
5. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], F(x) = \sqrt{1-x} \int_0^1 \frac{f(x + (1-x)s)}{\sqrt{s}} ds.$$

6. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = 2f(1).$$

7. On suppose que f est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Montrer que F dérivable en 1 si et seulement si $f(1) = 0$.

Solution :

1. Voir programme.

```
2. import numpy
   def F(a, b, h, N):
       t = numpy.linspace(a, b, N)
       res = 0
       for i in range(0, N):
           res = res + h(t[i])
       return res*(b-a)/N
```

3. La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}$ est continue sur $]x, 1]$. De plus, la fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$. Elle est donc bornée. Soit $M \geq 0$ tel que $\forall t \in [0, 1], |f(t)| \leq M$. On a

$$\forall t \in]x, 1], \left| \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} \right| \leq \frac{M}{\sqrt{t-x}}.$$

Or l'intégrale

$$\int_x^1 \frac{M}{\sqrt{t-x}} dt$$

converge. Donc l'intégrale

$$\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$$

converge absolument.

4. Avec les notations de la réponse à la question précédente, on a pour tout $x \in [0, 1[$:

$$0 \leq |F(x)| \leq \int_x^1 \frac{M}{\sqrt{t-x}} dt = 2M[\sqrt{t-x}]_x^1 = 2M\sqrt{1-x}.$$

Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = 0$. Donc $\ell = 0$.

5. On vérifie facilement que l'identité est vraie quand $x = 1$. Soit $x \in [0, 1[$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 1 - x$. En effectuant le changement de variable affine

$$s = \frac{t-x}{1-x},$$

on a $t = x + (1-x)s$ et

$$\int_{x+\varepsilon}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt = \int_{\frac{\varepsilon}{1-x}}^1 (1-x) \frac{f(x+(1-x)s)}{\sqrt{(1-x)s}} ds = \sqrt{1-x} \int_{\frac{\varepsilon}{1-x}}^1 \frac{f(x+(1-x)s)}{\sqrt{s}} ds.$$

On fait tendre $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (les deux intégrales convergent) et on obtient l'identité demandée.

6. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en 1, il existe $\eta > 0$ suffisamment petit tel que

$$\forall t \in [1-\eta, 1], |f(t) - f(1)| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in [1 - \eta, 1]$. On a pour tout $s \in [0, 1]$, $x + (1 - x)s \in [1 - \eta, 1]$ car $x \leq x + (1 - x)s \leq x + (1 - x) = 1$. Il en résulte que

$$\forall s \in [0, 1], |f(x + (1 - x)s) - f(1)| \leq \varepsilon.$$

Or

$$\frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{f(x + (1-x)s) - f(1)}{\sqrt{s}} ds + \int_0^1 \frac{f(1)}{\sqrt{s}} ds = 2f(1) + \int_0^1 \frac{f(x + (1-x)s) - f(1)}{\sqrt{s}} ds.$$

Ainsi, pour tout $x \in [1 - \eta, 1]$ on a

$$\left| \frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} - 2f(1) \right| \leq \int_0^1 \frac{|f(x + (1-x)s) - f(1)|}{\sqrt{s}} ds \leq \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}} ds = 2\varepsilon.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = 2f(1).$$

7. Si F est dérivable en 1, on a

$$\frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = -\sqrt{1-x} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 1.$$

Donc $f(1) = 0$ par unicité de la limite. Réciproquement, si $f(1) = 0$. On a

$$\left| \frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} \right| \leq \int_0^1 \frac{|f(x + (1-x)s) - f(1)|}{\sqrt{s}} ds \leq \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \int_0^1 \frac{|x + (1-x)s - 1|}{\sqrt{s}} ds = C_f(1-x),$$

avec

$$C_f = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \int_0^1 \frac{|s-1|}{\sqrt{s}} ds.$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = 0.$$

On en déduit que F est dérivable à gauche en 1 et $F'(1) = 0$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 9

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 définies sur un même espace probabilisé. Montrer que la matrice $\Gamma = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.

À quelle condition nécessaire et suffisante sur les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ les valeurs propres sont-elles toutes strictement positives ?

Solution :

La matrice Γ est évidemment symétrique réelle donc diagonalisable.

Aide possible pour la suite : calculer $U^T \Gamma U$ de deux manières différentes.

Soit λ une valeur propre de Γ et $U = (u_1 \dots u_n)^T$ un vecteur propre associé. On calcule $U^T \Gamma U$ de deux manières. D'abord $U^T \Gamma U = \lambda U^T U = \lambda \|U\|^2$, mais aussi :

$$U^T \Gamma U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i u_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(u_i X_i, u_j X_j) = \mathbb{V}(u_1 X_1 + \dots u_n X_n).$$

$$\text{Ainsi } \lambda = \frac{\mathbb{V}(u_1 X_1 + \dots u_n X_n)}{\|U\|^2} \geq 0.$$

Remarquons que $\lambda = 0$ si, et seulement si $V(u_1 X_1 + \dots u_n X_n) = 0$, i.e. si, et seulement si, $u_1 X_1 + \dots u_n X_n$ est constante presque-sûrement.

On en déduit donc que les valeurs propres de Γ sont toutes strictement positives si, et seulement si, toute combinaison linéaire des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ n'est pas constante presque-sûrement.

SUJET Maths Approfondies 10

Exercice principal Maths Approfondies 10

Cet exercice traite de certains liens entre une variable aléatoire et des transformations affines de celle-ci et est composé de questions en grande partie indépendantes. Dans l'exercice toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Dans la suite c désigne un réel **non nul** et a un réel non-nul différent de 1 et de -1.

1. Question de cours : Théorème central limite.

2. Soit $c \in \mathbb{R}$.

- a) Donner un exemple de variable aléatoire X quasi-certaine telle que X et $c - X$ suivent la même loi.
- b) Donner un exemple de variable aléatoire X bornée et à densité telle que X et $c - X$ suivent la même loi.
- c) Donner un exemple de variable aléatoire X non-bornée et à densité telle que X et $c - X$ suivent la même loi.
- d) Donner un exemple de variable aléatoire X n'admettant pas d'espérance telle que X et $c - X$ suivent la même loi.

3. On se propose de montrer dans cette question qu'il n'existe pas de variable aléatoire X telle que X et $c + X$ suivent la même loi.

On suppose par l'absurde qu'une telle variable aléatoire X existe et on note F sa fonction de répartition.

- a) Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel t , l'égalité : $F(t) = F(t - nc)$.
- b) En déduire une contradiction et conclure.

4. On suppose dans cette question qu'il existe une variable aléatoire X qui suit la même loi que la variable aléatoire $aX + c$. On pose $\alpha = \frac{c}{1-a}$ et $Y = X - \alpha$.

- a) Etablir que les variables aléatoires Y et aY suivent la même loi.
- b) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a : $P(|Y| \geq t) = 0$.
- c) Que peut-on en déduire ?

5. Dans cette question on suppose que la variable aléatoire X est telle que, pour tout entier n non nul et tout n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de X , il existe $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que les variables aléatoires $X_1 + \dots + X_n$ et $a_n X + b_n$ suivent la même loi.

Etablir que si X admet une variance non nulle alors X suit une loi normale.

Solution :

1. Cours.

2. a) $X = \frac{c}{2}$ convient.

b) Toute v.a. de densité symétrique par rapport à $\frac{c}{2}$ convient. Ainsi, par exemple, $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, c])$ convient.

c) $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{c}{2}, 1\right)$ convient par exemple .

d) X ayant pour densité $f(x) = \frac{\pi^{-1}}{1 + (x - \frac{c}{2})^2}$ convient (ou tout autre densité symétrique par rapport à $\frac{c}{2}$ qui décroît à la vitesse de $k \times \frac{1}{x^2}$).

3.a) Pour tout réel t on a :

$$F(t) = P(X \leq t) = P(c + X \leq t) = P(X \leq t - c) = F(t - c)$$

et ainsi, par un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad F(t) = F(t - nc)$$

b) En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient (du fait que $c \neq 0$) :

$$F = 0 \text{ si } c > 0$$

$$F = 1 \text{ si } c < 0$$

Dans le deux cas F n'est pas une fonction de répartition et donc :

il n'existe pas de v.a. X telle que $X \stackrel{loi}{\sim} c + X$.

4. a) $X \stackrel{loi}{\sim} aX + c$ et $\alpha = a\alpha + c$ d'où, en soustrayant : $X - \alpha \stackrel{loi}{\sim} a(X - \alpha)$.

Bilan :

$$Y \stackrel{loi}{\sim} aY$$

b) Soit $t > 0$. On a :

$$P(|Y| \geq t) = P(|aY| \geq t) = P\left(|Y| \geq \frac{t}{|a|}\right)$$

et par un raisonnement par récurrence sur l'entier m :

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad P(|Y| \geq t) = P\left(|Y| \geq \frac{t}{|a|^m}\right)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on $-\infty$ selon la position de $|a|$ par rapport à 1 on obtient :

$$\forall t > 0 \quad P(|Y| \geq t) = 0$$

c) On en déduit que $Y = 0$ p.s et donc :

$$\text{si } X \stackrel{\text{loi}}{\sim} aX + c \text{ alors } X = \frac{c}{1-a} \text{ p.s.}$$

5. Posons $m = E(X)$ et $\sigma^2 = V(X) > 0$. On a alors :

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(a_n X + b_n) \Leftrightarrow nm = a_n m + b_n.$$

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(a_n X + b_n) \Leftrightarrow n\sigma^2 = a_n^2 \sigma^2.$$

D'où nécessairement : $a_n = \sqrt{n}$ et $b_n = (n - \sqrt{n})m$.

Il s'ensuit que :

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \text{ suit la même loi que } \frac{X - m}{\sigma}$$

D'après le théorème central limite on a donc :

$$\frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

D'où en conclusion :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 10

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que l'endomorphisme :

$$\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \phi_A(M) = AM$$

est diagonalisable.

Solution :

On commence par remarquer que si (v_i) est une base de $\mathbb{R}^n$ alors $(v_i {}^t v_j)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: c'est clair pour la base canonique (e_i) et pour une base quelconque, on a $v_i {}^t v_j = P e_i {}^t e_j {}^t P$ où P est la matrice de passage, en notant que $M \rightarrow P M {}^t P$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si on considère une base de vecteurs propres (v_i) de A alors $(v_i {}^t v_j)$ est une base de vecteurs propres de ϕ_A .

SUJET Maths Approfondies 11

Exercice principal Maths Approfondies 11

Soit D la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$D = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha\beta - \gamma^2 \geq 0 \text{ et } \alpha + \beta \geq 0\}.$$

Considérons maintenant les parties de $\mathbb{R}^2$:

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| < 1 \text{ et } |x-y| < 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| \leq 1 \text{ et } |x-y| \leq 1\},$$

et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 vérifiant

$$a\partial_{1,1}^2 f(x, y) + b\partial_{2,2}^2 f(x, y) + 2c\partial_{1,2}^2 f(x, y) + d\partial_1 f(x, y) + e\partial_2 f(x, y) < 0 \text{ pour tout } (x, y) \in U,$$

où a, b, c, d et e sont des constantes réelles avec $(a, b, c) \in D$.

1. Question de cours : rappeler les conditions nécessaires d'ordre 1 et 2 pour qu'une fonction f admette un minimum local en un point x_0 dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que B est borné.
3. Montrer que $a \geq 0$ et $b \geq 0$.
4. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in D$. Montrer que

$$\alpha a + \beta b + 2\gamma c \geq 0.$$

5. Justifier pourquoi il existe au moins un point $(x_0, y_0) \in B$ tel que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \text{ pour tout } (x, y) \in B$$

6. Montrer que si $(x_0, y_0) \in U$ alors nécessairement

$$(\partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0), \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0), \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0)) \in D.$$

7. En déduire que nécessairement $(x_0, y_0) \notin U$.

Solution :

1. Voir programme.

2. Soit $(x, y) \in B$. On pose $u = x + y$ et $v = x - y$. On a

$$|x| = \left| \frac{u+v}{2} \right| \leq \frac{1}{2}(|u| + |v|) \leq 1.$$

$$|y| = \left| \frac{u-v}{2} \right| \leq \frac{1}{2}(|u| + |v|) \leq 1.$$

Donc B est borné.

3. On a $ab \geq c^2$. Donc a et b sont du même signe. Puisque $a + b \geq 0$, on en déduit que $a \geq 0$ et $b \geq 0$.
4. Si $a = 0$, on a forcément $c = 0$ et $\alpha a + \beta b + 2\gamma c = \beta b \geq 0$ car $b \geq 0$ et $\beta \geq 0$. De même si $\alpha = 0$. Supposons maintenant que $a > 0$ et $\alpha > 0$. On a

$$b \geq \frac{c^2}{a} \text{ et } \beta \geq \frac{\gamma^2}{\alpha}.$$

D'où

$$\alpha a + \beta b + 2\gamma c \geq \alpha a + \frac{\gamma^2}{\alpha} \cdot \frac{c^2}{a} + 2\gamma c = \alpha a \left(1 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \cdot \frac{c^2}{a^2} + 2 \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{c}{a} \right) = \alpha a \left(\frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{c}{a} + 1 \right)^2 \geq 0.$$

5. f est une fonction continue sur le fermé borné B . Elle est donc bornée et atteint ses bornes.
6. Si $(x_0, y_0) \in U$ alors nécessairement $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ et les valeurs propres de la hessienne

$$\begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0) & \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0) \\ \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0) & \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

sont positives. Or la somme de ces deux valeurs propres est égale à la trace de cette matrice

$$0 \leq \lambda_1 + \lambda_2 = \partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0) + \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0).$$

De même leur produit doit être positif :

$$0 \leq \lambda_1 \lambda_2 = \partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0) \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0) - (\partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0))^2.$$

D'où le résultat demandé.

7. On raisonne par l'absurde. Si $(x_0, y_0) \in U$, alors $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ et on a

$$(\partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0), \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0), \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0)) \in D.$$

Il résulte d'après la question 4 que

$$a \partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0) + b \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0) + 2c \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0) \geq 0.$$

Cette inégalité contredit l'hypothèse sur f puisque

$$\begin{aligned} 0 &> a \partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0) + b \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0) + 2c \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0) + d \partial_1 f(x_0, y_0) + e \partial_2 f(x_0, y_0) \\ &= a \partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0) + b \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0) + 2c \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 11

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

Pour tout entier non nul n on pose :

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) X_k$$

Etudier la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$.

Solution :

Posons $I = \int_0^1 f(x)dx$ et $J = \int_0^1 f^2(x)dx$. On a :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) E(X_k) = p \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p \cdot I \\ V(Y_n) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n f^2\left(\frac{k}{n}\right) V(X_k) = \frac{p(1-p)}{n} \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^2\left(\frac{k}{n}\right) \right)}_{\rightarrow J} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Montrons alors que : $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} pI$

Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$|Y_n - pI| \leq |Y_n - E(Y_n)| + |E(Y_n) - pI|$$

et donc :

$$[|Y_n - pI| \geq \varepsilon] \subset \left[|Y_n - E(Y_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right] \cup \left[|E(Y_n) - pI| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

Il en résulte que :

$$0 \leq P(|Y_n - pI| \geq \varepsilon) \leq \underbrace{P\left(|Y_n - E(Y_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\leq \frac{V(Y_n)}{(\varepsilon/2)^2} \rightarrow 0} + \underbrace{P\left(|E(Y_n) - pI| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\text{nul pour } m \text{ grand}}$$

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - pI| \geq \varepsilon) = 0$$

et donc :

$$Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} pI$$

SUJET Maths Approfondies 12

Exercice principal Maths Approfondies 12

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Question de cours : Donner les deux premiers termes des développements limités de $\sin(x)$ et $(1+x)^2$ lorsque x tend vers 0.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Montrer que (u_n) converge vers une limite finie l , que l'on déterminera.
4. Proposer un programme Python `indice(u0,eps)`, qui prend en paramètre le premier terme $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la suite et un paramètre ϵ . Ce programme retourne le plus petit entier k tel que $|u_k - l| < \epsilon$.
5. Montrer que la suite $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ converge, et donner la valeur de sa limite.
6. Soit (x_n) une suite réelle de limite $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $y_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k}{n}$ converge vers x .
7. Déterminer un équivalent de (u_n) , lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la nature de la série de terme général (u_n) .

Solution :

Solution :

1. p20 EC1. $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $(1+x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + o(x)$.
2. Montrons le résultat par récurrence sur n .
Initialisation : $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par hypothèse.
Hérédité : Supposons le résultat vrai pour $n \geq 1$. On a donc que $u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
La fonction sinus étant croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $u_{n+1} = \sin(u_n) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Considérons la fonction f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) := \sin(x) - x$. f est dérivable, et $f'(x) = 1 - \cos(x) > 0$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, f est strictement

croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], f(x) > f(0) = 0$. Cela implique que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) < x$, i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.

(u_n) étant minorée par 0 et décroissante, donc elle converge vers une limite finie $l \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En passant à la limite, par continuité de la fonction sinus, on en déduit que $\sin(l) = l$. Or, $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \neq x$. On a donc nécessairement $l = 0$.

4. On propose par exemple le programme suivant :

```
import numpy
def indice(u0,eps):
    u=u0
    k=0
    while abs(u) >= eps:
        u= numpy.sin(u)
        k+=1
    return k

print(indice(1,1e-2))
>>> 29992
```

5. On remarque que $v_n = \frac{u_n^2 - \sin(u_n)^2}{u_n^2 \sin(u_n)^2}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on effectue le développement limité des sinus, à l'aide de la question 1).

$$\begin{aligned}
 v_n & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{u_n^2 - (\sin(u_n))^2}{u_n^2 \sin(u_n)^2} \\
 & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{u_n^2 - \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^2}{u_n^4 + o(u_n^4)} \\
 & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{u_n^2 - u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^2}{u_n^4 + o(u_n^4)} \\
 & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{u_n^2 - u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right)}{u_n^4 + o(u_n^4)}
 \end{aligned}$$

Où l'on a effectué le développement limité de $(1+x)^2$, avec $x = \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)$ qui tend bien vers 0. lorsque n tend vers $+\infty$. On a donc que

$$\begin{aligned}
 v_n & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\frac{u_n^4}{3} + o(u_n^4)}{u_n^4 + o(u_n^4)} \\
 & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3} \left(\frac{u_n^4 + o(u_n^4)}{u_n^4 + o(u_n^4)} \right) \\
 & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Ceci montre que (v_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{3}$.

6. Soit $\epsilon > 0$ fixé, on veut montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |y_n - x| < \epsilon$$

Puisque que (x_n) converge vers x ,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

Or, $\forall n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} y_n - x &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k}{n} - x \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k - nx}{n} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (x_k - x)}{n} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} (x_k - x) + \sum_{k=n_0}^{n-1} (x_k - x)}{n} \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, $\forall n \geq n_0, |y_n - x| \leq \frac{1}{n} K_{n_0} + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n-1} |x_k - x|$, où $K_{n_0} =$

$\sum_{k=0}^{n_0-1} |x_k - x|$ est une somme finie, indépendante de n . Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} K_{n_0} = 0$,

donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \frac{1}{n} K_{n_0} < \frac{\epsilon}{2}$. De plus, $\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n-1} |x_k - x| < \frac{n - n_0}{n} \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2}$.

Ainsi, en prenant $N = \max\{n_0, n_1\}$, on a que

$$\forall n \geq N, |y_n - x| < \epsilon$$

7. On remarque que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right)$ par télesco-

page. Par les deux questions précédentes, on a que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right) =$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n^2} = \frac{1}{3}$, donc $nu_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3$, d'où

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

La série de terme général u_n est donc divergente, par critère de comparaison des séries à termes positifs.

Pour information, un petit programme similaire a celui de la question 4) pour

la suite $\sqrt{\frac{3}{n}}$ renvoie un indice similaire.

```
def indice2(eps):  
    k=1  
    u= numpy.sqrt(3)  
    while abs(u) >= eps:  
        u= numpy.sqrt(3/k)  
        k+=1  
    return k
```

```
print(indice2(1e-2))  
>>> 30002
```

Exercice sans préparation Maths Approfondies 12

Soient n un entier positif non nul et $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon d'une variable aléatoire X de loi à densité uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$ où $\theta \in]0, +\infty[$ est un paramètre inconnu qu'on veut estimer.

1. Proposer un estimateur T_n de θ à l'aide de la moyenne empirique. Vérifier qu'il est sans biais et convergent.
2. On considère un estimateur sans biais M_n de la forme $M_n = c(n)\text{Max}(X_1, \dots, X_n)$ où $c(n)$ est une constante qui ne dépend que de n . Que vaut $c(n)$?
3. Comparer la qualité des estimateurs T_n et M_n .

Solution :

1. Comme $\theta = 2\mathbb{E}(X)$, on prend $T_n = 2\overline{X}_n = \frac{2}{n}(X_1 + \dots + X_n)$. On a $\mathbb{E}(X) = \theta/2$ donc $\mathbb{E}(T_n) = \theta$, de plus $\mathbb{V}(X) = \theta^2/12$ donc $\mathbb{V}(T_n) = \theta^2/3n$, on conclut que T_n est un estimateur sans biais convergent.
2. La fonction de répartition de la variable aléatoire $\text{Max}(X_1, \dots, X_n)$ est $F(x) = (x/\theta)^n$ sur $[0, \theta]$ donc la densité est donnée par

$$f(x) = n\theta^{-n}x^{n-1}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)$$

et son espérance vaut donc $\frac{n\theta}{n+1}$. Pour obtenir un estimateur sans biais, on prend $c(n) = \frac{n+1}{n}$.

3. On a :

$$\mathbb{E}(M_n^2) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \int_0^\theta n\theta^{-n}x^{n+1}dx = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{n\theta^2}{n+2} = \frac{(n+1)^2\theta^2}{n(n+2)}$$

$$\text{d'où } \mathbb{V}(M_n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

On constate que la vitesse de convergence de M_n est en $1/n^2$ alors que celle de T_n est en $1/n$. Donc M_n est plus performant que T_n .

SUJET Maths Approfondies 13

Exercice principal Maths Approfondies 13

Dans l'exercice toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une variable aléatoire X de fonction de répartition F et admettant une densité f .

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et suivant la même loi que X .

On admet l'existence de variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ telles que, pour tout ω de Ω , les réels $Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_n(\omega)$ constituent un réarrangement par ordre croissant des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$, de telle sorte que, pour tout ω de Ω :

$$Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega) \leq \dots \leq Y_n(\omega) \quad \text{et} \quad \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} = \{Y_1(\omega), \dots, Y_n(\omega)\}$$

Pour tout réel x et tout entier non nul n , on note $S_n(x)$ la variable aléatoire définie par :

$$S_n(x) = \text{card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : X_k \leq x\}$$

1. Question de cours. Lois binomiales : définition, propriétés et allure de la fonction de répartition de la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{2}$.
2. Donner, pour tout entier n non nul, la loi de $S_n(x)$.
3. (a) Comparer les événements : $[Y_k \leq x]$ et $[S_n(x) \geq k]$.
(b) En déduire, pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, une expression de $F_{Y_k}(x)$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).
(c) En déduire que, pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire Y_k est à densité et que la fonction f_{Y_k} définie pour tout x réel par :

$$f_{Y_k}(x) = k \binom{n}{k} (F(x))^{k-1} (1 - F(x))^{n-k} f(x)$$

est une densité de Y_k .

4. Montrer que si X admet une espérance, alors pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, Y_k admet aussi une espérance.
5. Dans cette question on suppose que $n = 2\ell + 1$ est un entier impair et que X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $W_n = Y_{\ell+1}$.
Etablir que $E(W_n) = \frac{1}{2}$ et commenter le résultat obtenu.

Solution :

1. Cours.
2. $S_n(x) \hookrightarrow B(n, F(x))$.
3. (a) $[Y_k \leq x] = [S_n(x) \geq k]$.
 (b) D'après l'égalité ci-dessus on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_{Y_k}(x) &= P(S_n(x) \geq k) \\ &= \sum_{j=k}^n P(S_n(x) = j) \\ F_{X_k}(x) &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (F(x))^j (1 - F(x))^{n-j} \end{aligned}$$

- (c) La v.a. Y_k est donc à densité puisque sa fonction de répartition a au moins les mêmes régularités que F . Par dérivation une densité de Y_k est donnée par :

$$\begin{aligned} f_{Y_k}(x) &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} [j f(x) (F(x))^{j-1} (1 - F(x))^{n-j} - (n - j) f(x) (F(x))^j (1 - F(x))^{n-j-1}] \\ &= k \binom{n}{k} f(x) (F(x))^{k-1} (1 - F(x))^{n-k} + \sum_{j=k+1}^n j \binom{n}{j} f(x) (F(x))^{j-1} (1 - F(x))^{n-j} \\ &\quad - \sum_{j=k}^{n-1} (n - j) \binom{n}{j} f(x) F(x)^j (1 - F(x))^{n-j-1} \\ &= k \binom{n}{k} (F(x))^{k-1} (1 - F(x))^{n-k} f(x) \end{aligned}$$

du fait que :

$$\sum_{j=k}^{n-1} (n - j) \binom{n}{j} f(x) F(x)^j (1 - F(x))^{n-j-1} = \sum_{j=k+1}^n (n - j + 1) \binom{n}{j-1} f(x) F(x)^{j-1} (1 - F(x))^{n-j}$$

et de l'égalité :

$$(n - j + 1) \binom{n}{j-1} = j \binom{n}{j}$$

4. Si X admet une espérance alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ est absolument convergente. Or.

$$0 \leq |x f_{Y_k}(x)| \leq k \binom{n}{k} |x f(x)|$$

puisque $|F(x)| \leq 1$ et $|1 - F(x)| \leq 1$.

La convergence absolue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{Y_k}(x) dx$ en résulte.

Bilan : $E(|X|) < +\infty \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad E(|Y_k|) < +\infty$.

5. D'après ce qui précède une densité de W_n est donnée par

$$g(x) = (\ell + 1) \binom{2\ell + 1}{\ell + 1} x^\ell (1 - x)^\ell \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$$

On a ainsi : $g(x) = g(1 - x)$ et donc $\int_0^1 x g(x) dx = \int_0^1 (1 - u) g(u) du$ soit :

$$E(W_n) = 1 - E(W_n)$$

et donc $E(W_n) = \frac{1}{2}$.

Le résultat n'est pas surprenant (hormis la valeur exacte $\frac{1}{2} \dots$) du fait que W_n est la médiane de $X_1, \dots, X_{2n+1}$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 13

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On considère l'application définie par $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

1. Proposer un programme Python `F(x,...)` qui permet de calculer une valeur approchée de cette intégrale. Ce programme peut prendre plusieurs paramètres, mais contiendra à minima le paramètre `x` qui représente le réel x .
2. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

Solution :

1. On propose une méthode de Monte-Carlo, pour rester dans l'esprit du programme... Cette fonction renvoie un tuple contenant l'estimation de l'intégrale et le demi-intervalle de confiance à 95%.

```
import numpy.random
import math

def F_MC(x,N):
    t = x+(x)*numpy.random.random_sample(N)
    p = 1.0/x
    f = numpy.exp(-t**2)
    moyenne = f.sum()/(N*p)
    g = f*f
    variance = g.sum()*1.0/(N*p*p)-moyenne*moyenne
    return (moyenne,math.sqrt(variance/N)*1.96)

print(F_MC(2,100))
>>> (0.005036331972694381, 0.0015823957466369176)
```

On peut aussi proposer par exemple le programme suivant, implémentant la méthode des rectangles :

```
import numpy

def F(x,N):
    t = numpy.linspace(x,2*x,N)
    f = numpy.exp(-t**2)
    return abs(f.sum()*x/N)

print(F(2,100))
>>> 0.00428968988573678
```

On remarque que l'on tend très vite vers 0.

2. On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$. Par conséquent, $\exists A > 0, \forall t > A, t^2 e^{-t^2} < 1$. Ou encore, $\forall t > A, 0 < e^{-t^2} < \frac{1}{t^2}$.

Ainsi, en intégrant, $\forall x > A, 0 < \int_x^{2x} e^{-t^2} dt < \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt$. Or, $\int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{2x} = \frac{1}{2x}$.

Par théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

3. *Question subsidiaire* : Déterminer la dérivée de F .

$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) = 2e^{-(2x)^2} - e^{-x^2} = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.

SUJET Maths Approfondies 14

Exercice principal Maths Approfondies 14

1. **Question de cours** : Définition et propriétés de la moyenne empirique.
2. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

$$P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

Notons Z la variable aléatoire égale à n si n est le plus petit entier tel que $X_n = 0$ et $Z = +\infty$ sinon.

- (a) Pour $n \geq 0$, calculer $P(Z = n)$ puis $P(Z > n)$. En déduire que Z est presque sûrement finie i.e. $P(Z = +\infty) = 0$.
 - (b) Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit T la variable aléatoire égale à n si n est le plus petit entier tel que $X_{n-1} = X_n = 1$ et $T = +\infty$ sinon.
 - (a) Calculer $P(T = 1)$, $P(T = 2)$, $P(T = 3)$ et $P(T = 4)$.
 - (b) Montrer que $P(T > n) \leq (3/4)P(T > n - 2)$ pour tout $n > 2$. En déduire que T est presque sûrement finie
 - (c) Montrer que pour tout $n \geq 3$:

$$P(T = n) = \frac{1}{2}P(T = n - 1) + \frac{1}{4}P(T = n - 2)$$

- (d) Montrer que $E(T)$ est finie et déterminer $E(T)$ (On ne demande pas de calculer la loi de T).
4. On suppose le paramètre p de la loi de Bernoulli des variables (X_n) quelconque. Donner un programme python pour estimer $E(T)$ à partir d'un échantillon de la variable T .

Solution :

1. **Question de cours** : Moyenne empirique. ECG2 p.23. (estimateur sans biais et convergent)

$$(a) \quad P(Z = n) = P(X_0 = 1, \dots, X_{n-1} = 1, X_n = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$P(Z > n) = 1 - P(Z \leq n) = 1 - \sum_{i \leq n} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

On a $\{Z = +\infty\} \subset \{Z > n\}$ donc

$$P(Z = +\infty) \leq P(Z > n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

pour tout n donc $P(Z = +\infty) = 0$.

(b)

$$E(Z) = \sum_{n \geq 0} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1/4 \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1/4 \times \frac{1}{(1 - 1/2)^2} = 1$$

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \sum_{n \geq 0} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 =$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{2}{(1 - 1/2)^3} - \frac{1}{(1 - 1/2)^2} \right) - 1 = 2$$

2. (a)

$$P(T = 1) = P(X_0 = X_1 = 1) = 1/4$$

$$P(T = 2) = P(X_0 = 0, X_1 = X_2 = 1) = 1/8,$$

$$P(T = 3) = P(X_1 = 0, X_2 = X_3 = 1) = 1/8$$

$$P(T = 4) = P(X_0 X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = X_4 = 1) = 3/4 \times 1/8 = 3/32$$

(b) On a $\{T > n\} \subset \{T > n - 2, X_{n-1} X_n = 0\}$ et les événements $\{T > n - 2\}$ et $\{X_{n-1} X_n = 0\}$ sont indépendants, donc

$$P(T > n) \leq (3/4)P(T > n - 2)$$

Posons $u_n = P(T > n)$, on a $u_n \leq (3/4)u_{n-2}$ donc $\lim u_n = 0$.

$P(T = +\infty) \leq u_n$ pour tout n donc $P(T = +\infty) = 0$.

(c) Soit $n \geq 3$,

$$P(T = n) = \frac{1}{2}P(T = n|X_0 = 0) + \frac{1}{4}P(T = n|X_1 = 1, X_0 = 1)$$

$$+ \frac{1}{4}P(T = n|X_1 = 0, X_0 = 1)$$

Comme $P(T = n|X_0 = 0) = P(T = n - 1)$, $P(T = n|X_1 = 0) = P(T = n - 2)$ et $P(T = n|X_1 = 1, X_0 = 1) = 0$ pour $n > 2$, on a

$$P(T = n) = \frac{1}{2}P(T = n - 1) + \frac{1}{4}P(T = n - 2)$$

- (d) $P(T > n) \leq (3/4)^{n/2}$ d'où $P(T = n) \leq (3/4)^{(n-1)/2}$, donc la série $E(T) = \sum_{n \geq 1} nP(T = n)$ converge.

$$E(T) = \sum_{n \geq 1} nP(T = n) = \frac{1}{4} + \sum_{n \geq 2} nP(T = n)$$

$$E(T) = \frac{1}{4} + \sum_{n \geq 2} \left[\frac{1}{2}(n-1)P(T = n-1) + \frac{1}{4}(n-2)P(T = n-2) \right] +$$

$$\sum_{n \geq 2} \left[\frac{1}{2}P(T = n-1) + \frac{1}{4}2P(T = n-2) \right]$$

$$E(T) = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}E(T) \Rightarrow E(T) = 5$$

3. import random

```
def estimer_instant_deux_succes(probabilite_succes, taille_echantillon, nombre_simulations):
    # Estime l'instant moyen de deux succes consecutifs dans une suite de variables aleatoires de Bernoulli
    instants_deux_succes = []

    for _ in range(nombre_simulations):
        bernoulli_variables = [1 if random.random() < probabilite_succes else 0 for _ in range(taille_echan]

        for i in range(1, taille_echantillon):
            if bernoulli_variables[i] == 1 and bernoulli_variables[i - 1] == 1:
                instants_deux_succes.append(i)
                break

    if instants_deux_succes:
        moyenne_instants = sum(instants_deux_succes) / len(instants_deux_succes)
        return moyenne_instants
    else:
        return -1 # Retourne -1 si deux succes consecutifs n'ont pas ete trouves dans les simulations

# Parametres
probabilite_succes = 0.5 # Probabilite de succes
taille_echantillon = 100 # Taille de l'echantillon
nombre_simulations = 1000 # Nombre de simulations

# Estimation de l'instant moyen de deux succes consecutifs
instant_moyen = estimer_instant_deux_succes(probabilite_succes, taille_echantillon, nombre_simulations)

if instant_moyen != -1:
    print(f"L'instant moyen de deux succes consecutifs est estime a environ {instant_moyen:.2f}.")
else:
    print("Deux succes consecutifs n'ont pas ete observes dans les simulations.")
    L'instant moyen de deux succes consecutifs est estime a environ 5.07.
```

Exercice sans préparation Maths Approfondies 14

Soit (x_n) une suite réelle qui converge vers le réel m . On pose :

$$\forall (p, k) \in (\mathbb{N}^*)^2, u_{p,k} = \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+k}\}$$

1. Ecrire un programme Python **u(x,p,k)** qui renvoie le terme $u_{p,k}$. Ce programme prend en paramètres la suite (x_n) et les entiers p et k . Pour un entier n , on accèdera au terme x_n par l'appel **x(n)**.
2. Pour k fixé, on pose $w_p = u_{p,k}$. Etudier la suite (w_p) .
3. Pour p fixé, on pose $v_k = u_{p,k}$. Etudier la suite (v_k) et montrer qu'elle converge.

Solution :

1. On propose le programme suivant :

```
def u(x,p,k):  
    i=2  
    u=x(p+1)  
    while i<k+1:  
        if x(p+i) >u:  
            u = x(p+i)  
    return u
```

2. Ecrivons d'abord que la suite (x_n) converge vers m .

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad m - \epsilon < x_n < m + \epsilon$$

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\forall p \geq n_0, \quad p+1, p+2, \dots, p+k$ sont aussi plus grand que n_0 . On peut donc appliquer la définition précédente :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, m - \epsilon < x_{p+i} < m + \epsilon$$

C'est en particulier le cas du maximum des $(x_{p+i})_{i \in \{1, \dots, k\}}$. Donc on a que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq n_0, \quad m - \epsilon < w_p < m + \epsilon$$

Ce qui veut exactement dire que (w_p) converge vers m .

3. Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $v_{k+1} = \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+k+1}\} \geq \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+k}\} = v_k$. La suite (v_k) est donc croissante. D'autre part, (x_n) est convergente, donc majorée : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq M$. On a donc en particulier que $v_k \leq M$.

Puisqu'elle est croissante et majorée, la suite (v_k) converge vers une limite dépendant de p , qu'on note m_p .

4. *Question subsidiaire* : Montrer que la suite (m_p) converge et donner sa limite.

On réutilise la définition de la convergence de (x_n) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall p \geq n_0, \quad m - \epsilon < \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+k}\} < m + \epsilon$$

On peut donc passer à la limite sur k , dans cette inégalité. Lorsque k tend vers $+\infty$,

$$m - \epsilon \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+k}\} \leq m + \epsilon$$

On remarquera le passage aux inégalités larges. Ceci nous assure que la limite de (m_p) existe et vaut m . En effet,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq n_0, \quad m - \epsilon < m_p < m + \epsilon$$

SUJET Maths Approfondies 15

Exercice principal Maths Approfondies 15

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n > 1$. On note (E) l'espace vectoriel des endomorphismes de E . Soit f un endomorphisme tel que $\forall k < n, f^k \neq 0$ et $f^n = 0$. On appelle *commutant de f* l'ensemble :

$$\mathcal{C}(f) = \{ g \in (E) \mid f \circ g = g \circ f \}$$

1. Question de cours : Donner la définition d'une famille libre d'un espace vectoriel.
2. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous espace vectoriel de (E) .
3. Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$. Montrer que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .
4. Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$. Soit $\phi_a : \mathcal{C}(f) \mapsto E$ définie par $\phi_a(g) = g(a)$. Montrer que ϕ_a est un isomorphisme.
5. En déduire que $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$.

Solution :

Solution :

1. EC1, p9.
2. Tout d'abord, il est clair que $\mathcal{C}(f) \subset (E)$. Ensuite, l'endomorphisme nul commute bien avec f .

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et $(g, h) \in \mathcal{C}(f)^2$. Alors, $f \circ (\lambda g + \mu h) = \lambda(f \circ g) + \mu(f \circ h) = \lambda(g \circ f) + \mu(h \circ f) = (\lambda g + \mu h) \circ f$. Ainsi, $\mathcal{C}(f)$ est bien un sous espace vectoriel de (E) .

3. Tout d'abord, on dispose bien de $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$, puisque $f^{n-1} \neq 0$. Montrons que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est libre. Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(a) = 0$.

Soit $j \in \{0, \dots, n-1\}$. On applique f^{n-1-j} , pour obtenir n équations. Ainsi,

$$\forall j \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n-1-j+i}(a) = 0$$

En remarquant que $\forall k \geq n, f^k(a) = 0$, on obtient successivement que $\lambda_{n-1} = 0$, puis $\lambda_{n-2} = 0$, jusqu'à $\lambda_0 = 0$. Ainsi, la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est libre dans E .

Cette famille contient n éléments, qui est la dimension de E . la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est donc une base de E .

4. — Montrons d'abord que ϕ_a est une application linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et $(g, h) \in \mathcal{C}(f)^2$. On a que $\phi_a(\lambda g + \mu h) = \lambda g(a) + \mu h(a) = \lambda \phi_a(g) + \mu \phi_a(h)$, d'où la linéarité.
- Soit $g \in \ker(\phi_a)$. Par définition, $g(a) = 0$. Mais on a aussi que $g(f(a)) = f(g(a)) = f(0) = 0$. En itérant ce procédé, on montre que $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, g(f^i(a)) = 0$. On a donc montré que g est nul sur la base $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$. Ainsi, g est l'application nulle (i.e. $g = 0_{\mathcal{C}(f)}$). Ceci prouve l'injectivité de ϕ_a .
- Soit $b \in E$. On considère $g \in (E)$ définie telle que

$$g(a) = b, \quad g(f(a)) = f(b), \quad \dots, \quad g(f^{n-1}(a)) = f^{n-1}(b)$$

L'application g considérée est bien définie, puisqu'elle l'est sur une base de E . De plus, elle vérifie que $g \circ f = f \circ g$ sur cette base. On a donc que $g \in \mathcal{C}(f)$ et que $g(a) = b$. Ceci prouve la surjectivité de ϕ_a .

Tout ceci montre que ϕ_a est un isomorphisme.

5. Remarquons tout d'abord que $\text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1}) \subset \mathcal{C}(f)$. En effet, toute combinaison linéaire d'applications de $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ commute avec f . Ensuite, puisque ϕ_a est un isomorphisme, $\dim(\mathcal{C}(f)) = \dim(E) = n$. Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut que $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 15

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et suivant chacune la loi normale centrée réduite.

Soient a un réel et Δ la droite d'équation cartésienne :

$$\Delta : y = ax$$

On note Y la variable aléatoire égale au carré de la distance de $M = (X_1, X_2)$ à Δ *i.e.* :

$$Y = \left(d(M, \Delta)\right)^2$$

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Y .

Solution :

Soit

$$\vec{v} = (a, -1)$$

un vecteur normal à Δ .

En notant $p_{\Delta^\perp}$ la projection orthogonale sur $\Delta^\perp$ on a :

$$p_{\Delta^\perp}(M) = \left\langle \overrightarrow{OM}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{aX_1 - X_2}{\sqrt{1+a^2}} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Il en résulte que :

$$Y = \|p_{\Delta^\perp}(M)\|^2$$

et ainsi

$$E(Y) = \frac{E((aX_1 - X_2)^2)}{1 + a^2}$$

Or, par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 et par stabilité des lois normales, on a :

$$aX_1 - X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, a^2 + 1)$$

et ainsi :

$$E((aX_1 - X_2)^2) = V(aX_1 - X_2) = 1 + a^2$$

Finalement :

$$E(Y) = 1$$