

# SUJET Maths Approfondies 1

## Exercice principal Maths Approfondies 1

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  telles que  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  soient des ensembles finis et telles que  $X$  ne soit pas une variable constante.

On considère la fonction  $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto \mathbb{E}((Y - (aX + b))^2) \end{cases}$

1. Question de cours : condition suffisante d'extremum global pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur une partie de  $\mathbb{R}^n$ .
2. (a) Montrer que la fonction  $g$  est correctement définie et montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .  
(b) Montrer que  $g$  admet un unique point critique que l'on notera  $(a_0, b_0)$ .  
On exprimera  $a_0$  à l'aide de  $\mathbb{V}(X)$  et de  $\text{Cov}(X, Y)$  et  $b_0$  à l'aide de  $a_0$ ,  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{E}(Y)$ .  
(c)  $g$  atteint-elle en son point critique un minimum absolu ?

On suppose jusqu'à la fin de l'exercice  $X$  et  $Y$  construits de la manière suivante :

- $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- On suppose connus  $n$  points  $A_1 = (x_1, y_1), \dots, A_n = (x_n, y_n)$  du plan où les réels  $x_1, \dots, x_n$  ne sont pas tous égaux.
- La variable aléatoire  $I$  suit une loi uniforme sur  $[[1, n]]$ .
- On construit le couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  en posant pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $(X(\omega), Y(\omega)) = A_{I(\omega)}$ .

Autrement dit, on choisit un point au hasard dans  $\{A_1, \dots, A_n\}$  et  $(X, Y)$  donne les coordonnées de ce point.

3. On suppose dans cette question seulement que  $n = 3$ ,  $A_1 = (1, 1)$ ,  $A_2 = (2, 1)$ ,  $A_3 = (3, 4)$ .  
(a) Calculer  $\mathbb{V}(X)$ ,  $\text{Cov}(X, Y)$ ,  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{E}(Y)$ .  
(b) Placer sur un même graphe la droite d'équations  $y = a_0x + b_0$  et les trois points  $A_1, A_2$  et  $A_3$ . Commentez.

On se place maintenant dans  $\mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne usuelle et l'on considère les vecteurs  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$  et  $\vec{z} = (1, \dots, 1)$ .

4. On admet provisoirement que :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad g(a, b) = \frac{1}{n} \|\vec{y} - (a\vec{x} + b\vec{z})\|^2$ .  
On pourra poser pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{z}$ .  
(a) Montrer d'une deuxième manière que  $g$  admet un minimum global que l'on interprétera géométriquement.  
(b) Montrer que ce minimum global est atteint en un unique point  $(a_0, b_0)$ .  
(c) Montrer que  $\langle \vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{z}), \vec{x} \rangle = 0$  et  $\langle \vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{z}), \vec{z} \rangle = 0$  et retrouver les équations ayant conduit à la détermination de  $(a_0, b_0)$  à la question 2.

5. Montrer que :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad g(a, b) = \frac{1}{n} \|\vec{y} - (a\vec{x} + b\vec{z})\|^2$ .

---

### Solution :

1. Programme deuxième année page 20.

Si  $\Omega$  est un ouvert convexe de  $\mathbf{R}^n$  et si  $x_0$  est un point critique de  $f$  :

- si pour tout  $x \in \Omega$ ,  $\text{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbf{R}^+$ , alors  $f$  admet un minimum global en  $x_0$ ,
- si pour tout  $x \in \Omega$ ,  $\text{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbf{R}_-$ , alors  $f$  admet un maximum global en  $x_0$ .

2. (a) Les variables étant bornées, elles admettent des moments de tout ordre.

Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $g(a, b) = \mathbb{E}(Y^2 + a^2X + b^2 - 2aXY - 2bY + 2abX)$

Par linéarité  $g(a, b) = \mathbb{E}(X^2)a^2 + b^2 + 2\mathbb{E}(X)ab - 2a\mathbb{E}(XY) - 2b\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y^2)$

$g$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  en tant que fonction polynômiale

(b) La fonction est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert. On cherche ses points critiques.

$$\nabla g((a, b)) = \begin{pmatrix} 2a\mathbb{E}(X^2) + 2b\mathbb{E}(X) - 2\mathbb{E}(XY) \\ 2a\mathbb{E}(X) + 2b - 2\mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla g((a, b)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ssi} \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(XY) \\ \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi} \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) & 0 \\ \mathbb{E}(X) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi} \begin{cases} V(X)a & = & \text{Cov}(X, Y) \\ \mathbb{E}(X)a + b & = & \mathbb{E}(Y) \end{cases}$$

Comme  $X$  n'est pas constante,  $V(X) \neq 0$  et le système admet une solution unique.

On a un unique point critique  $(a_0, b_0)$  :  $a_0 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}$  et  $b_0 = \mathbb{E}(Y) - a_0\mathbb{E}(X)$

(c) La fonction est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert convexe  $(\mathbb{R}^2)$ .

$$\nabla^2 g((a, b)) = 2 \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) & 1 \end{pmatrix} = 2M \text{ ne dépend pas de } (a, b).$$

On cherche les valeurs propres de  $M$ ,  $M - \lambda I = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X^2) - \lambda & \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) & 1 - \lambda \end{pmatrix}$ .

$\lambda$  est une valeur propre de  $M$  ssi  $(\mathbb{E}(X^2) - \lambda)(1 - \lambda) - \mathbb{E}^2(X) = 0$  ssi  $\lambda^2 - (\mathbb{E}(X^2) + 1)\lambda + V(X) = 0$ .  
 $M$  étant symétrique, elle est diagonalisable, le polynôme admet deux racines (éventuellement confondues).

Le produit des deux valeurs propres vaut  $V(X) > 0$ , les deux valeurs propres sont de même signe.

Leur somme vaut  $\mathbb{E}^2(X) + 1$ , elles sont toutes les deux strictement positives.

Les valeurs propres de  $\nabla^2 g((a, b))$  sont donc strictement positives pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Donc  $g$  atteint un minimum global en son unique point critique d'après le cours.

$g$  atteint un unique minimum global.

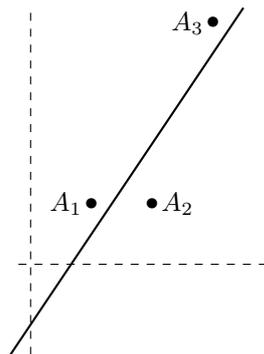
3. (a) •  $X$  suit une loi uniforme sur  $\{1, 2, 3\}$ , donc  $\mathbb{E}(X) = 2$ ,  $V(X) = \frac{3^2 - 1}{12} = \frac{2}{3}$ .

•  $\mathbb{E}(Y) = 2$ .

•  $\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{3}(1 + 2 + 12) = 5$ ,  $\text{Cov}(X, Y) = 5 - 4 = 1$ .

•  $a_0 = \frac{3}{2}$ ,  $b_0 = \mathbb{E}(Y) - a_0\mathbb{E}(X) = -1$ . La droite admet pour équation  $y = \frac{3}{2}x - 1$ .

(b) On trace le graphe, et l'on remarque que la droite semble "au plus proche" des trois points.



C'est logique.  $a_0$  et  $b_0$  ont été choisis pour minimiser  $\mathbb{E}((Y - (aX + b))^2)$ , donc à rendre "petit" l'écart entre  $y_i$  et  $ax_i + b$ .

4. (a) On note  $F = \text{vect}(\vec{x}, \vec{z})$

On note  $p$  le projecteur orthogonal sur  $F$

On a  $\|\vec{y} - p(\vec{y})\| = \min_{\vec{u} \in F} \|\vec{y} - \vec{u}\|$

Or,  $p(\vec{y}) \in F$ , il existe donc  $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $p(\vec{y}) = a_0\vec{x} + b_0\vec{z}$

$\forall \vec{u} \in F, \|\vec{y} - p(\vec{y})\| \leq \|\vec{y} - \vec{u}\|$ ,

ie  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, g((a_0, b_0)) \leq g((a, b))$

$g$  atteint en  $(a_0, b_0)$  un minimum global.

(b)  $\vec{y} - \vec{v} = \vec{y} - p(\vec{y}) + p(\vec{y}) - \vec{v}$

Or,  $\vec{y} - p(\vec{y}) \in F^\perp$  et  $p(\vec{y}) - \vec{v} \in F$

Donc d'après Pythagore

$$\|\vec{y} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{y} - p(\vec{y})\|^2 + \|p(\vec{y}) - \vec{v}\|^2$$

Ainsi  $\|\vec{y} - \vec{v}\| = \|\vec{y} - p(\vec{y})\|$  ssi  $\vec{v} = p(\vec{y})$

Autrement dit  $g((a, b)) = g((a_0, b_0))$  ssi  $a\vec{x} + b\vec{z} = a_0\vec{x} + b_0\vec{z}$ .

Or, les réels  $x_1 \dots x_n$  ne sont pas tous égaux, donc  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  ne sont pas colinéaires, et forment une famille libre.

Ainsi  $g((a, b)) = g((a_0, b_0))$  ssi  $a = a_0$  et  $b = b_0$ .

Le minimum de  $g$  est atteint un unique point

(c) Comme  $\vec{x}, \vec{z} \in F$ ,  $\vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{z}) = \vec{y} - p(\vec{y}) \in F^\perp$ , on a bien :

$$\langle \vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{z}), \vec{x} \rangle = 0 \text{ et } \langle \vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{z}), \vec{z} \rangle = 0.$$

La première équation donne  $\sum_{k=1}^n x_k y_k - a_0 \sum_{k=1}^n x_k^2 - b_0 \sum_{k=1}^n x_k = 0$

ie  $n(\mathbb{E}(XY) - a_0\mathbb{E}(X^2) - b_0\mathbb{E}(X)) = 0$  ie  $\mathbb{E}(XY) - a_0\mathbb{E}(X^2) - b_0\mathbb{E}(X) = 0$

La deuxième équation donne  $\mathbb{E}(Y) - a_0\mathbb{E}(X) - b_0 = 0$

Ce sont bien les équations du premier ordre trouvées lors de l'étude de  $g$ .

5. Par théorème du transfert (avec la fonction  $h : i \mapsto (y_i - (ax_i + b))^2$  et la variable  $I$ .)

$$g(a, b) = \sum_{i=1}^n h(i) \mathbb{P}([I = i]) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (y_i - (ax_i + b))^2$$

$$g(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((y_i - (ax_i + b))^2) = \frac{1}{n} \|\vec{x} - (a\vec{y} + \vec{z})\|^2.$$

# Exercice sans préparation Maths Approfondies 1

On considère la suite  $(F_n)$  définie par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et par la relation de récurrence

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Calculer  $F_n$ . Montrer que la série de terme général  $\frac{1}{F_{2^n}}$  converge et calculer sa somme. On pourra exprimer  $\frac{1}{F_{2^n}}$  sous la forme  $u_n - u_{n+1}$  où  $u_n$  est une suite à déterminer.

---

## Solution :

Les racines de l'équation caractéristique  $r^2 - r - 1 = 0$  sont  $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  et  $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ . Avec les conditions initiales, on trouve

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n)$$

La convergence de la série est assurée car  $\sqrt{5}F_n \sim r_1^n$ .  
puis pour  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{5}F_{2^n}} = \frac{1}{r_1^{2^n} - r_2^{2^n}} = \frac{r_1^{2^n}}{r_1^{2^{n+1}} - 1}$$

car  $r_1 r_2 = -1$ , soit :

$$\frac{1}{\sqrt{5}F_{2^n}} = \frac{r_1^{2^n} + 1}{r_1^{2^{n+1}} - 1} - \frac{1}{r_1^{2^{n+1}} - 1} = \frac{1}{r_1^{2^n} - 1} - \frac{1}{r_1^{2^{n+1}} - 1}$$

Par une somme en cascade, on trouve finalement que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{F_{2^n}} = 1 + \sqrt{5} \frac{1}{r_1^2 - 1} = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}$$

# SUJET Maths Approfondies 2

## Exercice principal Maths Approfondies 2

1. Définition de la divergence d'une suite vers  $+\infty$ .
2. On considère l'ensemble des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  données par leurs deux premiers termes  $u_0 = a$  et  $u_1 = b$  dans  $\mathbb{R}$  puis par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n \quad (1)$$

On suppose dans un premier temps que  $a > 0$  et  $b > 0$ .

Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$u_n < u_{n+1}$$

et pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{(n+1)^2} < \frac{u_n}{n^2}$$

En déduire que la suite  $(u_n)$  admet une limite finie ou égale à  $+\infty$  et que la suite  $(\frac{u_n}{n^2})$  admet une limite finie.

3. Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$u_{n+2} = u_1 + 2 \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k+2}$$

puis que

$$u_{n+2} \geq u_0 + u_1 + 2u_1 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}$$

En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

4. On suppose à présent que  $a$  et  $b$  ne sont plus forcément positifs mais sont quelconques dans  $\mathbb{R}$ . On note  $u_n^{a,b}$  la suite vérifiant la relation de récurrence (1) telle que  $u_0 = a$  et  $u_1 = b$ .

(a) Montrer qu'il existe des réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$(a, b) = \lambda(1, 1) + \mu(1, 2)$$

(b) En déduire en relation entre  $u_n^{a,b}$ ,  $u_n^{1,1}$  et  $u_n^{1,2}$ .

(c) Montrer que la suite  $u_n^{a,b}$  admet une limite (éventuellement infinie) et que la suite  $(\frac{u_n^{a,b}}{n^2})$  admet une limite finie.

### Solution :

1. p9 EC1
2. On observe tout d'abord que  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui permet de montrer aisément la première inégalité. Pour la 2ème, on remarque que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$u_{n+2} \leq u_{n+1} \left(1 + \frac{2}{n+2}\right) = u_{n+1} \left(\frac{n+4}{n+2}\right)$$

puis

$$\frac{u_{n+2}}{(n+2)^2} < u_{n+1} \frac{n+4}{(n+2)^3} < \frac{u_{n+1}}{(n+1)^2}$$

car  $(n+4)(n+1)^2 = n^3 + 6n^2 + 9n + 4$  et  $(n+2)^3 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8$ .

La suite  $(u_n)$ , croissante, admet donc une limite finie ou égale à  $+\infty$  et la suite  $(\frac{u_n}{n^2})$ , décroissante et minorée par 0, admet une limite finie.

3. La première relation s'obtient par une sommation en cascade à partir de la relation

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{2}{n+2}u_n$$

La deuxième relation s'en déduit en utilisant  $u_1 \leq u_k$  pour  $k \geq 1$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} = +\infty$  (série harmonique), on a donc a fortiori  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

4. (a)  $\lambda$  et  $\mu$  vérifient exactement  $a = \lambda + \mu$  et  $b = \lambda + 2\mu$ , c'est à dire  $\mu = b - a$  et  $\lambda = 2a - b$ .

(b) La relation de récurrence étant linéaire, on démontre par récurrence que

$$u_n^{a,b} = \lambda u_n^{1,1} + \mu u_n^{1,2} = (2a - b)u_n^{1,1} + (b - a)u_n^{1,2}$$

(c) Immédiat en utilisant les résultats des questions 2 et 3 pour les suites  $u_n^{1,1}$  et  $u_n^{1,2}$  et la relation linéaire de 4b).

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 2

Soient  $X_1$  et  $X_2$  des variables aléatoires indépendantes de même loi.

Soit  $Y$  une variable aléatoire indépendante des deux autres telle que  $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$  et  $\mathbb{P}(Y = 1) = p \in ]0, 1[$ . On pose

$$M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}.$$

1. On suppose pour cette question que  $X_1 + 1$  suit une loi géométrique de raison  $\frac{1}{3}$ .  
Quelle est la probabilité que  $M$  soit inversible ?
2. On suppose pour cette question que  $X_1$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .  
Quelle est la probabilité que  $M$  soit diagonalisable ?

### Solution :

1. Notons  $I$  l'événement  $M$  est inversible.

$M$  est non inversible ssi  $\det(M) = 0$  ssi  $X_1^2 = YX_2^2$

$$\mathbb{P}(X_1^2 = YX_2^2) = \mathbb{P}([X_1 = X_2] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X_1 = X_2 = 0] \cap [Y = -1])$$

$$\stackrel{\text{indépendance}}{=} p \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = k]) + (1-p) \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}(X_1^2 = YX_2^2) = \frac{1}{9} \left( p \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} + (1-p) \right)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(I) = 1 - \left( p \frac{1}{5} + (1-p) \frac{1}{9} \right)}$$

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$

$M - \lambda I_2$  non inversible ssi  $(\lambda - X_1)^2 - YX_2^2 = 0$  ssi  $Y = 1$  et  $(\lambda - X_1)^2 = X_2^2$  ou  $Y = -1$  et  $(\lambda - X_1) = X_2 = 0$

Si  $Y = 1$  alors  $Sp(M) = \{X_1 \pm X_2\}$  et  $M$  est diagonalisable (dans le cas où  $X_2 = 0$ ,  $M$  est déjà diagonale!).

Si on note  $D$  l'événement  $M$  est diagonalisable alors

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}(D \cap [Y = -1]) = \mathbb{P}([Y = 1]) + \mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [Y = -1]) = \boxed{p + (1-p)e^{-\lambda}}$$

# SUJET Maths Approfondies 3

## Exercice principal Maths Approfondies 3

On définit deux suites  $(x_k)_{k \geq 0}$  et  $(y_k)_{k \geq 0}$  par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et pour tout } k \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + 4y_k \\ y_{k+1} = 2x_k + 3y_k \end{cases}$$

1. Question de cours : somme des  $n$  premiers entiers.
2. (a) Prouver que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :  $x_k > y_k \geq k$ .  
(b) En déduire les limites des suites  $(x_k)_{k \geq 0}$  et  $(y_k)_{k \geq 0}$ .
3. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k^2 - 2y_k^2 = 1$ .
4. Pour  $k \geq 1$ , on pose  $r_k = \frac{x_k}{y_k}$ .

Justifier que la suite  $(r_k)_{k \geq 1}$  est bien définie et que c'est une suite convergente de limite  $\sqrt{2}$ .

5. (a) Prouver que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$|r_k - \sqrt{2}| < \frac{1}{2y_k^2}$$

- (b) Ecrire le code d'une fonction Python `approx2(n)` qui prend en entrée un entier  $n$  et renvoie un terme de la suite  $(r_k)_{k \geq 1}$  qui soit une approximation de  $\sqrt{2}$  à  $10^{-n}$  près.
6. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers  $n$  tels que  $1 + 2 + \dots + n$  soit un carré parfait, c'est-à-dire tels que  $1 + 2 + \dots + n = p^2$  avec  $p \in \mathbb{N}$ .

### Solution :

1. Programme ECG1 Maths approfondies p. 6.
2. (a) On procède par récurrence sur  $k$ .  
Pour  $k = 0$ , le résultat est immédiat.  
Soit donc  $k \geq 0$  avec  $x_k > y_k \geq k$ .  
Alors, d'une part  $x_{k+1} = 3x_k + 4y_k > 2x_k + 3y_k = y_{k+1}$  car  $x_k > 0$  et  $y_k \geq 0$ . D'autre part,  $y_{k+1} = 2x_k + 3y_k \geq x_k > k$  par l'hypothèse de récurrence, d'où  $y_{k+1} \geq k + 1$ . Cela prouve donc la propriété voulue par récurrence.  
(b) Par théorème de comparaison, on obtient immédiatement que  $\lim_n x_n = \lim_n y_n = +\infty$ .
3. On procède encore par récurrence sur  $k$ . Le résultat est évident pour  $k = 0$ .  
On suppose le résultat vrai au rang  $k \geq 0$ . On calcule alors :

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2 - 2y_{k+1}^2 &= (3x_k + 4y_k)^2 - 2(2x_k + 3y_k)^2 \\ &= 9x_k^2 + 24x_k y_k + 16y_k^2 - 2(4x_k^2 + 12x_k y_k + 9y_k^2) \\ &= x_k^2 - 2y_k^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Cela prouve la propriété au rang  $k + 1$ . Cela achève le pas de la récurrence et prouve le résultat demandé par récurrence.

4. La question 2.(a) prouve que pour  $k \geq 1$ ,  $y_k \neq 0$ . Ainsi  $r_k$  est bien défini.  
De plus, pour  $k \geq 1$ ,  $x_k^2 - 2y_k^2 = 1$  d'où  $r_k^2 = \frac{x_k^2}{y_k^2} = 2 + \frac{1}{y_k^2}$ . De plus, comme  $\lim_k y_k = +\infty$ , on obtient que  $(r_k^2)$  est convergente avec  $\lim_k r_k^2 = 2$  et comme par ailleurs  $r_k > 0$  pour tout  $k \geq 1$ , on en déduit finalement que  $(r_k)$  est convergente de limite  $\sqrt{2}$ .

5. (a) De la relation  $x_k^2 - 2y_k^2 = 1$ , on déduit en divisant par  $y_k^2$  (qui est non nul) :

$$r_k^2 - 2 = \frac{1}{y_k^2} \quad \text{soit} \quad (r_k + \sqrt{2})(r_k - \sqrt{2}) = \frac{1}{y_k^2}$$

En passant aux valeurs absolues, on obtient alors

$$|r_k + \sqrt{2}| \times |r_k - \sqrt{2}| = \frac{1}{y_k^2}$$

Remarquons que  $r_k = x_k/y_k > 1$  par la question 2.(a) d'où  $|r_k + \sqrt{2}| = r_k + \sqrt{2} > 2$  car  $\sqrt{2} > 1$  également. Alors

$$|r_k - \sqrt{2}| = \frac{1}{r_k + \sqrt{2}} \times \frac{1}{y_k^2} < \frac{1}{2y_k^2}$$

ce qui est le résultat demandé.

(b) Une solution est le code suivant :

---

```
def appro2(n):
    x, y = 1, 0
    while (2*y**2) < 10**n:
        x, y = 3*x + 4*y, 2*x + 3*y
    return x/y
```

---

6. On remarque tout d'abord que :

$$1 + 2 + \dots + n = p^2 \iff \frac{n(n+1)}{2} = p^2 \iff (2n+1)^2 - 2 \times (2p)^2 = 1$$

Autrement dit, le couple  $(2n+1, 2p)$  est solution de l'équation  $x^2 - 2y^2 = 1$ .

L'application  $(n, p) \mapsto (2n+1, 2p)$  étant injective, il suffit donc de montrer qu'il existe une infinité de couples  $(2n+1, 2p)$ , avec  $n$  et  $p$  entiers naturels, solutions de l'équation  $x^2 - 2y^2 = 1$ .

Or les points  $(x_k, y_k)$  fournissent de telles solutions en nombre infini car les suites divergent vers  $+\infty$ , et il s'agit de solutions dans  $\mathbb{N}$  par une récurrence immédiate.

Il reste à voir que si  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  vérifie  $x^2 - 2y^2 = 1$ , alors nécessairement  $x$  est impair et  $y$  pair. Or  $x^2 = 2y^2 + 1$  donc  $x^2$  est impair et donc  $x$  également. Alors  $x = 2k + 1$  et  $x^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$  d'où  $2y^2 = 2(2k^2 + 2k)$  et finalement  $y^2 = 2k^2 + 2k = 2(k^2 + k)$ . Donc  $y^2$  est pair et donc  $y$  également.

Ainsi  $x_k = 2n_k + 1$  et  $y_k = 2p_k$ . Comme  $x_k$  et  $y_k$  prennent une infinité de valeurs distinctes, il en est de même pour les valeurs de  $n_k$  et  $p_k$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $1 + 2 + \dots + n_k = p_k^2$ .

On a bien une infinité de solutions au problème posé.

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 3

Alice et Bob jouent au jeu suivant : Bob choisit deux nombres réels distincts comme il veut (il peut les choisir au hasard mais il n'est pas obligé). Ensuite Bob tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, il communique à Alice la valeur du plus petit des deux nombres ; si elle tombe sur face, il lui communique le plus grand des deux nombres. Bob demande alors à Alice si le nombre restant est plus grand ou plus petit que le nombre communiqué. Elle gagne si elle donne la bonne réponse.

Alice utilise alors la méthode suivante pour répondre. Elle choisit un nombre  $X_0$  suivant une loi normale centrée réduite. Si le nombre communiqué par Bob est plus petit que  $X_0$ , elle répond que le nombre restant est le plus grand ; si le nombre communiqué par Bob est plus grand que  $X_0$ , elle répond que le nombre restant est le plus petit.

1. Proposer le code d'une fonction Python simulant le jeu entre Alice et Bob.
2. Quel est l'intérêt de la méthode utilisée par Alice pour répondre ?

---

**Solution :**

1. On note  $x_1$  et  $x_2$  les deux nombres choisis par Bob. Le programme ci-dessous répond à la question. Il renvoie `True` quand Alice répond correctement, `False` sinon.

---

```
import numpy.random as rd
```

```
def jeu(x1, x2):  
    p=rd.randint(0,2)  
    if p==0: # Pile  
        x=min(x1, x2)  
    else: # Face  
        x=max(x1, x2)  
    x0=rd.normal()  
    if x<x0:  
        return p==0  
    else:  
        return p==1
```

---

2. Alors que l'on pourrait s'attendre à ce que l'on ne puisse faire mieux que répondre avec une probabilité de gagner égale à  $\frac{1}{2}$  – car le choix du nombre communiqué se décide à pile ou face – avec sa stratégie, Alice a une probabilité de gagner *strictement* supérieure à  $\frac{1}{2}$ .

Notons  $x_1$  et  $x_2$  les deux nombres choisis par Bob, avec  $x_1 < x_2$ . Soit alors  $x$  le nombre communiqué à Alice par Bob.

Comme Alice choisit le nombre  $X_0$  suivant une loi normale centrée réduite, en notant  $p = \mathbb{P}(x_1 < X_0 < x_2)$ , alors  $p > 0$ . C'est le point important ici :  $X_0$  a une probabilité non nulle d'être dans un intervalle non réduit à un point (on pourrait ainsi choisir une autre loi que la loi normale centrée réduite, pourvue qu'elle ait encore cette propriété).

Notons  $G$  l'événement « Alice a gagné ». Alors, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}(G|x_1 < X_0 < x_2)\mathbb{P}(x_1 < X_0 < x_2) + \mathbb{P}(G|\{X_0 \leq x_1\} \cup \{X_0 \geq x_2\})\mathbb{P}(\{X_0 \leq x_1\} \cup \{X_0 \geq x_2\}) \\ &= p\mathbb{P}(G|x_1 < X_0 < x_2) + (1-p)\mathbb{P}(G|\{X_0 \leq x_1\} \cup \{X_0 \geq x_2\})\end{aligned}$$

Or, compte-tenu de la méthode choisie par Alice, si  $x_1 < X_0 < x_2$ , alors elle donne forcément la réponse correcte, ce qui signifie exactement que  $\mathbb{P}(G|x_1 < X_0 < x_2) = 1$ .

Par ailleurs, quand  $X_0 \leq x_1$ , nécessairement  $X_0 \leq x$ , tandis que si  $X_0 \geq x_2$ , nécessairement  $X_0 \geq x$ . Dans tous les cas, elle a une chance sur deux d'avoir bien répondu, et donc :  $\mathbb{P}(G|\{X_1 \leq x_0\} \cup \{X_2 \geq x_2\}) = \frac{1}{2}$ .

Finalement :

$$\mathbb{P}(G) = p + \frac{1}{2}(1 - p) \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathbb{P}(G) = \frac{1+p}{2} > \frac{1}{2}} \quad \text{car } p > 0$$

On peut remarquer que la borne que l'on obtient par rapport à  $\frac{1}{2}$  dépend, sans surprise, de  $x_1$  et de  $x_2$  : plus  $x_1$  et  $x_2$  sont proches, plus  $p$  est petit.

*Question supplémentaire :* on peut demander de compléter le programme Python de la question 1 par une estimation de la probabilité de gagner pour Alice.

Un code qui convient est alors le suivant :

---

```
def test(n, x1, x2):  
    s=0  
    for i in range(n):  
        if jeu(x1, x2):  
            s=s+1  
    return s/n
```

---

# SUJET Maths Approfondies 4

## Exercice principal Maths Approfondies 4

On dispose d'un stock infini d'ampoules. A l'instant 0, on allume une ampoule. Dès qu'elle s'éteint, on la remplace en allumant une nouvelle ampoule. On note  $T_1, T_2, \dots$  le temps de vie des ampoules successives. On définit ainsi une famille de variables aléatoires réelles  $(T_n)_{n \geq 1}$ .

On suppose que la famille  $(T_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées qui suivent toutes une loi exponentielle de paramètre 1.

On note  $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$  pour  $n \geq 1$ .

On pose  $S_0 = 0$ .

1. Question de cours : théorème de la limite monotone pour des probabilités.
2. Déterminer la loi de  $S_n$ .
3. Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . On définit  $N_t$  par la formule :

$$N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\}$$

- (a) Montrer que, presque sûrement,  $N_t$  est bien défini et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .
  - (b) Justifier l'assertion suivante : «  $N_t$  est le nombre d'ampoules consommées entre l'instant 0 et l'instant  $t$  ».
4. (a) Justifier que  $\{S_n \leq t\} = \{N_t \geq n\}$ .  
(b) En déduire que  $N_t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $t$ .
  5. On admet plus généralement que :

$$\forall t \geq 0 \quad \forall s \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = k) = e^{-s} \frac{s^k}{k!}$$

Dit autrement : le nombre d'ampoules qui s'éteignent dans un intervalle de temps de longueur  $s$  quelconque suit une loi de Poisson de paramètre  $s$ .

On observe le temps de vie de l'ampoule allumée à l'instant  $t$ . Cela revient donc à s'intéresser à la variable aléatoire  $T_{N_t+1}$ .

- (a) Justifier que  $t \in [S_{N_t}, S_{N_t+1}]$ .  
On pose alors  $T' = S_{N_t+1} - t$ .
- (b) Déterminer la loi de  $T'$ . Commenter le résultat obtenu.

### Solution :

1. Question de cours : programme Maths approfondies ECG1 p. 21.
2. La variable  $S_n$  est la somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant toutes une loi exponentielle de paramètre 1. Elle suit donc une loi  $\gamma$  de paramètre  $n$  :  $S_n \leftrightarrow \gamma(n)$ .
3. (a) L'ensemble  $\{n \mid S_n \leq t\}$  est non vide car il contient 0. Pour montrer que  $N_t$  est, presque sûrement, bien défini et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , il suffit donc de montrer que presque sûrement l'ensemble  $\{n \mid S_n \leq t\}$  est majoré, ce qui assurera l'existence du sup. Le sup sera alors un maximum et bien à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . De plus, comme les variables aléatoires  $T_k$  sont à valeurs positives, de manière immédiate :  $S_n \leq S_{n+1}$  et donc  $\{n \mid S_n \leq t\}$  est majoré si et seulement si il n'est pas égal à  $\mathbb{N}$ , c'est-à-dire si et seulement si il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $S_n > t$ .

Soit  $A$  l'événement :

$$A : \ll \exists n \in \mathbb{N} \quad S_n > t \gg$$

On veut donc montrer que  $\mathbb{P}(A) = 1$ , soit encore, en passant à l'événement contraire :  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0$ . Or :

$$\bar{A} = \bigcap_{n \geq 1} \{S_n \leq t\}$$

et comme  $S_n \leq S_{n+1}$ ,  $\{S_{n+1} \leq t\} \subset \{S_n \leq t\}$ . Ainsi, par limite monotone des probabilités :

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \{S_n \leq t\}\right) = \lim_n \mathbb{P}(S_n \leq t)$$

Or, par définition des lois  $\gamma$  :

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t e^{-x} x^{n-1} dx$$

Soit  $n \geq 2$ . Par intégration par parties, en dérivant la fonction polynomiale sous l'intégrale, on obtient, toutes les fonctions étant  $\mathcal{C}^1$  :

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) = \left[ -e^{-x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right]_0^t + \frac{1}{(n-2)!} \int_0^t e^{-x} x^{n-2} dx = -e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \mathbb{P}(S_{n-1} \leq t)$$

car  $n-1 \geq 1$ .

Ainsi, pour  $n \geq 2$  :

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n-1} \leq t) = -e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Remarquons que la relation reste valable pour  $n=1$  car  $S_0 = 0$ , d'où  $\mathbb{P}(S_0 \leq t) = 1$  et que  $S_1 = T_1$  suit une loi exponentielle de paramètre 1, d'où  $\mathbb{P}(S_1 \leq t) = 1 - e^{-t}$ .

Alors, en sommant l'égalité  $\mathbb{P}(S_k \leq t) - \mathbb{P}(S_{k-1} \leq t) = -e^{-t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$  pour  $k$  variant de 1 à  $n$ , on obtient par télescopage :

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_0 \leq t) = -e^{-t} \sum_{k=1}^n \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = -e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) = \mathbb{P}(S_0 \leq t) - e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} = 1 - e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}$$

Or :  $\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} = e^t$  d'où :

$$\lim_n \mathbb{P}(S_n \leq t) = 0$$

et donc  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0$ . Ainsi  $N_t$  est presque sûrement bien défini et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

- (b) Par définition de  $N_t$ ,  $S_{N_t} \leq t$  et  $S_{N_t+1} > t$ . La première inégalité signifie qu'au moins  $N_t$  ampoules ont été remplacées entre l'instant 0 et l'instant  $t$ . La deuxième signifie qu'à l'instant  $t$ , l'ampoule  $N_t + 1$  est toujours en fonction. Ainsi, entre l'instant 0 et l'instant  $t$ , le nombre d'ampoules consommées est exactement  $N_t$ .
4. (a) Si  $S_n \leq t$ , alors, il est immédiat par définition de  $N_t$  que  $N_t \leq n$  d'où  $\{S_n \leq t\} \subset \{N_t \geq n\}$ . De même, si  $N_t \geq n$ , par croissance de la suite  $(S_n)$  :  $S_n \leq S_{N_t} \leq t$  et donc  $\{N_t \geq n\} \subset \{S_n \leq t\}$  et donc par double inclusion :  $\{S_n \leq t\} = \{N_t \geq n\}$ .
- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par la question précédente :

$$\mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(S_n \leq t)$$

Or, on a calculé à la question précédente :

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) = 1 - e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}$$

Alors :

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t \geq n) - \mathbb{P}(N_t \geq n+1) = \left(1 - e^{-t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}\right) - \left(1 - e^{-t} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}\right) = e^{-t} \frac{t^n}{n!}$$

et donc  $N_t$  suit bien une loi de Poisson de paramètre  $t$ .

5. (a) On a déjà remarqué que, par définition de  $N_t$ ,  $S_{N_t} \leq t$  tandis que  $S_{N_t+1} > t$  et donc :  $t \in [S_{N_t}, S_{N_t+1}]$ .

En ce qui concerne, l'introduction de la variable  $T'$ , il est fortement conseillé de représenter la situation sur l'axe du temps :  $T'$  est le temps de vie résiduel de l'ampoule en fonctionnement à l'instant  $t$ .

(b) La variable  $T'$  est à valeurs dans  $[0, +\infty[$ . De plus, pour  $s \geq 0$ , par définition de  $T'$  :  $\mathbb{P}(T' > s) = \mathbb{P}(S_{N_t+1} > s + t) = \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = 0)$  puisque l'événement  $S_{N_t+1} > s + t$  signifie qu'aucune ampoule ne s'éteint entre l'instant  $t$ , où exactement  $N_t$  ampoules ont déjà été consommées et l'instant  $t + s$ , où la  $(N_t + 1)^{\text{e}}$  ampoule fonctionne encore. D'après le résultat admis, on a donc :

$$\mathbb{P}(T' > s) = e^{-s} \quad \text{soit} \quad \mathbb{P}(T' \leq s) = 1 - e^{-s}$$

et donc :  $T' \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ .

Il peut sembler étonnant que  $T'$  suive la même loi que  $T_1$  car  $T'$  est par définition plus court que le temps s'écoulant entre deux changements d'ampoules. Cela peut se voir comme traduisant l'absence de mémoire de la loi exponentielle.

Une autre remarque : si on raisonne en moyenne, autrement dit au niveau des espérances, le temps de vie moyen restant à l'ampoule fonctionnant à l'instant  $t$  est égal au temps de vie moyen d'une ampoule quelconque, ce qui peut sembler là encore contre-intuitif : entre deux ampoules qui s'éteignent le temps moyen est  $\mathbb{E}(T_1) = 1$ , mais le calcul de  $\mathbb{E}(T') = 1$  laisse penser que la longueur de l'intervalle moyen autour d'un instant  $t$  quelconque donné est sans doute strictement plus grande (on peut effectivement le prouver mais cela fait intervenir une loi exponentielle tronquée, non absolument continue). On peut comprendre ce phénomène de la manière suivante : si on divise un intervalle borné donné en un nombre fini d'intervalles, la longueur moyenne d'un intervalle n'est pas la même chose que la longueur moyenne de l'intervalle dans lequel se trouve un point aléatoire (pour s'en convaincre, il suffit de penser à un cas limite où il y a deux intervalles, un très grand et l'autre très petit : un point aléatoire a beaucoup plus de chances de se trouver dans le grand intervalle que dans le petit et donc la longueur moyenne de l'intervalle où se trouve le point aléatoire est plus grande que la la longueur moyenne des intervalles).

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 4

On considère la fonction Python suivante, où  $n$  est un entier naturel non nul et  $p$  un réel de  $]0, 1[$ .

```
def simul(n,p):
    X=rd.geometric(p,n);
    M=min(X);
    C=0;
    for i in range(n):
        if X[i]==M :
            C=C+1;
    return C
```

Déterminer la loi de la variable  $N$  simulée par cette fonction `simul`.

**Solution :**

1. • On considère  $n$  variables  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables indépendantes suivant chacune une loi géométrique de paramètre  $p$ .

On note  $Z$  la valeur de leur minimum,  $N$  désigne alors le nombre de variables  $X_1, \dots, X_n$  prenant la valeur de ce minimum.

On a déjà  $N(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ .

- A ce stade (si l'élève est perdu), on peut « raconter » l'histoire suivante :  $n$  joueurs ont à chaque manche une probabilité  $p$  de gagner à un jeu. Le premier joueur à gagner interrompt le jeu.  $N$  désigne le nombre d'ex-aequo.

Avec la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(N = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{N = k\}).$$

$$\mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{N = k\}) = \mathbb{P}(\{Z \geq j\} \cap \{Z = j \cap N = k\}) = \mathbb{P}(\{Z \geq j\} \mathbb{P}_{Z \geq j}(Z = j \cap N = k))$$

$$\mathbb{P}(Z \geq j) = (1-p)^{n(j-1)} \quad (\text{car } \{Z \geq j\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i \geq j\})$$

- $\mathbb{P}_{\{Z \geq j\}}(\{Z = j \cap N = k\})$ ?

sachant  $Z \geq j$ , on a sait que chacune des variables  $X_i$  est supérieure ou égal  $j$ .

Et  $\mathbb{P}(X_i = j | X_i \geq j) = p$  selon le protocole de la loi géométrique [probabilité que le joueur  $i$  gagne à la  $j$ -ième manche s'il la joue.]

Sachant  $X_i \geq j$ , pour avoir  $Z = j$  et  $N = k$ , il faut et il suffit que  $k$  variables valent exactement  $j$  (ie  $k$  joueurs gagnent la  $j$ -ième manche)

Les variables  $X_i$  étant indépendantes, on reconnaît un protocole de binomiale.

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}_{Z \geq j}(Z = j \cap N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(N = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} ((1-p)^n)^{j-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} \sum_{i=0}^{+\infty} ((1-p)^n)^i = \frac{\binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k}}{1 - (1-p)^n}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(N = k) = \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{1 - (1-p)^n}$$

2. Question Bonus : espérance de  $N$  ?

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^n k \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{1 - (1-p)^n} = \frac{1}{1 - (1-p)^n} \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(Y = k) \text{ avec } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p). \text{ Ainsi } \mathbb{E}(N) = \frac{np}{1 - (1-p)^n}$$

# SUJET Maths Approfondies 5

## Exercice principal Maths Approfondies 5

1. Question de cours : Donner la définition de la convergence en probabilité et énoncer la loi faible des grands nombres.

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  admettant des moments d'ordre 2 et  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  admettant aussi un moment d'ordre 2.

- On dit que  $(X_n)$  converge  $L_1$  vers  $X$  ssi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - X|) = 0$
- On dit que  $(X_n)$  converge  $L_2$  vers  $X$  ssi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - X|^2) = 0$
- On dit que  $(X_n)$  converge vers  $X$  ps (ou pp) ssi

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

Le but de l'exercice est d'établir des liens entre les différentes convergences.

2. Montrer que si  $(X_n)$  converge  $L_1$  vers  $X$  alors  $(X_n)$  converge en probabilité vers  $X$ .
3. Montrer que si  $(X_n)$  converge  $L_2$  vers  $X$  alors  $(X_n)$  converge  $L_1$  vers  $X$ .
4. Un exemple : soit  $X$  une v.a.r. suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$X_n = \sqrt{n+1} \mathbb{1}_{X \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]}$$

- (a) Montrer que  $(X_n)$  converge  $L_1$  vers 0.
- (b) Qu'en est-il de la convergence  $L_2$ ? Conclure.

5. Supposons que  $(X_n)$  converge vers  $X$  ps, notons  $C = \left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$

- (a) Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer que

$$C \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n \geq k} \left[|X_n - X| \leq \varepsilon\right]$$

- (b) En déduire que  $(X_n)$  converge vers  $X$  en probabilité.

6. Un autre exemple :  $X$  une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathbb{1}_{X \in ]0,1]}, \\ X_2 &= \mathbb{1}_{X \in ]0, \frac{1}{2}]}, X_3 = \mathbb{1}_{X \in ]\frac{1}{2}, 1]}, \\ X_4 &= \mathbb{1}_{X \in ]0, \frac{1}{3}]}, X_5 = \mathbb{1}_{X \in ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}, X_6 = \mathbb{1}_{X \in ]\frac{2}{3}, 1]}, \\ X_7 &= \mathbb{1}_{X \in ]0, \frac{1}{4}]}, X_8 = \mathbb{1}_{X \in ]\frac{1}{4}, \frac{2}{4}]}, X_9 = \mathbb{1}_{X \in ]\frac{2}{4}, \frac{3}{4}]}, X_{10} = \mathbb{1}_{X \in ]\frac{3}{4}, 1]} \\ &\dots \end{aligned}$$

- (a) Donner l'univers image des  $X_n$  et montrer que

$$\forall k \geq \frac{n(n+1)}{2} + 1 \quad P(X_k = 0) \geq \frac{n}{n+1}$$

- (b) En déduire que  $X_n$  converge en probabilité vers 0
- (c) Montrer que  $(X_n)$  ne converge pas ps vers 0.

**Solution :**

1. p21 EC2

2. Montrer que si  $(X_n)$  converge  $L_1$  vers  $X$  alors  $(X_n)$  converge en proba vers  $X$ .

Les variables admettent un moment d'ordre 2 donc d'ordre 1 ( $|X_n| \leq 1 + X_n^2$ ). Supposons que  $(X_n)$  converge  $L_1$  vers  $X$  :

Soit  $\epsilon > 0$ , d'après l'inégalité de Markov

$$0 \leq P(|X_n - X| > \epsilon) \leq E(|X_n - X|)$$

Par encadrement on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$ , d'où  $(X_n)$  converge en proba vers  $X$ .

3. Montrer que si  $(X_n)$  converge  $L_2$  vers  $X$  alors  $(X_n)$  converge  $L_1$  vers  $X$ .

Supposons que  $(X_n)$  converge  $L_2$  vers  $X$ . Comme la variance est positive, nous avons

$$0 \leq E(|X_n - X|)^2 \leq E(|X_n - X|^2)$$

Par encadrement on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - X|) = 0$ , d'où  $(X_n)$  converge  $L_1$  vers  $X$ .

4. Un exemple :  $X$  une v.a.r. suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$  et

$$X_n = \sqrt{n+1} \mathbf{1}_{X \in [0, \frac{1}{n+1}]}$$

(a) Montrer que si  $(X_n)$  converge  $L_1$  vers 0.

$X_n$  est positive donc

$$E(|X_n|) = E(X_n) = \sqrt{n+1} P\left(X \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n|) = 0$ , d'où  $(X_n)$  converge  $L_1$  vers 0.

(b) Qu'en est-il de la convergence  $L_2$ ? Conclure

$$E(X_n^2) = (n+1)P\left(X \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]\right) = \sqrt{n+1} \rightarrow +\infty$$

$(X_n)$  ne converge pas  $L_2$  vers 0. Nous n'avons pas équivalence entre les deux convergences.

5. Soit  $(X_n)$  converge vers  $X$  ps, notons  $C = \{w \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(w) = X(w)\}$

(a) Soit  $\epsilon > 0$ . Montrer que

$$C \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n \geq k} [|X_n - X| \leq \epsilon]$$

C'est la définition de la limite!

Soit  $w \in C$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(w) = X(w)$  donc  $\exists k \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq k$   $|X_n - X| \leq \epsilon$

donc  $w \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n \geq k} [|X_n - X| \leq \epsilon]$  d'où l'inclusion demandée.

(b) En déduire que  $(X_n)$  converge vers  $X$  en proba.

Comme  $P(C) = 1$ , alors  $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n \geq k} [|X_n - X| \leq \epsilon]\right) = 1$

Comme l'union est croissante, nous avons

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n \leq k} [|X_n - X| \leq \epsilon]\right) = 1$$

Or

$$P\left(\bigcap_{n \geq k} [|X_n - X| \leq \epsilon]\right) \leq P(|X_n - X| \leq \epsilon) \leq 1$$

Par encadrement on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| \leq \epsilon) = 1$ , d'où  $(X_n)$  converge en proba vers  $X$ .

6. Un autre exemple :  $X$  une var suivant une uniforme sur  $[0, 1]$ .

$$X_1 = \mathbb{1}_{X \in ]0,1[},$$

$$X_2 = \mathbb{1}_{X \in ]0, \frac{1}{2}[}, X_3 = \mathbb{1}_{X \in ]\frac{1}{2}, 1[},$$

$$X_4 = \mathbb{1}_{X \in ]0, \frac{1}{3}[}, X_5 = \mathbb{1}_{X \in ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[}, X_6 = \mathbb{1}_{X \in ]\frac{2}{3}, 1[},$$

$$X_7 = \mathbb{1}_{X \in ]0, \frac{1}{4}[}, X_8 = \mathbb{1}_{X \in ]\frac{1}{4}, \frac{2}{4}[}, X_9 = \mathbb{1}_{X \in ]\frac{2}{4}, \frac{3}{4}[}, X_{10} = \mathbb{1}_{X \in ]\frac{3}{4}, 1[} \dots$$

(a) Donner l'univers image des  $X_n$  et montrer que

$$\forall k \geq \frac{n(n+1)}{2} + 1 \quad P(X_k = 0) \geq \frac{n}{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n(\Omega) = \{0, 1\}$$

Nous avons à chaque fois  $i$  intervalles de longueur  $\frac{1}{i}$ .

$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$  donc pour  $k \geq \frac{n(n+1)}{2} + 1$  l'intervalle associé à  $X_k$  est de longueur inférieure à  $\frac{1}{n+1}$ ,

d'où  $P(X_k = 1) \leq \frac{1}{n+1}$  et donc  $\boxed{P(X_k = 0) \geq \frac{n}{n+1}}$

(b) En déduire que  $X_n$  converge en probabilité

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0) = 1 \text{ d'où } (X_n) \text{ converge en probabilité vers } 0$$

(c) Montrer que  $(X_n)$  ne converge pas ps vers 0.

$\forall w \in \Omega$   $(X_n(w))$  admet une sous-suite constante égale à 0 et une autre constante égale à 1.  $(X_n(w))$  ne converge pas vers 0.

$P\left(\left\{w \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(w) = 0\right\}\right) = 0$  et donc  $\boxed{(X_n) \text{ ne converge pas ps vers } 0}$

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 5

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie.

Soient  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tels que :  $\exists \alpha \in \mathbb{R}^* \quad f \circ g - g \circ f = \alpha f$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Simplifier l'expression de  $f^n \circ g - g \circ f^n$ .
2. En déduire qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f^n = 0$ .

**Solution :**

1. On va montrer par récurrence sur  $n$  que :

$$f^n \circ g - g \circ f^n = \alpha n f^n$$

Le résultat est vrai pour  $n = 0$  de manière triviale. Par ailleurs l'hypothèse de l'énoncé est exactement le résultat annoncé pour  $n = 1$ .

Soit donc  $n \geq 0$  tel que le résultat est vrai au rang  $n$ . On peut alors calculer :

$$\begin{aligned} f^{n+1} \circ g &= f^n \circ f \circ g \\ &= f^n \circ (\alpha f + g \circ f) \\ &= \alpha f^{n+1} + f^n \circ g \circ f \\ &= \alpha f^{n+1} + \alpha n f^{n+1} + g \circ f^{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \alpha(n+1) f^{n+1} + g \circ f^{n+1} \end{aligned}$$

et le résultat est prouvé au rang  $n+1$ . On en déduit par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad f^n \circ g - g \circ f^n = \alpha n f^n}$$

2. On introduit l'application  $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ ,  $h \mapsto h \circ g - g \circ h$ . Le résultat de la question précédente se réécrit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(f^n) = \alpha n f^n$$

Ainsi, si  $f^n \neq 0$ ,  $f^n$  est vecteur propre de  $\varphi$ , associé à la valeur propre  $\alpha n$ . Or  $\varphi$  n'a qu'un nombre fini de valeurs propres car  $E$  est de dimension finie, et  $\alpha n \neq \alpha m$  pour  $n \neq m$ . Donc nécessairement :

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N} \quad f^n = 0.}$$

*Question supplémentaire :* montrer que  $f^d = 0$  où  $d = \dim E$ .

Soit  $n_0 = \min\{n \mid f^n = 0\}$ . Alors  $f^{n_0-1} \neq 0$  d'où  $x \in E$  tel que  $f^{n_0-1}(x) \neq 0$ . Alors la famille  $(x, f(x), \dots, f^{n_0-1}(x))$  est libre et donc nécessairement  $n_0 \leq d$  d'où  $f^d = 0$ .

# SUJET Maths Approfondies 6

## Exercice principal Maths Approfondies 6

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E = \mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Soit  $u$  un endomorphisme symétrique de  $E$  dont on note  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres (éventuellement répétées) et rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  la matrice de  $u$  dans la base canonique de  $E$ .

Pour tout  $x \in E$  on pose

$$q(x) = \langle u(x), x \rangle$$

et on note

$$S = \{x \in E \text{ tels que } \langle x, x \rangle = 1\}$$

Dans la suite de l'exercice on considère une base orthonormée de  $E$ , notée  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u(e_i) = \lambda_i e_i$$

et on pose, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$$

1. Question de cours : réduction des endomorphismes symétriques.

2. (a) Montrer que pour tout  $x \in S$  on a :

$$\lambda_1 \leq q(x) \leq \lambda_n$$

(b) En déduire que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a :

$$\lambda_1 \leq a_{kk} \leq \lambda_n$$

(c) Justifier que si  $x$  élément de  $S$  vérifie l'égalité  $q(x) = \lambda_n$  alors  $x$  est un vecteur propre de  $u$ .

3. (a) Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Etablir que  $q$  atteint un maximum sur  $F_k \cap S$ .

(b) Montrer que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$\max_{x \in F_k \cap S} q(x) = \lambda_k$$

(c) Montrer que, pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on a :

$$\min_{x \in F_{k-1}^\perp \cap S} q(x) = \lambda_k$$

4. Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on note  $\mathcal{V}_k$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension  $k$ .

(a) Etablir que si  $F$  est dans  $\mathcal{V}_k$  alors  $F \cap F_{k-1}^\perp$  n'est pas réduit au vecteur nul.

(b) En déduire que :

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{V}_k} \left( \max_{x \in F \cap S} q(x) \right)$$

5. Soient  $a$  et  $b$  deux endomorphismes symétriques de  $E$  dont on note  $\lambda_1(a) \leq \dots \leq \lambda_n(a)$  (resp.  $\lambda_1(b) \leq \dots \leq \lambda_n(b)$ ) pour l'endomorphisme  $b$  les valeurs propres rangées dans l'ordre croissant.

On suppose que pour tout  $x \in E$  on a :

$$\langle a(x), x \rangle \leq \langle b(x), x \rangle$$

Comparer, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_k(a)$  et  $\lambda_k(b)$ .

**Solution :**

1. EC2 p17

2. (a) Posons  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ .

On a alors :  $q(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2$  et, par définition de  $\lambda_1$  et  $\lambda_n$ , l'encadrement :

$$\lambda_1 \sum_{k=1}^n x_k^2 \leq q(x) \leq \lambda_n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Soit :  $\lambda_1 \leq q(x) \leq \lambda_n$  du fait que  $x$  appartient à  $S$ .

(b) Si on note  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  la base canonique de  $E$  on a, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$a_{kk} = \langle u(\epsilon_k), \epsilon_k \rangle = q(\epsilon_k)$$

L'encadrement :  $\lambda_1 \leq a_{kk} \leq \lambda_n$  résulte alors du résultat de la question précédente.

(c) D'après ce qui précède si  $x \in S$  vérifie l'égalité  $q(x) = \lambda_n$  alors on a :

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{(\lambda_k - \lambda_n)}_{< 0 \text{ si } \lambda_k \neq \lambda_n} x_k^2 = 0$$

On a donc :  $x_k = 0$  dès que  $\lambda_k \neq \lambda_n$  et donc  $x \in E_{\lambda_n}(u)$ .

3. (a)  $F_k \cap S$  est un fermé borné de  $E$  et donc l'application continue  $q$  y admet un maximum.

N.B. : Pour voir que  $F_k$  est un fermé on peut écrire  $F_k = \{x \in E : x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$ .

(b) En procédant comme en 1.a) on obtient, pour tout  $x \in F_k \cap S$  :  $q(x) \leq \lambda_k$  et puisque  $q(e_k) = \lambda_k$  et  $e_k \in F_k \cap S$  on a bien :

$$\max_{x \in F_k \cap S} q(x) = \lambda_k$$

(c) On remarque que  $F_{k-1}^\perp = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$  et donc, par le même raisonnement qu'en 1.a) on obtient, pour tout  $x \in F_{k-1}^\perp \cap S$  :  $q(x) \geq \lambda_k$  et puisque  $q(e_k) = \lambda_k$  et  $e_k \in F_{k-1}^\perp \cap S$  on a bien :

$$\min_{x \in F_{k-1}^\perp \cap S} q(x) = \lambda_k$$

4. (a) On a :

$$\dim(F \cap F_{k-1}^\perp) = \underbrace{\dim(F) + \dim(F_{k-1}^\perp)}_{k+(n-k+1)=n+1} - \dim(F + F_{k-1}^\perp) \geq 1$$

Il en résulte que le sous-espace vectoriel  $F \cap F_{k-1}^\perp$  n'est pas réduit au vecteur nul.

(b) Soit  $x \in F \cap F_{k-1}^\perp$  de norme égale à 1.

On a :

$$q(x) \geq \min_{y \in F_{k-1}^\perp \cap S} q(y) = \lambda_k$$

et donc :  $\max_{x \in F \cap S} q(x) \geq \lambda_k$  puisque pour  $F = F_k$  on a l'égalité finalement on a bien :

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{V}_k} \left( \max_{x \in F \cap S} q(x) \right)$$

5. D'après ce qui précède pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a

$$\lambda_k(a) \leq \lambda_k(b)$$

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 6

1. Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Le code Python ci-dessous simule une variable aléatoire  $T_N$ . Décrire une expérience aléatoire correspondant à cette simulation.

---

```
import numpy.random as rd

def T(N):
    X1, X2, X3=N+1, N+1, N+1
    t=0
    while X1*X2*X3>0:
        x=rd.rand()
        if x<1/3:
            X1=X1-1
        elif x<2/3:
            X2=X2-1
        else:
            X3=X3-1
        t=t+1
    return t
```

---

2. Déterminer la loi de  $T_N$ .

---

### Solution :

1. Le code ci-dessus simule l'expérience aléatoire suivante : on dispose de trois urnes, chacune remplie de  $N + 1$  boules indiscernables au toucher. On fait des tirages successifs sans remise : à chaque tirage, on choisit une urne au hasard parmi les trois et on retire une boule. Le processus s'arrête quand une urne se retrouve vide pour la première fois. Ainsi  $T_N$  est le numéro du premier tirage à l'issue duquel une urne est vide.

Une autre expérience possible, si on préfère trois urnes remplies de  $N$  boules, est de considérer que la condition d'arrêt de l'expérience n'est pas de vider une urne, mais de rencontrer pour la première fois une urne vide : on n'est alors plus en mesure de tirer une boule dans l'urne choisie et le processus s'arrête.

2. La variable  $T_N$  est clairement à valeurs dans  $\llbracket N + 1, 3N + 1 \rrbracket$ .

On numérote les urnes de 1 à 3 et, pour  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$  et  $r \in \llbracket 1, 2N + 1 \rrbracket$ , on note  $A_{i,r}$  l'événement « l'urne n°  $i$  est la première vidée, et cela au  $(N + r)$ -ème tirage ».

On a bien alors, par incompatibilité, puis par symétrie des urnes entre elles :  $\mathbb{P}(T_N = N + r) = \mathbb{P}(A_{1,r}) + \mathbb{P}(A_{2,r}) + \mathbb{P}(A_{3,r}) = 3\mathbb{P}(A_{1,r})$ .

On peut décrire l'événement  $A_{1,r}$  à l'aide d'un schéma de Bernoulli. Un succès est obtenu avec probabilité  $1/3$  quand on tire une boule dans l'urne 1, un échec avec probabilité  $2/3$  quand on tire une boule dans une des deux autres urnes. L'événement  $A_{1,r}$  est réalisé quand le  $(N + 1)$ -ème succès est obtenu lors du tirage n°  $N + r$ . Cela signifie que lors des  $N + r - 1$  premiers tirages, on a exactement  $N$  succès et  $r - 1$  échecs d'où :

$$\mathbb{P}(A_{1,r}) = \binom{N+r-1}{N} \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{r-1}$$

d'où finalement, comme  $\mathbb{P}(T_N = N + r) = 3\mathbb{P}(A_{1,r})$  :

$$\forall r \in \llbracket 1, 2N + 1 \rrbracket \quad \mathbb{P}(T_N = N + r) = 3 \binom{N+r-1}{N} \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{r-1}$$

# SUJET Maths Approfondies 7

## Exercice principal Maths Approfondies 7

On note  $\mathcal{G}$  l'ensemble des densités  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ , strictement positives et telles que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad \prod_{i=1}^n f(x_i - \bar{x}_n) \geq \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta)$$

où  $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

Pour toute fonction  $f$  appartenant à  $\mathcal{G}$  on pose  $\Phi = \ln(f)$  et  $\varphi = \Phi'$ .

1. Question de cours : dérivée et extrema des fonctions d'une variable réelle .

2. Soit  $f \in \mathcal{G}$ . Etablir que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i=1}^n \varphi(x_i - \bar{x}_n) = 0$  (\*)

3. Etablir que si  $g$  est une densité de classe  $\mathcal{C}^2$  d'une loi normale d'espérance nulle alors  $g$  appartient à  $\mathcal{G}$ .

4. En écrivant (\*) lorsque  $n = 2$ , établir que pour tout  $f \in \mathcal{G}$  la fonction  $\varphi$  est impaire.

5. Soit  $h$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que :  $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad h(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}, \frac{2x_2 - x_1 - x_3}{3} \right)$ .  
Déterminer le noyau et l'image de  $h$ .

6. (a) En écrivant (\*) lorsque  $n = 3$ , établir que pour tout  $f \in \mathcal{G} : \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(u + v)$ .  
Montrer alors que  $\varphi'$  est une fonction constante.

(b) En déduire l'expression générale des fonctions  $f$  appartenant à  $\mathcal{G}$ .

### Solution :

1. EC1p11

2. Pour  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  fixé, soit  $L$  la fonction définie par  $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta)$ .

L'appartenance de  $f$  à  $\mathcal{G}$  est équivalente à ce que la fonction  $L$  admette un maximum global en  $\theta = \bar{x}_n$  ce qui, par croissance stricte de la fonction logarithme, équivaut à ce que la fonction  $\ln(L)$  admette un maximum global en  $\theta = \bar{x}_n$ .

Il s'ensuit que  $(\ln(L))'(\bar{x}_n) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i - \bar{x}_n) = 0$ .

3. Il existe  $\sigma > 0$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right)$ .

$$L(\theta) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2\right).$$

$$\ln(L(\theta)) = \frac{-n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 \quad \text{et} \quad (\ln(L))'(\theta) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta) = \frac{n}{\sigma^2}(\bar{x}_n - \theta).$$

Il en résulte que le trinôme  $\ln(L(\theta))$  est bien maximal lorsque  $\theta = \bar{x}_n$ .

4. Lorsque  $n = 2$  la condition  $(\star)$  devient :  $\varphi(x_1 - \bar{x}_2) + \varphi(x_2 - \bar{x}_2) = 0$  soit  $\varphi(\frac{x_1 - x_2}{2}) + \varphi(\frac{x_2 - x_1}{2}) = 0$ .

En posant  $t = \frac{x_1 - x_2}{2}$  on obtient :  $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) + \varphi(-t) = 0$   
et la fonction  $\varphi$  est impaire.

5.  $\text{Ker}(h) = \text{Vect}((1, 1, 1))$  et  $\text{Im}(h) = \mathbb{R}^2$ .

6.a) Lorsque  $n = 3$  la condition  $(\star)$  devient :  $\varphi(x_1 - \bar{x}_3) + \varphi(x_2 - \bar{x}_3) + \varphi(x_3 - \bar{x}_3) = 0$

soit :

$$\varphi\left(\frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}\right) + \varphi\left(\frac{2x_2 - x_1 - x_3}{3}\right) + \varphi\left(\frac{2x_3 - x_1 - x_2}{3}\right) = 0 \text{ et par imparité de } \varphi :$$

$$\varphi\left(\frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}\right) + \varphi\left(\frac{2x_2 - x_1 - x_3}{3}\right) = \varphi\left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{3}\right)$$

En posant  $u = \frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}$  et  $v = \frac{2x_2 - x_1 - x_3}{3}$  on a  $u + v = \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{3}$  et la surjectivité de  $h$  garantit que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(u + v).$$

En dérivant l'égalité ci-dessus par rapport à la variable  $u$  on obtient :  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi'(u) = \varphi'(u + v)$   
et donc :

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad \varphi'(v) = \varphi'(0) = \text{constante.}$$

6.b) D'après ce qui précède si  $f$  est dans  $\mathcal{G}$  alors il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $\varphi' = c$  et  $\varphi'$  étant impaire on a :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = cx$ .

Il s'ensuit qu'il existe des constantes  $c$  et  $d$  telles que :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) = cx^2 + d$ .

$f$  étant une densité on a nécessairement  $c < 0$  et  $f(x) = k \exp(cx^2)$  où  $k$  est tel que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ .

En utilisant le résultat de la question 3 il en résulte finalement que l'ensemble  $\mathcal{G}$  est exactement l'ensemble des densités de classe  $\mathcal{C}^2$  d'une loi normale d'espérance nulle.

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 7

Soit  $N$  une matrice carrée réelle telle que  $N^k = 0$  pour un certain entier naturel  $k \geq 1$  (on dit que  $N$  est nilpotente). On suppose de plus que  $N$  et  ${}^tN$  commutent. Montrer que  $N = 0$ .  
Indication : on pourra considérer la matrice  $M = N + {}^tN$ .

---

### Solution :

On pose  $M = N + {}^tN$ . Puisque  $N$  et  ${}^tN$  commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton à  $M$ . Ainsi, pour tout entier  $n \geq 2k$  on a

$$M^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} N^\ell ({}^tN)^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{n}{\ell} N^\ell ({}^tN)^{n-\ell} = 0.$$

Donc  $M$  est nilpotente également. Or  $M$  est symétrique, donc diagonalisable :  $M = PDP^{-1}$  avec  $D$  une matrice diagonale et  $P$  une matrice inversible. Donc  $D^n = P^{-1}M^nP = 0$  ce qui implique  $D = 0$  et  $M = 0$ . Ainsi,  $N$  est antisymétrique et  $N^2$  est symétrique et nilpotente. Donc  $N^2$  est nulle par le même argument que pour  $M$ . D'où  $N^tN = 0$ . En prenant la trace on en déduit que  $N = 0$ .

remarque : on peut également utiliser une récurrence sur la dimension en observant que  $\ker(N)^\perp = \text{Im}({}^tN)$  est stable par  $N$  car  $N$  et  ${}^tN$  commutent.

# SUJET Maths Approfondies 8

## Exercice principal Maths Approfondies 8

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

1. Question de cours : calcul des fonctions de répartition et de densité de  $Z^2$  où  $Z$  est une variable aléatoire à densité.
2. Donner l'exemple d'une variable aléatoire réelle  $X$  telle que  $X$  et  $-X$  ont la même loi.
3. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle ayant une densité  $f_X$ . Donner une condition suffisante sur  $f_X$  pour que  $X$  et  $-X$  aient la même loi. On justifiera la réponse.
4. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles vérifiant  $P(X \neq Y) = 0$ . Montrer qu'elles ont la même loi.
5. Est-ce que la réciproque est vraie dans le cas général ?
6. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles telles que

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}), Y \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2}).$$

Déterminer les lois de  $X^6$  et de  $Y^3$  et interpréter le résultat. On admettra que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

7. Donner un exemple de trois variables aléatoires réelles  $X, Y$  et  $Z$  telles que  $X$  et  $Y$  ont la même loi mais  $XZ$  et  $YZ$  n'ont pas la même loi.

---

### Solution :

1. Voie EC, mathématiques approfondies de seconde année p13
2. Il suffit de choisir une variable aléatoire vérifiant  $P(X = 0) = 1$ .
3. Il suffit de choisir  $X$  à densité  $f_X$  paire. En effet, dans ce cas on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = \int_{-x}^{+\infty} f(t) dt.$$

Par changement de variable, on obtient

$$P(-X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(-t) dt.$$

Ainsi,  $-X$  est une variable aléatoire ayant comme densité la fonction définie par  $f_{-X}(t) = f_X(-t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Pour que  $X$  et  $-X$  aient la même loi, il suffit que  $f_{-X} = f_X$ , c'est-à-dire il suffit que  $f_X$  soit paire. Par exemple,  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

4. Supposons  $P(X \neq Y) = 0$  et soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) &= P(Y \leq x \text{ et } Y = X) \cup (Y \leq x \text{ et } Y \neq X) \\ &= P(Y \leq x \text{ et } Y = X) + P(Y \leq x \text{ et } Y \neq X) \\ &= P(Y \leq x \text{ et } Y = X) \text{ car } P(Y \leq x \text{ et } Y \neq X) \leq P(Y \neq X) = 0, \\ &= P(X \leq x \text{ et } X = Y) \\ &= P(X \leq x). \end{aligned}$$

5. La réciproque est fautive en général. Il suffit de choisir une variable aléatoire réelle  $X$  à densité paire. On a alors  $X$  et  $-X$  qui ont la même loi et  $P(X \neq -X) = P(X \neq 0) = 1$ .
6. La fonction  $t \mapsto t^3$  est une fonction de classe  $C^1$  strictement croissante. C'est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Notons  $g$  sa fonction réciproque. On a

- si  $x \leq 0$ , alors  $P(Y^3 \leq x) \leq P(Y^3 \leq 0) = P(Y \leq 0) = 0$ . Donc  $P(Y^3 \leq x) = 0$ .
- si  $x > 0$ ,

$$P(Y^3 \leq x) = P(Y \leq x^{1/3}) = \int_0^{x^{1/3}} f_Y(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{x^{1/3}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

En effectuant le changement de variable  $u = t^3$  on obtient

$$P(Y^3 \leq x) = \frac{1}{3\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x u^{-5/6} e^{-u^{1/3}} du.$$

Ainsi  $Y^3$  est une variable aléatoire à densité

$$f_{Y^3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{3\Gamma(\frac{1}{2})} x^{-5/6} e^{-x^{1/3}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Par ailleurs, on a

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

- si  $x \leq 0$ ,  $P(X^6 \leq x) \leq P(X^6 \leq 0) = P(X = 0) = 0$ . Donc  $P(X^6 \leq x) = 0$ .
- si  $x > 0$ , alors

$$P(X^6 \leq x) = P(-x^{1/6} \leq X \leq x^{1/6}) = \int_{-x^{1/6}}^{x^{1/6}} f_X(t) dt = 2 \int_0^{x^{1/6}} f_X(t) dt \text{ car } f_X \text{ est paire.}$$

En effectuant le changement de variable  $u = t^6$  on obtient

$$P(X^6 \leq x) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \int_0^x u^{-5/6} e^{-u^{1/3}} du.$$

On en déduit que  $X^6$  et  $Y^3$  ont la même loi. En effet,  $X^2$  et  $Y$  ont la même loi (observation pouvant simplifier le calcul).

7. on peut choisir  $X$  une variable aléatoire à densité paire et  $Y = Z = -X$ . On a  $X$  et  $Y$  qui ont la même loi, et  $XZ = -X^2$  tandis que  $YZ = X^2$ . Elles n'ont clairement pas la même loi.

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 8

Soit  $\sigma$  une injection de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

1. Proposer 3 exemples de telles injection . Dans chacun de vos exemples, quelle est la nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$  ?
  2. Dans le cas générale, donner la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$  ?
- 

**Solution :**

1.  $n \mapsto n$ ;  $n \mapsto 2n$ ;  $n \mapsto 2n + 1$
2. (*Indication* : On pourra s'intéresser à la quantité  $S_{2n} - S_n$  où  $S_n$  est la somme partielle d'ordre  $n$  associée à la série.)

Soit

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k^2}$$

On a :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k)$$

L'ensemble  $\{\sigma(k), k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket\}$  étant formé de  $n$  entiers distincts on a :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \geq \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Il en résulte que :

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{n+1}{8n} > \frac{1}{8}$$

Il s'ensuit que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$  n'est pas convergente (et donc diverge vers  $+\infty$  puisque à termes positifs).

# SUJET Maths Approfondies 9

## Exercice principal Maths Approfondies 9

À toute fonction  $f$ , continue sur  $[0, 1]$ , on associe la suite  $(a_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k(f) = \int_0^1 x^k f(x) dx.$$

- Propriété des fonctions continues sur un intervalle.
- Montrer que pour toute fonction  $f$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k(f) = 0$ .  
On admet provisoirement la propriété :  
(\* si  $f$  est une application continue sur  $[0, 1]$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k(f) = 0$ , alors  $f = 0$ .)
- Soit  $f$  une application continue sur  $[0, 1]$ .
  - Calculer  $a_k(F)$  où  $F : x \mapsto -\int_x^1 f(t) dt$ .
  - On suppose qu'il existe un entier  $p \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \geq p$  on ait  $a_k(f) = 0$ . Montrer que  $f = 0$ .  
On va maintenant démontrer la propriété (\*)
- (a) Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels vérifiant  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ .  
Construire un polynôme  $P$  du second degré satisfaisant aux conditions suivantes :
  - $\forall x \in ]\alpha, \beta[ P(x) < 0$ ;
  - $\forall x \in [0, \alpha] \cup [\beta, 1], 0 \leq P(x) \leq 1$ .Tracer un graphe illustrant la construction du polynôme  $P$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  quelconques.
- Un tel polynôme  $P$  étant choisi, on choisit  $a, b$  vérifiant  $\alpha < a < b < \beta$ .

$$\text{Déterminer alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (1 - P(x))^n dx.$$

- (a) Soit  $f$  une application continue sur  $[0, 1]$ . On suppose qu'il existe trois constantes  $\varepsilon, \alpha, \beta$ , avec  $\varepsilon > 0$  et  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ , telles que l'on ait :

$$\forall x \in [\alpha, \beta], f(x) \geq \varepsilon.$$

Soit alors  $P$  un polynôme satisfaisant aux conditions imposées dans la question précédente. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x)(1 - P(x))^n dx.$$

- (b) Démontrer alors la propriété (\*)
- On suppose que  $f(1) \neq 0$ . Montrer que  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)$  diverge.

### Solution :

- Programme première année page 16.  
L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).

- $f$  est continue sur le segment  $[0; 1]$ , il existe donc  $M$  tel que  $\forall x \in [0; 1], |f(x)| \leq M$

Donc par positivité de l'intégrale :

$$|a_k(f)| \leq \int_0^1 |f(x)| x^k dx \leq \int_0^1 M \cdot x^k dx = \frac{M}{k+1}$$

Donc par encadrement  $\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k(f) = 0}$

3. (a)  $F$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en 1.  $u(x) = F(x)$ ,  $v'(x) = x^k$ ,  $u, v \in \mathcal{C}^1([0; 1])$

$$a_k(F) = \int_0^1 x^k F(x) dx = \left[ \frac{x^{k+1}}{k+1} F(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+1} f(x) dx = 0 - 0 - \frac{1}{k+1} a_{k+1}(f).$$

$$a_k(F) = -\frac{1}{k+1} a_{k+1}(f).$$

(b) Montrons la propriété par récurrence sur  $p$ .

C'est vrai au rang 0 (C'est \*).

Si la propriété est vraie au rang  $p$ ,

Soit  $f$  telle que  $\forall k \geq p+1$ ,  $a_k(f) = 0$ . Donc  $\forall j \geq p$   $a_{j+1}(f) = 0$  donc  $a_j(F) = 0$ .

On applique l'hypothèse de récurrence à  $F$ . Donc  $F$  est nulle. En dérivant  $f$  est nulle aussi.

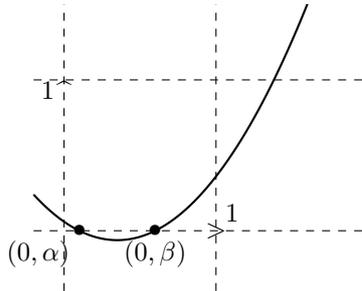
L'hypothèse est héréditaire.

$$\text{Si il existe } p \text{ tel que } \forall k \geq p, a_k(f) = 0 \text{ alors } f = 0.$$

4. (a) On pose  $P(X) = (X - \alpha)(X - \beta)$ .

On a bien  $P(x) < 0$  si  $x \in ]\alpha; \beta[$ .

Et si  $x \in [0; \alpha] \cup [\beta; 1]$ ,  $P(x) \geq 0$  et  $|P(x)| = |x - \alpha| \cdot |x - \beta| \leq 1 \times 1$ .



(b)  $x \mapsto 1 - P(x)$  est continue sur le segment  $[0; 1]$ . Il existe  $c \in [a; b]$  tel que  $\forall x \in [a; b]$ ,  $1 - P(x) \geq 1 - P(c)$ .

Ainsi par positivité de l'intégrale,  $\int_a^b (1 - P(x))^n dx \geq \int_a^b (1 - P(c))^n dx = (b - a)(1 - P(c))^n$ .

Or,  $1 - P(c) > 1$ , donc par encadrement  $\int_a^b (1 - P(x))^n dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ .

5. (a) Avec Chasles :

$$\int_0^1 f(x)(1 - P(x))^n dx = \int_0^\alpha f(x)(1 - P(x))^n dx + \int_\alpha^a f(x)(1 - P(x))^n dx + \int_a^b f(x)(1 - P(x))^n dx + \int_b^\beta (1 - P(x))^n f(x) dx + \int_\beta^1 (1 - P(x))^n f(x) dx.$$

•  $\forall x \in [a; b]$ ,  $f(x)((1 - P(x))^n \geq \varepsilon((1 - P(x))^n$ .

Par positivité de l'intégrale,  $\int_a^b f(x)(1 - P(x))^n dx \geq \varepsilon \int_a^b (1 - P(x))^n dx$ .

Donc d'après 4-b,  $\int_a^b f(x)(1 - P(x))^n dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ .

•  $\forall x \in [\alpha; a]$ ,  $(1 - P(x))^n f(x) \geq 1 \times \varepsilon \geq 0$ , donc  $\int_\alpha^a f(x)(1 - P(x))^n dx \geq 0$ .

C'est la même chose sur  $[b; \beta]$ .

•  $\forall x \in [0; \alpha]$ ,  $|f(x)(1 - P(x))^n| = |f(x)| |1 - P(x)|^n \leq |f(x)| \times 1$ .

Ainsi  $\left| \int_0^\alpha f(x)(1 - P(x))^n dx \right| \leq \int_0^\alpha |f(x)| dx$ .

Donc  $\left( \int_0^\alpha f(x)(1 - P(x))^n dx \right)$  est une suite minorée.

Ainsi  $\int_0^1 f(x)(1 - P(x))^n dx$  est la somme d'une suite divergent vers  $+\infty$  et de 4 suites minorées.

$$\int_0^1 f(x)(1 - P(x))^n dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

(b)  $x \mapsto (1 - P(x))^n$  est un polynôme, il existe donc des coefficients  $b_0, \dots, b_{2n}$  tels que :

$$\forall x \in [0; 1] \quad (1 - P(x))^n = \sum_{k=0}^{2n} b_k x^k.$$

On a donc  $\int_0^1 f(x)(1 - P(x))^n dx = \sum_{k=0}^m b_k \int_0^1 f(x)x^k dx = 0.$

Il n'existe donc pas d'intervalle  $[\alpha; \beta]$  ni de  $\varepsilon > 0$  tel que  $f(x) \geq \varepsilon$  sur l'intervalle.

Mais si il existe  $x_0$  tel que  $f(x_0) > 0$ , en posant  $\varepsilon = f(x_0)/2$ , on aurait  $f(x) \geq \varepsilon$  au voisinage de  $x_0$ . C'est absurde!

En appliquant le même raisonnement à  $-f$ , il n'existe pas non plus de  $x_0$  tel que  $f(x_0) < 0$ .

Donc  $f$  est nulle sur  $[0; 1]$ .

6. De la même manière. Si  $f(1) \neq 0$ , par exemple  $f(1) > 0$ , il existe  $\alpha$  tel que  $\forall x \in [1 - \alpha; 1]$ ,  $f(x) \geq \frac{f(1)}{2}$ .

On écrit alors  $a_k(f) = b_k(f) + c_k(f)$  où  $b_k(f) = \int_0^{1-\alpha} x^k f(x) dx$  et  $c_k(f) = \int_{\alpha}^1 x^k f(x) dx$ .

$|b_k(f)| \leq \int_0^{1-\alpha} x^k |f(x)| dx \leq (1-\alpha)^k \int_0^{1-\alpha} |f(x)| dx$ . La série de terme général  $b_k(f)$  converge absolument.

Et  $c_k(f) \geq \int_{1-\alpha}^1 x^k \frac{f(0)}{2} dx \geq \frac{f(0)(1 - (1 - \alpha)^{k+1})}{2(k+1)} \geq \frac{f(0)}{2(k+1)}$

Ainsi la série de terme général  $c_k(f)$  diverge.

La série de terme général  $a_k(f)$  diverge.

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 9

Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires, indépendantes, de même loi et admettant une variance finie. Trouver l'estimateur sans biais de la moyenne  $\theta = E(X_1)$  qui soit de variance minimale dans la classe des estimateurs linéaires  $\tilde{\theta}_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ .

---

**Solution :**

Comme l'estimateur est sans biais, on a  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ . De plus, par indépendance des variables

$$V(\tilde{\theta}_n) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbb{V}(X_1)$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a

$$1 = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n 1\right) = n \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

avec cas d'égalité si et seulement si tous les  $a_i$  sont égaux. Ainsi, l'estimateur sans biais de variance minimale est la moyenne empirique  $\tilde{\theta}_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i$ .

# SUJET Maths Approfondies 10

## Exercice principal Maths Approfondies 10

Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des densités  $f$  continues sur  $\mathbb{R}$ , nulles sur  $] -\infty, 0]$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$  et telles que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f^2(t) dt$  converge.

1. Question de cours : produit de convolution.
2. Montrer que pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  et tout  $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}^2$  on a :  $\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2 \in \mathcal{E}$ .
3. Soit  $f \in \mathcal{E}$ . Montrer que pour tout réel  $x \geq 0$  l'intégrale  $\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  converge.

Dans la suite de l'exercice on fixe  $f \in \mathcal{E}$  et on pose :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

4. Montrer que  $g$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et, pour tout  $x > 0$ , exprimer  $g'(x)$  à l'aide de  $f(x)$ .
5. Etablir que la fonction  $g$  est une densité de probabilité.
6. Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$  et  $Y$  une variable aléatoire de densité  $g$ . Montrer que si  $X$  admet une espérance, alors  $Y$  aussi et qu'on a alors l'égalité :

$$E(Y) = \frac{1}{2}E(X)$$

7. Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme à densité sur  $[0, 1]$ , indépendante de  $X$ .
  - (a) Montrer que la variable aléatoire  $UX$  admet  $g$  comme densité.
  - (b) Retrouver ainsi le résultat de la question 6.

### Solution :

1. Cours p16 mathématiques approfondies de seconde année
2. On a :

• La fonction  $\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2$  est positive par positivité de  $f_1$  et  $f_2$ , nulle sur  $] -\infty, 0]$  et possède les mêmes régularités que  $f_1$  et  $f_2$ .

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda f_1(t) + (1 - \lambda)f_2(t) dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) dt + (1 - \lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) dt = \lambda \times 1 + (1 - \lambda) \times 1 = 1.$$

Reste à montrer que  $\int_0^{+\infty} (\lambda f_1(t) + (1 - \lambda)f_2(t))^2 dt$  converge ce qui, compte-tenu des hypothèses, revient à montrer que  $\int_0^{+\infty} f_1(t)f_2(t) dt$  converge et cela résulte de l'inégalité :

$$f_1(t)f_2(t) \leq \frac{1}{2} (f_1^2(t) + f_2^2(t))$$

3. Il suffit de montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  converge.

• En 0 :  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(0)$  et l'intégrale est donc faussement impropre en 0.

- En  $+\infty$  :  $\left| \frac{f(t)}{t} \right| \leq \frac{1}{2} \left( f^2(t) + \frac{1}{t^2} \right)$  et la convergence de l'intégrale impropre en  $+\infty$  en résulte.

4. Soit  $H$  une primitive de  $t \rightarrow \frac{f(t)}{t}$  sur  $]0, +\infty[$ . On a :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt - \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt - (H(x) - H(0))$$

Il en résulte que  $g$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et on a

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = -H'(x) = \frac{-f(x)}{x}$$

5.  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  et positive et pour tout  $A > 0$  une intégration par parties donne :

$$\int_0^A g(t) dt = \int_0^A 1.g(t) dt = [tg(t)]_0^A - \int_0^A tg'(t) dt = Ag(A) + \int_0^A f(t) dt$$

En remarquant que :

$$0 \leq Ag(A) = A \int_A^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \leq \int_A^{+\infty} f(t) dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

on obtient :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A g(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$$

et finalement  $g$  est bien une densité.

6. On procède comme à la question 5 :

$$\int_0^A tg(t) dt = \left[ \frac{t^2}{2} g(t) \right]_0^A - \int_0^A \frac{t^2}{2} g'(t) dt = \frac{1}{2} A^2 g(A) + \frac{1}{2} \int_0^A tf(t) dt$$

avec

$$0 \leq A^2 g(A) \leq A^2 \int_A^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \leq \int_A^{+\infty} tf(t) dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

du fait que  $X$  admet une espérance.

Il s'ensuit que :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A tg(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} tf(t) dt$$

et finalement on a bien :

$$E(Y) = \frac{1}{2} E(X)$$

7.a) On a  $(UX)(\Omega) = [0, +\infty[$  et pour tout réel  $x > 0$  :

$$P(UX \leq x) = P(\ln(U) + \ln(X) \leq \ln(x))$$

On va donc chercher une densité de  $\ln(U) + \ln(X)$  en utilisant la formule de convolution.

On a :

- Pour tout réel  $t$  :  $P(\ln(U) \leq t) = P(U \leq e^t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ e^t & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ .

Une densité de la variable aléatoire  $\ln(U)$  est ainsi donnée par

$$f_{\ln(U)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ e^t & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

- Pour tout réel  $t$  :  $P(\ln(X) \leq t) = P(X \leq e^t) = F_X(e^t)$ .

Une densité de la variable aléatoire  $\ln(X)$  est ainsi donnée par

$$f_{\ln(X)}(t) = e^t f(e^t)$$

Par indépendance une densité de  $\ln(U) + \ln(X)$  est donnée par :

$$f_{\ln(U)+\ln(X)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln(X)}(t)f_{\ln(U)}(x-t)dt = \int_x^{+\infty} e^t f(e^t)e^{x-t} dt = e^x \int_x^{+\infty} f(e^t)dt$$

Une densité de la variable aléatoire  $UX$  est ainsi donnée par :

$$f_{UX}(x) = \frac{1}{x} f_{\ln(U)+\ln(X)}(\ln(x)) = \frac{e^{\ln(x)}}{x} \int_{\ln(x)}^{+\infty} f(e^t)dt = \int_{\ln(x)}^{+\infty} f(e^t)dt$$

et le changement de variable  $u = e^t$  donne

$$f_{UX}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = g(x)$$

b) On a ainsi  $E(Y) = E(UX) = E(U)E(X) = \frac{1}{2}E(X)$  du fait de l'indépendance de  $X$  et  $U$ .  
On retrouve bien le résultat de la question 6.

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 10

Soit une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_n^2) = 0$$

On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers 0.

A-t-on  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ ? La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle bornée?

---

**Solution :**

non pour la question 1, prendre  $u_n = 0$  si  $n$  pair et 1 sinon. Oui pour la question 2 : comme il existe  $M > 0$  tel que pour  $n$  assez grand  $-M \leq u_n - u_n^2$ , soit  $u_n^2 - u_n - M \leq 0$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se situe entre les 2 racines du polynome  $X^2 - X - M$  et est donc forcément bornée.

# SUJET Maths Approfondies 11

## Exercice principal Maths Approfondies 11

On admettra, pour cet exercice, l'équivalent suivant :  $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ .

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ , avec  $n \geq 1$ . On procède à une suite de tirages avec remise et on note  $X$  le numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois une boule déjà tirée.

- Question de cours : théorème central limite.
- (a) Justifier que la variable aléatoire  $X$  est à valeurs dans  $\llbracket 2, n+1 \rrbracket$ .  
(b) Calculer  $\mathbb{P}(X = 2)$  et  $\mathbb{P}(X = n+1)$ .
- (a) Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Déterminer  $\mathbb{P}(X > k)$ .  
(b) La formule précédente est-elle encore valable pour  $k = 0$  ?
- (a) Montrer que  $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X > k)$ .  
(b) En déduire que :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$$

- Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variable aléatoires indépendantes identiquement distribuées, suivant toutes une loi de Poisson de paramètre 1. On pose, pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

- Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \frac{1}{2}$ .
- En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$ .
- Conclure que  $\mathbb{E}(X) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$

### Solution :

- Programme Maths approfondies ECG2 p. 22.
- (a) Pour obtenir deux fois le même résultat, il faut effectuer au moins deux lancers d'où  $X \geq 2$ . Par ailleurs, en au plus  $n+1$  tirages on est assuré d'obtenir deux boules identiques car il y a  $n$  boules dans l'urne - c'est le principe des tiroirs de Dirichlet. Ainsi  $X \leq n+1$ . Finalement,  $X$  est bien à valeurs dans  $\llbracket 2, n+1 \rrbracket$ .  
(b) L'événement  $X = 2$  est réalisé si et seulement si on obtient deux fois la même boule au cours des deux premiers tirages. Comme il y a  $n$  boules dans l'urne, choisir un tel tirage revient à choisir une boule et il y a donc  $n$  tirages possibles. Par ailleurs, quand on effectue deux tirages successifs avec remise, il y a  $n^2$  tirages possibles et donc par équiprobabilité :

$$P(X = 2) = \frac{n}{n^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{P(X = 2) = \frac{1}{n}}$$

Si  $X = n+1$ , cela signifie que l'on tire  $n$  boules distinctes lors des  $n$  premiers tirages. Cela revient donc à se donner une permutation des  $n$  boules et il y a donc  $n!$  possibilités. Au dernier tirage, il faut choisir la boule qui est obtenue une seconde fois, d'où  $n$  possibilités. Il y a donc  $n \times n!$  tirages favorables. Par ailleurs, il y a  $n^{n+1}$  tirages possibles. Là encore par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(X = n+1) = \frac{n \times n!}{n^{n+1}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathbb{P}(X = n+1) = \frac{n!}{n^n}}$$

3. (a) Comme  $X$  est à valeurs dans  $\llbracket 2, n+1 \rrbracket$ , on peut se limiter à étudier  $n+1$  tirages successifs avec remise, ce qui revient à travailler dans l'univers  $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^{n+1}$ . Il y a donc en tout  $n^{n+1}$  tirages possibles. L'événement  $\{X > k\}$  est réalisé si et seulement si on obtient  $k$  boules distinctes lors des  $k$  premiers tirages. Pour se donner un tel tirage, on choisit  $k$  boules parmi les  $n$  de l'urne, il y a donc  $\binom{n}{k}$  possibilités. On a alors  $k!$  manières de permuter ces  $k$  boules pour déterminer les  $k$  premiers. Il reste alors à choisir les  $n+1-k$  tirées après les  $k$  premières, il y a alors  $n^{n+1-k}$  possibilités. On obtient ainsi  $k! \binom{n}{k} n^{n+1-k}$  tirages favorables et donc, par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(X > k) = \frac{k! \binom{n}{k} n^{n+1-k}}{n^{n+1}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathbb{P}(X > k) = \frac{1}{n^k} \frac{n!}{(n-k)!}}$$

- (b) La formule est encore valable pour  $k=0$  car  $\mathbb{P}(X > 0) = 1 = \frac{1}{n^0} \frac{n!}{n!}$
4. (a) Par définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=2}^{n+1} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n+1} k \mathbb{P}(X = k)$$

car  $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=1) = 0$ . Alors, pour  $k \geq 0$ ,  $\{X \geq k\} = \{X = k\} \cup \{X \geq k+1\}$  et l'union écrite étant disjointe, par additivité des probabilités :

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X \geq k+1) \quad \text{soit} \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)$$

On calcule ainsi :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n+1} k(\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} k(\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)) \quad \text{car } X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k \mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X > k) \quad \text{car } \mathbb{P}(X > n+1) = 0 \text{ et } 0 \cdot \mathbb{P}(X > -1) = 0 \\ &= \sum_{k=0}^n (k+1) \mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X > k) \quad \text{par décalage d'indice} \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X > k) \end{aligned}$$

- (b) Les deux questions précédentes prouvent alors que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^k} \frac{n!}{(n-k)!}$$

En inversant l'ordre de sommation, ce qui revient à remplacer l'indice  $k$  par  $n-k$ , on obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^{n-k}} \frac{n!}{k!} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}}$$

5. (a) On note  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$  la moyenne empirique des  $(X_n)$ . Alors :

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - 1}{1} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sigma(X_1)}$$

Alors, comme les  $(X_n)$  sont indépendantes et identiquement distribuées, en vertu du théorème limite central, la variable aléatoire  $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$  converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. En particulier :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}$$

(b) On remarque que :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \mathbb{P}(S_n \leq n)$$

Or  $S_n$  est la somme de  $n$  variables de Poisson indépendantes toutes de paramètre 1. Donc  $S_n$  suit une loi de Poisson de paramètre  $n$ . On en déduit que :

$$\mathbb{P}(S_n \leq n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$$

Alors d'après la question précédente :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}}$$

(c) D'après la question 4.(b) :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\mathbb{E}(X) \underset{+\infty}{\sim} n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{2}$$

Enfin, d'après l'équivalent de  $n!$  donné dans l'énoncé :

$$n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}$$

d'où finalement :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}}$$

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 11

On cherche les extrema de la fonction  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2$  sous les contraintes

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \text{ et } 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1.$$

Écrire la condition nécessaire du premier ordre pour ce système et trouver l'ensemble des points réalisant cette condition.

---

**Solution :**

On pose  $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2)$ ,  $g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 5$  et  $g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - \frac{1}{2}$  pour  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . La condition s'écrit : il existe deux nombres réels  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 \nabla g_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 \nabla g_2(x_1, x_2, x_3).$$

Soit

$$\begin{cases} x_1 &= \lambda_1 + \lambda_2, \\ 2x_2 &= \lambda_1 + 2\lambda_2, \\ 6x_3 &= \lambda_1 + 3\lambda_2, \end{cases}$$

En tenant compte des contraintes on trouve  $\lambda_1 = 17$ ,  $\lambda_2 = -\frac{28}{3}$ ,  $x_1 = \frac{23}{3}$ ,  $x_2 = -\frac{5}{6}$ ,  $x_3 = -\frac{11}{6}$ . On peut de plus montrer que c'est un minimum global sous ces contraintes.

# SUJET Maths Approfondies 12

## Exercice principal Maths Approfondies 12

Toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

On cherche à mesurer l'indice de perméabilité  $\theta$  d'un bouclier antiradiation de la manière suivante :

On expose des bactéries protégées par ce bouclier à une radiation.

Si une bactérie protégée par le bouclier est exposée à une radiation, elle subira  $Y$  bombardements de neutrons, où  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ .

On observe alors la durée de survie  $T$  de la bactérie, qui, si elle a été bombardée par  $k$  neutrons, suivra une loi exponentielle de paramètre  $k + 1$ .

Cette expérience est répétée  $n$  fois, où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2, et l'on suppose que  $T_1, \dots, T_n$  les durées de survie observées sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que  $T$ .

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $g : x \mapsto \frac{1 - e^{-x}}{x}$ . On admet que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) < 0$  et  $g''(x) > 0$ .

1. Question de cours : formule de l'espérance totale.

On admet que cette formule se généralise aux variables à densité.

2. (a) Montrer que  $T$  admet une espérance que l'on exprimera en fonction de  $\theta$ .

(b) Montrer que  $T$  admet un moment d'ordre 2 et que  $V(T) \leq 2$ .

3. Déterminer la fonction de répartition de  $T$ .

4. On note alors, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_k$ . Montrer qu'il est possible, à partir de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de construire une variable aléatoire  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge en probabilité vers  $\theta$ .

5. (a) Soit  $\alpha \in ]0; 1[$ . En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, construire un intervalle de confiance pour  $g(\theta)$  au niveau de confiance  $1 - \alpha$  à l'aide de  $X_n$ .

(b) Proposer alors un intervalle de confiance pour  $\theta$  au niveau de confiance  $1 - \alpha$ .

(c) On suppose que l'on a observé que  $g(2) \leq X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}} \leq X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}} \leq g(1)$ .

Majorez la largeur de l'intervalle de confiance par une grandeur ne dépendant que de  $n$  et de  $\alpha$ .

---

### Solution :

1. Programme deuxième année page 12.

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète, soit  $(A_n)$  un système complet d'événements tels que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $P(A_n) \neq 0$ . Alors  $X$  admet une espérance pour  $P$  si et seulement si :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$  l'espérance conditionnelle  $E(X/A_n)$  existe ;

- la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} E(|X|/A_n) P(A_n)$  converge.

Dans ce cas,  $E(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(X/A_n) P(A_n)$ .

2. (a) On considère le système complet d'événements  $(Y = n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\mathbb{E}(|T| | Y = n) = \mathbb{E}(T | Y = n) = \frac{1}{n+1}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(|T| | Y = n) \mathbb{P}(Y = n) \text{ converge car } \mathbb{E}(|T| | Y = n) \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n+1} \mathbb{P}(Y = n) \leq \mathbb{P}(Y = n).$$

$$\text{De plus, } \mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\theta} \frac{\theta^n}{(n+1)!} = e^{-\theta} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\theta^{j-1}}{j!} = \frac{e^{-\theta}}{\theta} (e^{\theta} - 1) = \frac{1 - e^{-\theta}}{\theta} = \boxed{g(\theta)}.$$

(b) Pour  $Z$  suivant une loi exponentielle de paramètre  $a$ ,  $E(Z^2) = V(Z) + \mathbb{E}^2(Z) = \frac{2}{a^2} \leq 2$ .

On utilise encore la formule des espérances totales, avec  $\mathbb{E}(|T^2| | Y = n) = \frac{2}{(n+1)^2}$ .

Ainsi  $\mathbb{E}(|T^2| | Y = n) \mathbb{P}(Y = n) = \frac{2}{(n+1)^2} \mathbb{P}(Y = n) \leq 2 \mathbb{P}(Y = n)$  et donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(|T^2| | Y = n) \mathbb{P}(Y = n)$  converge.

et  $\mathbb{E}(T^2) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2 \mathbb{P}(Y = n) \leq 2$ .

Ainsi,  $V(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}^2(T) \leq 2$ .

3. Sans problème, si  $x \leq 0$ ,  $\mathbb{P}(T \leq x) = 0$ .

Et si  $x \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(T \leq x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Y = k\} \cap \{T \leq x\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\theta} \theta^k}{k!} (1 - e^{-(k+1)x}) = 1 - e^{-\theta} e^{-x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\theta e^{-x})^k}{k!}$

$\forall x \geq 0, F_T(x) = 1 - \exp(-\theta - x + \theta e^{-x})$ .

4.  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de VAR identiques et indépendantes admettant une espérance et une variance. D'après la loi des grands nombres,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers  $\mathbb{E}(T) = g(\theta)$ .

$g$  étant continue et strictement décroissante, elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $g(\mathbb{R}_+^*)$ .

Au voisinage de 0,  $g(x) = \frac{1 - (1 - x + o(x))}{x} = 1 + o(1)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

$x$	0	$+\infty$		$y$	0	1
$g(x)$	1		et	$g^{-1}(y)$	$+\infty$	
		0				

On souhaite appliquer la fonction  $g^{-1}$  qui est continue sur  $]0; 1[$ , mais n'est pas définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  (or le support de  $T$  est bien  $\mathbb{R}_+^*$ ).

On construit donc  $h : y \mapsto \begin{cases} g^{-1}(y) & \text{si } y \in ]0; 1[ \\ 0 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$ .

On a bien  $h(g(\theta)) = g^{-1}(g(\theta))$  car  $g(\theta) \in ]0; 1[$ .

$h$  est bien continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , ainsi comme  $X_n$  converge en probabilités vers  $g(\theta)$ ,  $h(X_n)$  converge en probabilité vers  $h(g(\theta))$ .

$h(X_n)$  converge en probabilités vers  $\theta$ .

5. (a) Á l'aide de Bienaymé-Tchébychev, on a  $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$ .

Ainsi  $\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$ .

Or,  $\mathbb{E}(X_n) = g(\theta)$  (linéarité) et  $V(X_n) = \frac{V(T)}{n} \leq \frac{2}{n}$  (indépendance des variables)

Ainsi  $\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{2}{n\varepsilon^2}$ .

On cherche  $\varepsilon$  vérifiant  $\frac{2}{n\varepsilon^2} = \alpha$  ssi  $\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}$ .

Ainsi,  $\mathbb{P}\left(g(\theta) \in \left] X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}; X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}} \right] \right) \geq 1 - \alpha$ .

Comme on sait que  $g(\theta) \in ]0; 1[$ , on peut proposer comme intervalle de confiance pour  $g(\theta)$  au niveau de confiance  $1 - \alpha$  :

$\left] \max\left(X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}, 0\right); \min\left(X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}, 1\right) \right[$ .

(b) On redonne le tableau de variation de  $g$ .

	0	$+\infty$
$g(x)$	1	0

•  $g(\theta) > 0$  ou  $g(\theta) < 1$  ne donne aucune information ne donne aucune information sur  $\theta$ .

• Quand  $X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}} > 0$ ,  $g(\theta) > X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}$  ssi  $\theta < g^{-1}\left(X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}\right)$

• Quand  $X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}} < 1$ ,  $g(\theta) < X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}$  ssi  $\theta > g^{-1}\left(X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}\right)$

Ainsi  $g(\theta) \in \left] \max\left(X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}, 0\right); \min\left(X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}, 1\right) \right[$  ssi  $\theta \in \left] h\left(X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}\right); h\left(X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}\right) \right[$

avec la convention  $h(y) = +\infty$  si  $y \leq 0$ ,  $h(y) = g^{-1}(y)$  si  $y \in ]0; 1[$  et  $h(y) = 0$  si  $y \geq 1$

Ainsi on peut proposer comme intervalle de confiance pour  $\theta$

$$\left] h\left(X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}\right); h\left(X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}\right) \right[$$

(c) On suppose  $0 < g(2) \leq X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}} \leq X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}} \leq g(1) < 1$ .

Avec les hypothèses données,  $h(t) = g^{-1}(t)$  pour tout  $t \in \left] X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}; X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}} \right[$ .

On cherche donc à majorer  $\left| g^{-1}\left(X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}\right) - g^{-1}\left(X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}\right) \right|$ .

On souhaite appliquer l'inégalité des accroissements finis à  $g^{-1}$  sur cet intervalle.

$g$  étant dérivable et  $g'$  ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $g^{-1}$  est dérivable sur  $]0; 1[$ , et  $(g^{-1})' = \frac{1}{g' \circ g^{-1}}$ .

Or,  $g^{-1}$  est une fonction strictement décroissante sur  $]0; 1[$ ,  $g'$  est une fonction strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc  $g' \circ g^{-1}$  est strictement décroissante et  $(g^{-1})'$  est strictement croissante.

Mais  $|(g^{-1})'| = -(g^{-1})'$  car  $(g^{-1})' < 0$ .

Donc  $|(g^{-1})'|$  est strictement décroissante.

Ainsi  $\forall t \in \left] X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}; X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}} \right[$ ,  $t \geq g(2)$ ,

donc  $|(g^{-1})'(t)| \leq \left| \frac{1}{g'(g^{-1}(g(2)))} \right| \leq \frac{1}{g'(2)} = \left| \frac{4}{6e^{-2} - 1} \right| = \frac{4e^2}{e^2 - 6}$ .

Ainsi avec l'IAF :

$\left| g^{-1}\left(X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}\right) - g^{-1}\left(X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}\right) \right| \leq \frac{4e^2}{e^2 - 6} \left| X_n + \sqrt{\frac{2}{n\alpha}} - \left(X_n - \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}\right) \right|$ .

La largeur de l'intervalle de confiance est majorée par  $\frac{4e^2}{e^2 - 6} \sqrt{\frac{2}{n\alpha}}$ .

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 12

Le déterminant d'une matrice  $2 \times 2$ ,  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est par définition  $\det(M) = ad - bc$ . On a pour deux matrices  $M$  et  $N$ ,  $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ .

Soit  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées  $2 \times 2$  et on considère  $\chi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application qui à une matrice  $M$  associe  $(\text{Tr}(M), \det(M))$ .

1. Montrer que  $\chi$  est surjective. Est-elle injective ?
2. On suppose que  $M$  est diagonalisable, exprimer  $\chi(M)$  à l'aide de ses valeurs propres.
3. Déterminer  $\chi^{-1}(0, 0)$ .

---

**Solution :**

1. Si  $(t, \delta) \in \mathbb{R}^2$ , la matrice  $\begin{pmatrix} t & -\delta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  a pour image  $(t, \delta)$ .

$\chi$  n'est pas injective, par exemple  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ont même image.

2. On a  $\chi(M) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1\lambda_2)$ .
3. En remarquant que les vecteurs colonnes doivent être colinéaires, on trouve que

$$\chi^{-1}(0, 0) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} \beta & -\beta^2 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

# SUJET Maths Approfondies 13

## Exercice principal Maths Approfondies 13

On se place dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}[x]$ .

On note  $d$  l'application dérivation  $d : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ P & \mapsto P' \end{cases}$

- Question de cours : théorème du rang.
- (a) Déterminer  $\text{Ker}(d^j)$  pour  $j \in \mathbb{N}^*$ .  
(b) On note pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d_n$  la restriction de  $d$  à  $\mathbb{R}_n[x]$ . Pour quelle valeur de  $n$   $d_n$  est-il un endomorphisme diagonalisable ?  
Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ ,  $k$  et  $m$  deux entiers de  $\mathbb{N}^*$  vérifiant  $f^k = d^m$ .
- (a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme surjectif de  $E$ .  
(b)  $f$  est-il injectif ?
- Soit  $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$ 
  - Montrer que  $\text{Ker}(f^p)$  est de dimension finie.  
On note  $f_p$  la restriction de  $f$  à  $\text{Ker}(f^p)$ .
  - Montrer que  $\text{Im}(f_p) = \text{Ker}(f^{p-1})$ .
  - Montrer que  $\dim(\text{Ker}(f^p)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(f^{p-1}))$ .
- Exprimer  $\dim(\text{Ker}(f))$  à l'aide de  $k$  et de  $m$ .
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $k$  et  $m$  pour qu'il existe un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $f^k = d^m$ .
- On suppose dans cette question que  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie et  $g$  est un endomorphisme diagonalisable. Soient  $k$  et  $m$  deux entiers naturels de  $\mathbb{N}^*$  fixés.  
Montrer que si pour tout endomorphisme  $f$  de  $E$ ,  $f^k \neq g^m$  alors  $k$  est pair et  $m$  est impair.

---

### Solution :

- Programme première année page 16.
- (a)  $d$  est sans problème un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[x]$ .  
Et pour  $P \in E$ ,  $d^j(P) = 0$  ssi  $P^{(j)} = 0$  ssi  $P \in \mathbb{R}_{j-1}[x]$ .  
 $\boxed{\text{Ker}(d^j) = \mathbb{R}_{j-1}[x]}$   
(b) Soit  $P \in \mathbb{R}_n[x]$ ,  $P \in \text{Ker}(d_n - \lambda Id)$  ssi  $P' = \lambda P$ .  
Si  $\lambda$  et  $P$  sont non nuls, on aurait  $\deg(P) = \deg(P')$  ce qui est exclu.  
Donc la seule valeur propre de  $d$  possible est 0.  
Donc  $d$  est diagonalisable ssi  $d$  est une homothétie ssi  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P' = 0$ .  
C'est vrai pour  $n = 0$ ,  $\boxed{d_n \text{ est diagonalisable ssi } n = 0}$ .  
Remarque : on peut aussi donner la matrice de  $d_n$  dans la base canonique.
- (a)  $d$  est bien surjective :  $\forall P \in E$ , si l'on note  $Q : x \mapsto \int_0^x P(t) dt$  un primitive de  $P$ ,  $d(Q) = Q' = P$ , donc  $d$  est surjective.  
Donc  $d^m$  est elle aussi surjective (on peut le montrer par récurrence)  
Donc  $f^k$  est surjective.  
Or, si  $P \in \text{Im}(f^k)$ ,  $\exists Q \in E$  tel que  $P = f^k(Q) = f(f^{k-1}(Q)) \in \text{Im}(f)$ , donc  $\text{Im}(f^k) \subset \text{Im}(f)$ .  
Donc  $\text{Im}(f) = E$  et  $\boxed{f \text{ est surjective}}$

(b) Attention, on ne peut pas utiliser le théorème du rang ici, car la dimension de  $E$  n'est pas finie.

Si  $f$  était injective, on aurait  $f^k$  qui serait aussi injective.

En effet, si l'on suppose  $f$  injective :

si  $Q \in \text{Ker}(f^k)$ ,  $f^k(Q) = 0$  donc  $f^{k-1}(Q) = 0$ , donc  $\dots Q = 0$ .

Ainsi  $f^k = d^m$  est injective. Or,  $\text{Ker}(d^m) = \mathbb{R}_{m-1}[x]$ . C'est absurde.

$f$  n'est pas injective.

4. (a) Comme  $p \leq k$ ,  $\text{Ker}(f^p) \subset \text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(d^m) = \mathbb{R}_{m-1}[x]$ .

$\text{Ker}(f^p)$  est un espace de dimension finie.

(b) On va procéder par double inclusion :

• Si  $y \in \text{Im}(f_p)$ , il existe  $x \in \text{Ker}(f^p)$  tel que  $f_p(x) = f(x) = y$

Mais alors,  $f^{p-1}(y) = f^p(x) = 0$  et  $\text{Im}(f_p) \subset \text{Ker}(f^{p-1})$ .

• Si  $y \in \text{Ker}(f^{p-1})$ , comme  $f$  est surjective, il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ .

Mais,  $f^{p-1}(y) = f^p(x) = 0$ , donc  $x \in \text{Ker}(f^p)$  et  $y \in \text{Im}(f_p)$ .

$\text{Im}(f_p) = \text{Ker}(f^{p-1})$

(c) On va appliquer le théorème du rang à  $f_p$

• Son espace de départ est  $\text{Ker}(f^p)$

•  $\text{Ker}(f_p) = \{x \in \text{Ker}(f^p) \text{ tel que } f_p(x) = 0\} = \{x \in \text{Ker}(f^p) \text{ tel que } f(x) = 0\}$

Ainsi  $\text{Ker}(f_p) = \text{Ker}(f^p) \cap \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f)$ .

On obtient bien  $\dim(\text{Ker}(f^p)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(f^{p-1}))$

5. Ainsi par récurrence limitée immédiate,  $\dim(\text{Ker}(f^p)) = p \dim(\text{Ker}(f))$  pour tout  $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$

Donc  $\dim(\text{Ker}(f^k)) = k \dim(\text{Ker}(f))$ . Or,  $\dim(\text{Ker}(f^k)) = \dim(\text{Ker}(d^m)) = m$

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \frac{m}{k}$$

6. D'après 5., si il existe un endomorphisme  $f$  de  $E$  vérifiant  $f^k = d^m$  alors  $\frac{m}{k}$  est un entier (ie  $k$  divise  $m$ )

Mais réciproquement, si  $k$  divise  $m$ , il suffit de poser  $f = d^{\frac{m}{k}}$ , cet endomorphisme de  $E$  vérifie  $f^k = d^m$ .

Il existe un endomorphisme  $f$  de  $E$  vérifiant  $f^k = d^m$  ssi  $k$  divise  $m$ .

7. Par contraposée. On suppose que  $m$  est pair ou  $k$  est impair.

Il existe une base  $\mathcal{B}$  de vecteurs propres où  $g$  est représenté par  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

$g^m$  est représenté dans cette base par  $\text{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m)$ .

• Si  $m$  est paire  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_j^m \geq 0$ .

On pose alors  $f$  l'endomorphisme représenté dans  $\mathcal{B}$  par  $\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  où  $\mu_j = \sqrt[k]{\lambda_j^m} = (\lambda_j^m)^{1/k}$ .

• si  $k$  et  $m$  sont impairs, on a de même poser :

$$\mu_j = \sqrt[k]{\lambda_j^m}.$$

(le programme ne définissant pas vraiment  $\sqrt[k]{\phantom{x}}$ , on peut proposer  $\mu_j = -\sqrt[k]{-\lambda_j^m}$  dans le cas où  $\lambda_j < 0$ )

Il existe donc un endomorphisme  $f$  de  $E$  tel que  $f^k = g^m$ .

Si pour tout endomorphisme  $f$  de  $E$   $f^k \neq g^m$ , alors  $m$  est impair et  $k$  est pair

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 13

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X + Y + 1 & X - Y - 1 \\ X - Y + 1 & X + Y - 1 \end{pmatrix}$$

On suppose que  $\mathbb{P}(\text{« } A \text{ diagonalisable »}) = 0$ . Montrer que  $X$  et  $Y$  ont la même loi.

---

**Solution :**

Les valeurs propres de  $A$  sont  $2X$  et  $2Y$ . Si  $X \neq Y$ ,  $A$  est diagonalisable car ces deux valeurs propres sont simples. Donc  $\{X \neq Y\} \subset \{A \text{ diagonalisable}\}$ . Il en résulte que

$$P(X \neq Y) = 0.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) &= P(Y \leq x \text{ et } Y = X) \cup (Y \leq x \text{ et } Y \neq X) \\ &= P(Y \leq x \text{ et } Y = X) + P(Y \leq x \text{ et } Y \neq X) \\ &= P(Y \leq x \text{ et } Y = X) \text{ car } P(Y \leq x \text{ et } Y \neq X) \leq P(Y \neq X) = 0, \\ &= P(X \leq x \text{ et } X = Y) \\ &= \boxed{P(X \leq x)}. \end{aligned}$$

On conclut que  $X$  et  $Y$  ont la même loi.

# SUJET Maths Approfondies 14

## Exercice principal Maths Approfondies 14

1. Donner la définition d'un estimateur.
2. On souhaite effectuer un sondage sur le taux d'abstention  $p$  dans une population de  $N$  individus. On a :

$$p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

où chaque  $y_i$  désigne le choix de l'individu  $i$  ( $y_i = 0$  : vote,  $y_i = 1$  : abstention).

On choisit  $n$  individus au hasard parmi les  $N$  et on note  $(Y_1, \dots, Y_n)$  l'échantillon de leurs réponses obtenues. On supposera que les  $Y_i$  suivent des loi de Bernoulli indépendantes de paramètre  $p$ .

- (a) Montrer que

$$\sigma^2 = V(Y_1) = p(1-p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - p)^2$$

- (b) On note  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ . Montrer que pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , il existe une constante  $c_\alpha$  à déterminer telle

$$p \in \left[ S_n - c_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, S_n + c_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

avec une probabilité supérieure à  $1 - \alpha$  pour  $n$  assez grand.

3. Pour améliorer le sondage, on répartit la population en  $H$  groupes homogènes (par exemple suivant la classe sociale des individus). On note  $N_h$  le cardinal du groupe  $h \in \{1, \dots, H\}$ . On effectue à l'intérieur de chaque groupe le sondage auprès de  $n_h$  personnes (estimateur noté  $S_{n_h}$  du taux d'abstention exact  $p_h$ ). On note  $\sigma_h^2 = p_h(1-p_h)$  et

$$S_n^H = \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} S_{n_h}$$

Calculer  $V(S_n^H)$  en fonction des données.

4. Calculer la quantité

$$\sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} \sigma_h^2 + \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} (p_h - p)^2$$

en fonction des données.

5. On note

$$\eta^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} (p_h - p)^2$$

En supposant le rapport  $\frac{n_h}{N_h}$  constant, exprimer  $V(S_n^H)$  en fonction de  $\sigma^2$ ,  $n$  et  $\eta$ .

Montrer que  $V(S_n^H)$  est très petit devant  $V(S_n)$  lorsque  $p_h$  est proche de 0 ou de 1. Commenter.

### Solution :

1. cours p22 EC2 appo
2. (a) La relation demandée s'obtient aisément en développant la somme et en remarquant que  $y_i^2 = y_i$ .

- (b) Le théorème central limite assure que  $\sqrt{n} \frac{S_n - p}{\sigma}$  converge en loi vers  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Ainsi, on trouve aisément qu'il suffit de choisir  $c_\alpha$  tel que  $c_\alpha > \Phi^{-1}(1 - \frac{\sigma_\alpha}{2})$  où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

3. On trouve que

$$\mathbb{V}(S_n^H) = \sum_{h=1}^H \left( \frac{N_h}{N} \right)^2 \mathbb{V}(S_{n_h}) = \sum_{h=1}^H \left( \frac{N_h}{N} \right)^2 \frac{\sigma_h}{n_h}$$

4. On a

$$\sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} \sigma_h^2 + \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} (p_h - p)^2 = \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} (-p_h^2 + p_h + (p_h - p)^2)$$

soit

$$\sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} \sigma_h^2 + \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} (p_h - p)^2 = \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} (p^2 + p_h(1 - 2p)) = p^2 + p(1 - 2p) = \sigma^2$$

5. On a

$$\mathbb{V}(S_n^H) = \sum_{h=1}^H \left( \frac{N_h}{N} \right)^2 \frac{\sigma_h^2}{n_h} = \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} \sigma_h^2 \frac{N_h}{N n_h} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} \sigma_h^2 = \frac{1}{n} \sigma^2 (1 - \eta^2)$$

Ainsi  $\mathbb{V}(S_n^H)$  est très petit devant  $\mathbb{V}(S_n)$  lorsque  $\eta$  est proche de 1, c'est à dire lorsque le terme  $\sigma_h$  est petit, soit encore  $p_h$  proche de 0 ou de 1 (ie les groupes sont homogènes).

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 14

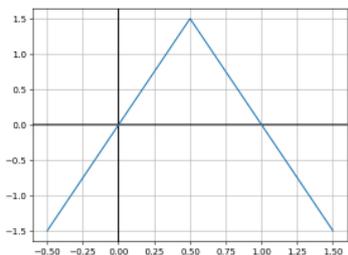
Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 3(1-x) & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de  $F$  sur  $[-1, 2]$ .
2. On définit une suite réelle  $(x_n)_{n \geq 0}$  par  $x_0 = a \in \mathbb{R}$  et  $x_{n+1} = F(x_n)$ .
  - (a) Que dire de la suite  $(x_n)$  si elle est convergente ?
  - (b) Que dire de la suite  $(x_n)$  si elle est bornée ?

**Solution :**

1. La fonction  $F$  est affine par morceaux :



2. (a) Comme la fonction  $F$  est continue, si  $(x_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ , par passage à la limite  $F(\ell) = \ell$ .

Pour  $\ell \leq \frac{1}{2}$ ,  $F(\ell) = 3\ell$  d'où  $\ell = 0$ .

Pour  $\ell > \frac{1}{2}$ ,  $F(\ell) = 3(1 - \ell)$  d'où  $\ell = \frac{3}{4}$ .

Ainsi, sous réserve de convergence, les limites possibles pour  $(x_n)$  sont 0 et  $\frac{3}{4}$ .

On va montrer que si la suite  $(x_n)$  converge, elle est nécessairement stationnaire.

On suppose d'abord que  $(x_n)$  est convergente de limite nulle. Alors, nécessairement :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad x_n < \frac{1}{2}$$

Alors, pour  $n > n_0$ ,  $x_n = F(x_{n-1}) = 3x_{n-1}$  et par une récurrence descendante immédiate :  $x_n = 3^{n-n_0}x_{n_0}$ . Or  $\lim_n 3^{n-n_0} = +\infty$  donc nécessairement :  $x_{n_0} = 0$  et donc :  $\forall n \geq n_0 \quad x_n = 0$ .

Si  $(x_n)$  est convergente de limite  $3/4$ , le même raisonnement s'applique de manière symétrique. Par définition de la limite :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad x_n > \frac{1}{2}$$

Alors, pour  $n > n_0$  :

$$x_n - \frac{3}{4} = 3(1 - x_{n-1}) - \frac{3}{4} = -3 \left( x_{n-1} - \frac{3}{4} \right)$$

Par une récurrence descendante, on en déduit que, pour  $n \geq n_0$  :  $\left| x_n - \frac{3}{4} \right| = 3^{n-n_0} \left| x_{n_0} - \frac{3}{4} \right|$ . Comme précédemment,  $\lim_n 3^{n-n_0} = +\infty$  donc nécessairement :  $x_{n_0} = \frac{3}{4}$  et donc  $x_n = \frac{3}{4}$  pour  $n \geq n_0$ .

Dans tous les cas, la suite  $(x_n)$  est stationnaire.

(b) La réponse attendue est que nécessairement :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in [0, 1]$ .

Pour montrer cela, il suffit de remarquer que  $F(\mathbb{R}_-) \subset \mathbb{R}_*$ .

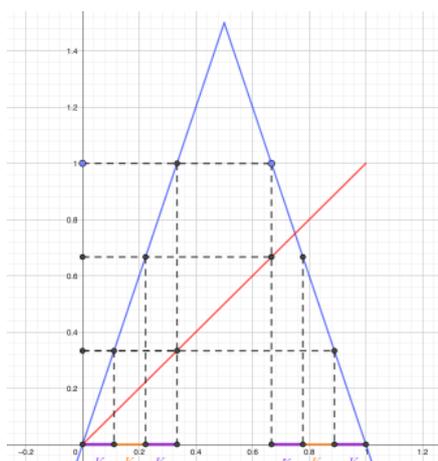
Par une récurrence immédiate, on en déduit que s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $x_{n_0} < 0$ , alors, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $x_n < 0$  d'où finalement  $x_n = 3^{n-n_0} x_{n_0}$  et donc  $\lim_n x_n = -\infty$ . La suite  $(x_n)$  n'est donc pas bornée.

De même, on remarque que  $F([1, +\infty[) \subset \mathbb{R}_*$  et donc s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $x_{n_0} > 1$ , alors  $x_{n_0+1} = F(x_{n_0}) < 0$  et on est donc ramené au cas précédent : la suite n'est pas bornée.

Ainsi, la suite est bornée si et seulement si elle est à valeurs dans  $[0, 1]$ .

*Question supplémentaire :* On pourra demander au candidat si l'intervalle  $[0, 1]$  est stable par  $F$ . La réponse est non, et il est donc naturel de se poser ensuite la question des valeurs de  $x_0$  pour lesquelles la suite  $(x_n)$  est effectivement bornée.

Ce sont exactement les  $x_0$  qui sont dans l'ensemble de Cantor et on ne s'attend bien sûr pas à ce qu'un candidat donne cette réponse. Mais on peut tenter de repérer ceux qui comprennent ce qui se passe sur le dessin et commencent à construire l'ensemble des valeurs possibles sur le dessin de la courbe de  $F$ .



On a bien sûr  $x_0 \in [0, 1]$  par la question précédente.

Pour le terme suivant,  $x_1 = F(x_0) \in [0, 1]$  si et seulement si  $x_0 \in K_1 = F^{-1}([0, 1]) = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$  comme on le voit sur le dessin.

Ensuite  $x_2 = F(x_1) \in [0, 1]$  si et seulement si  $x_1 = F(x_0) \in K_1$  par ce qui précède et donc si et seulement  $x_0 \in K_2$  où  $K_2 = F^{-1}(K_1)$ . En regardant le dessin, à défaut de faire le calcul, on peut se convaincre que :

$$K_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

On définit ainsi une suite décroissante  $(K_n)_{n \geq 0}$  de parties de  $[0, 1]$  avec  $K_{n+1} = F^{-1}(K_n)$  et l'ensemble cherché est exactement  $\bigcap_{n \geq 0} K_n$ .

On peut espérer qu'un candidat ayant fait le dessin et la construction pour  $K_1$  et  $K_2$  soit en mesure d'expliquer ensuite le processus général sans formalisation excessive.

# SUJET Maths Approfondies 15

## Exercice principal Maths Approfondies 15

Dans tout l'exercice  $n$  désigne un entier non nul et  $S$  une matrice symétrique réelle à coefficients strictement positifs.

On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $S$  rangées dans l'ordre décroissant i.e.  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

Pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $S$  on note  $E_\lambda(S)$  le sous-espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  et on pose

$$\rho = \max \left\{ |\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(S) \right\}$$

L'objectif principal de l'exercice est d'établir que  $\rho$  est une valeur propre de  $S$ , que  $E_\rho(S)$  est de dimension égale à 1 et est engendré par un vecteur propre à composantes toutes strictement positives.

1. Question de cours : réduction des endomorphismes symétriques.
2. Vérifier le résultat principal annoncé ci-dessus dans le cas particulier où  $n = 2$  et :

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec  $(a, b) \in ]0, +\infty[^2$ .

3. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  un vecteur colonne tel que  ${}^t X X = 1$  (où  ${}^t X$  désigne la transposée de  $X$ ).
  - (a) Etablir que :  ${}^t X S X \leq \lambda_1$  et montrer l'équivalence :  ${}^t X S X = \lambda_1 \iff X \in E_{\lambda_1}(S)$ .
  - (b) On note  $|X|$  le vecteur colonne dont les composantes sont les valeurs absolues de celles de  $X$ .  
Montrer l'inégalité  $|{}^t X S X| \leq {}^t |X| S |X|$  puis l'égalité  $\rho = \lambda_1$ .
4. Montrer que si  $V$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\rho$  alors il en est de même de  $|V|$  et que toutes ses composantes sont strictement positives.
5. Conclure.

### Solution :

1. Cours EC2 p17

2. Si  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  alors  $\text{Sp}(S) = \{a+b, a-b\}$  et  $E_{a+b}(S) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Les réels  $a$  et  $b$  étant strictement positifs on a  $\rho = a+b$  et on obtient le résultat attendu.

3. a) La matrice  $S$  étant symétrique il existe une base orthonormée  $(E_1, \dots, E_n)$  de vecteurs colonnes propres de  $S$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Si  $X = \sum_{k=1}^n x_k E_k$  alors  ${}^t X S X = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \leq \lambda_1 \sum_{k=1}^n x_k^2 = \lambda_1 {}^t X X = \lambda_1$  du fait que  ${}^t X X = 1$ .

Bilan :

$${}^t X S X \leq \lambda_1$$

Montrons l'équivalence :  ${}^tX SX = \lambda_1 \iff X \in E_{\lambda_1}(S)$ .

• Si  $X \in E_{\lambda_1}(S)$  alors  ${}^tX SX = {}^tX \lambda_1 X = \lambda_1 {}^tX X = \lambda_1$ .

• Si  ${}^tX SX = \lambda_1$  alors avec les notations ci-dessus on a :  $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 = \lambda_1 \sum_{k=1}^n x_k^2$  et cette égalité n'est possible que si  $x_i = 0$  pour tout entier  $i$  tel que  $\lambda_i \neq \lambda_1$  du fait que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

*Bilan :*

$${}^tX SX = \lambda_1 \iff X \in E_{\lambda_1}(S)$$

b) D'après l'inégalité triangulaire et du fait de la positivité des coefficients de la matrice  $S$  on a :

$$|{}^tX SX| \leq |{}^tX|S|X| \leq \lambda_1$$

La dernière inégalité découle de la question précédente en remarquant que  $|X|$  est encore un vecteur colonne de norme 1.

En prenant pour  $X$  un vecteur unitaire associé à la valeur propre  $\lambda$  on obtient

$$|\lambda| \leq \lambda_1$$

et donc

$$\rho = \lambda_1$$

4. Soit  $V$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\rho$ .

D'après ce qui précède, si  $V$  est unitaire on a

$$|\rho| \leq |{}^tV|S|V| \leq \rho$$

et donc

$$|{}^tV|S|V| = \rho$$

D'après le résultat de la question 3a) il apparaît ainsi que si  $V$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $\rho$  alors  $|V|$  aussi.

Montrons alors que toutes ses composantes sont non nulles.

Supposons par l'absurde que la composante  $|v_i|$  soit nulle. L'égalité  $S|V| = \rho|V|$  conduit à :

$$\sum_{k \neq i} s_{ik} |v_k| = 0$$

et implique  $|v_k| = 0$  pour tout  $k$  du fait de la positivité stricte des coefficients de  $S$ .

On aurait ainsi  $V = 0$  ce qui est absurde.

Le résultat attendu en résulte.

5. Soient  $V$  et  $V'$  deux vecteurs propres associés à la valeur propre  $\rho$ .

D'après ce qui précède toutes les composantes de ces vecteurs sont non nulles et si on pose

$$k = \frac{v'_1}{v_1}$$

alors  $V' - kV \in E_\rho(S)$  et possède une composante nulle. Il s'agit donc du vecteur nul et on a ainsi finalement l'égalité :

$$V' = kV$$

Il s'ensuit que :

$$\dim(E_\rho(S)) = 1$$

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 15

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

1. Montrer que pour tout  $k$  compris entre 0 et  $n$ ,

$$P(X = k - 1) \leq P(X = k) \iff k \leq np + p$$

2. On dit que  $m \in \{0, \dots, n\}$  est un mode de  $X$  si  $P(X = m)$  est maximal. Montrer que  $m = \lfloor np + p \rfloor$  est un mode de  $X$  (où  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ ).
3. Après une alerte incendie, les 60 élèves d'une école se répartissent au hasard dans 5 salles de classe  $C1$  à  $C5$ . Combien d'élèves a-t-on le plus de chance de trouver dans la salle  $C5$ ?

---

**Solution :**

- a) On a si  $1 \leq k \leq n$  :

$$P(X = k - 1) = \binom{n}{k - 1} p^{k-1} (1 - p)^{n-k+1}$$

et

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

La condition  $P(X = k - 1) \leq P(X = k)$  est alors équivalente après simplifications à

$$\frac{1 - p}{n - k + 1} \leq \frac{p}{k}$$

soit exactement  $k \leq np + p$ .

- b) Par contraposition, on a

$$P(X = k - 1) > P(X = k) \iff k > np + p$$

ou, si on raisonne dans la première inégalité avec des inégalités strictes,

$$P(X = k - 1) \geq P(X = k) \iff k \geq np + p$$

Or,  $m_0 = \lfloor np + p \rfloor$  est tel que  $m_0 \leq np + p$  et  $m_0 + 1 > np + p$ , ce qui indique que  $P(X = m_0)$  correspond bien à une valeur maximale.

- c) Ici  $n = 60$ ,  $p = \frac{1}{5}$ . On a donc un unique mode  $m = np$ . Le nombre le plus probable d'élèves par classe sera donc de 12.

# SUJET Maths Approfondies 16

## Exercice principal Maths Approfondies 16

On suppose que  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  est telle que :

$$\exists \alpha \in ]0, 1], \exists K \geq 0, \forall (y, z) \in [0, 1]^2, |f(y) - f(z)| \leq K|y - z|^\alpha.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit le polynôme :

$$B_n f(X) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

1. Énoncer le théorème de transfert
2. Soit  $x \in ]0, 1[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre  $x$ . On pose

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

Exprimer  $E(S_n)$ ,  $\mathbb{V}(S_n)$  et  $E(f(S_n))$  en fonction de  $x$ ,  $n$  et du polynôme  $B_n f$ .

3. En déduire les inégalités :

$$\sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \mathbb{V}(S_n)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

4. Soit  $\alpha \in [0, 1]$ . Montrer que  $\lambda^\alpha \leq 1 + \lambda$  pour tout réel  $\lambda > 0$  et en déduire l'inégalité :

$$\left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \leq n^{-\alpha/2} \left( 1 + \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \right)$$

pour tous  $x \in ]0, 1[$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \{0, \dots, n\}$ .

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \frac{3K}{2} \frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

### Solution :

1. La somme  $\sum_{k=1}^n X_k$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $x$ .

$$P(S_n = \frac{k}{n}) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Puisque les variables ont la même loi, on a

$$E(S_n) = E(X_\ell) = x.$$

Puisque les variables sont deux à deux indépendantes, on a aussi :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = nx(1-x).$$

D'où

$$\mathbb{V}(S_n) = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Par le théorème de transfert on a aussi :

$$E(f(S_n)) = B_n f(x).$$

2.

$$\sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \mathbb{E}(|x - S_n|) \leq \sqrt{\mathbb{E}((x - S_n)^2)} = \mathbb{V}(S_n)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbb{V}(S_n)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

3. On sépare le cas  $\lambda \leq 1$  (trivial) du cas  $\lambda \geq 1$  (pour lequel  $\lambda \geq \lambda^\alpha$ ). En choisissant  $\lambda = \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right|$  dans l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité :

$$\left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \leq n^{-\alpha/2} \left( 1 + \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \right)$$

4.

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n f(x)| &= |E(f(x) - f(S_n))| = \left| \sum_{k=0}^n (f(x) - f(\frac{k}{n})) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right|, \\ &\leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(\frac{k}{n})| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \\ &\leq K \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \\ &\leq K n^{-\alpha/2} \left[ \sum_{k=0}^n (1 + \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right|) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] \\ &\leq K n^{-\alpha/2} (1 + \sqrt{n}) \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{3}{2} K n^{-\alpha/2}. \end{aligned}$$

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 16

Déterminer toutes les fonctions continues  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  telles que  $f \circ f = \text{Id}$ .

---

**Solution :**

1. Demander un dessin
2. Soit  $f$  une fonction solution. Puisque  $f \circ f = \text{Id}$ , la fonction  $f$  réalise une bijection entre  $[0, +\infty[$  et  $\text{Im } f$ ; elle est même sa propre réciproque, assurant que  $\text{Im } f = [0, +\infty[$ .
3. Puisqu'elle est continue, elle est nécessairement strictement monotone sur  $[0, +\infty[$ . En effet si par exemple il existe  $a, b, c$  tels que  $a < b < c$ ,  $f(a) < f(b)$  et  $f(c) > f(b)$ , tout  $\alpha$  élément de  $] \max(f(a), f(c)), f(b)[$  aurait au moins deux antécédent par le TVI, c'est absurde.
4. Si  $f$  était strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$ , elle ne pourrait être surjective sur  $[0, +\infty[$ . Elle est donc strictement croissante.
5. Soit  $x \in [0, +\infty[$ .  
Supposons que  $f(x) < x$ . Par stricte croissance de  $f$ , on a :  $x = f(f(x)) < f(x) < x$ , ce qui est absurde.  
On obtient une absurdité similaire en supposant  $f(x) > x$ . On en déduit que  $f(x) = x$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ , i.e.  $f = \text{Id}$ .
6. Puisque l'application Id convient (elle est continue et vérifie l'équation fonctionnelle  $f \circ f = \text{Id}$ ) c'est la seule fonction solution.

# SUJET Maths Approfondies 17

## Exercice principal Maths Approfondies 17

Soit  $\lambda$  une constante réelle strictement positive. On cherche une densité  $f$  (d'une variable aléatoire réelle) vérifiant :  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) = \lambda f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

1. Question de cours : rappeler la définition d'une variable aléatoire à densité.
2. Montrer que  $f(0) = \lambda$ .
3. Montrer que  $f$  est paire.
4. Montrer que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  on a

$$xf(x)f'(y) - yf'(x)f(y) = 0.$$

5. Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = f(\sqrt{x})$  pour tout  $x > 0$ . Montrer que  $h$  est solution de l'équation

$$h(x) + \alpha h'(x) = 0 \text{ pour tout } x > 0,$$

où  $\alpha$  est une constante réelle.

6. Trouver l'expression de  $f$ .

---

### Solution :

1. p12 mathématiques approfondies de seconde année
2. Montrons d'abord que  $f(0) \neq 0$ . Par l'absurde, si  $f(0) = 0$ , on a alors  $\forall x \in \mathbb{R}, f(|x|) = 0$  (en prenant  $x$  quelconque et  $y = 0$  dans l'identité). Donc  $f(t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ . Donc pour tout  $x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = \lambda f(\sqrt{2x^2}) = 0$ . On en déduit que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ce qui est une contradiction car  $f$  est une densité.  
Ensuite, en prenant  $x = y = 0$ , on en déduit que  $f(0)^2 = \lambda f(0)$ . Donc  $f(0) = \lambda$ .
3. En choisissant  $y = 0$ , on a  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(0) = \lambda f(|x|)$ . D'où  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(|x|)$ . Ainsi,  $f$  est paire.
4. En dérivant l'identité par rapport à  $x$  et  $y$  en  $(x, y) \neq (0, 0)$  on obtient

$$f'(x)f(y) = \lambda \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} f'(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad f(x)f'(y) = \lambda \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} f'(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

D'où  $xf'(x)f(y) - yf(x)f'(y) = 0$ . Par continuité, cette égalité reste vraie quand  $(x, y) = (0, 0)$ .

5. Puisque  $f$  est de classe  $C^1$ ,  $h$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ . De plus, on a  $f(x) = h(x^2)$  pour tout  $x > 0$ . Donc,  $f'(x) = 2xh'(x^2)$  et en remplaçant dans l'équation précédente on obtient :

$$\forall x > 0, \forall y > 0, \quad h(x^2)h'(y^2) - h'(x^2)h(y^2) = 0.$$

ou encore

$$\forall x > 0, \forall y > 0, \quad h(x)h'(y) - h'(x)h(y) = 0.$$

Etant donné que  $f$  est une densité et qu'elle est paire, elle ne peut être constante sur  $]0, +\infty[$ . Il existe donc  $t_0 > 0$  tel que  $f'(t_0) \neq 0$ . En choisissant  $y_0 = t_0^2$ , on a  $h'(y_0) \neq 0$  et

$$\forall x > 0, \quad h(x) + \alpha h'(x) = 0,$$

où on a posé  $\alpha = -\frac{h(y_0)}{h'(y_0)}$ .

6. En résolvant l'équation précédente, on obtient

$$h(x) = Ae^{-\alpha x} \text{ pour } x > 0.$$

Ainsi,  $f$  est de la forme  $f(x) = Ae^{-\alpha x^2}$  pour  $x > 0$ . Par continuité en 0 et par parité de  $f$  cette expression reste vraie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Il reste à déterminer la constante  $A$  qui est forcément non nulle et la constante  $\alpha$ . Pour ce faire, on remplace dans l'équation de départ. On a alors

$$Ae^{-\alpha x^2} Ae^{-\alpha y^2} = \lambda Ae^{-\alpha(x^2+y^2)}.$$

Donc  $A = \lambda$ . Pour déterminer  $\alpha$ , on utilise le fait que  $f$  est une densité de probabilité. Ainsi, on a doit avoir  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$ . Forcément  $\alpha > 0$  (sinon l'intégrale diverge). Ainsi  $f$  est la densité d'une loi normale centrée. De plus, en effectuant le changement de variable  $u = \sqrt{2\alpha}t$ , alors  $u^2/2 = \alpha t^2$  et l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{\lambda}{\sqrt{2\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Il en résulte que

$$\alpha = \pi\lambda^2.$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) = \lambda e^{-\pi\lambda^2 x^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} .}$$

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 17

Soit  $X$  une variable aléatoire centrée admettant une variance notée  $\sigma^2$ .

1. Montrer que

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \quad P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + b^2}{(a + b)^2}.$$

2. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \quad P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

---

**Solution :**

1. Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. Par croissance de la fonction  $x \mapsto x^2$  sur  $\mathbb{R}^+$ , on a l'inclusion

$$[X \geq a] \subset [(X + b)^2 \geq (a + b)^2].$$

Par croissance de la probabilité,

$$P(X \geq a) \leq P((X + b)^2 \geq (a + b)^2).$$

Par l'inégalité de Markov appliquée à la variable  $(X + b)^2$ ,

$$P(X \geq a) \leq P((X + b)^2 \geq (a + b)^2) \leq \frac{E((X + b)^2)}{(a + b)^2}.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E((X + b)^2) = E(X^2) + 2bE(X) + b^2 = \sigma^2 + b^2$$

puisque  $E(X) = 0$ .

2. Soit  $f : b \mapsto \frac{\sigma^2 + b^2}{(a + b)^2}$ . Une étude de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  montre qu'elle atteint son minimum en  $b = \frac{\sigma^2}{a}$ .  
En appliquant le résultat de la première question en ce point, on trouve l'inégalité demandée.

# SUJET Maths Approfondies 18

## Exercice principal Maths Approfondies 18

Soient  $a$  un réel strictement positif et  $x_1, \dots, x_n$  une famille de  $n$  réels strictement positifs tels que

$$\sum_{k=1}^n x_k = 1$$

On veut montrer que

$$\sum_{k=1}^n \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^a \geq n^{1-a} (n^2 + 1)^a \quad (1)$$

1. Donner la condition nécessaire d'existence d'un extremum pour une fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  sous contraintes d'égalités linéaires.
2. Montrer l'inégalité (1) lorsque  $n = 1$ .
3. Soit  $n \geq 2$ . On note  $U = ]0, 1[^n$  et  $F$  l'application de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$F(t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=1}^n \left(t_k + \frac{1}{t_k}\right)^a$$

Montrer que si  $(x_1, \dots, x_n) \in U$  est un extremum pour  $F$  sous la contrainte linéaire  $\sum_{k=1}^n x_k = 1$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^{a-1} \left(-1 + \frac{1}{x_k^2}\right) = \lambda$$

4. On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, 1[$  telle que

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{a-1} \left(-1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Montrer que  $f$  établit une bijection strictement décroissante de  $]0, 1[$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

5. En déduire que  $F$  possède au plus un extremum sur  $U$  sous la contrainte  $\sum_{k=1}^n x_k = 1$  qu'on déterminera.
6. Montrer l'inégalité (1) dans le cas général.

### Solution :

1. p20 EC2
2. Lorsque  $n = 1$ , on a  $2^a \geq 2^a$ .
3. On calcule tout d'abord

$$\partial_k F(x_1, \dots, x_n) = a \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{1}{x_k^2}\right)$$

puis on écrit la condition d'optimalité sous contrainte linéaire pour aboutir au résultat.

4. On calcule la dérivée de  $f$  :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -(a-1)\left(x + \frac{1}{x}\right)^{a-2} \left(-1 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - \frac{2}{x^3} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{a-1} \\
 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^{a-2} \left[-(a-1)\left(-1 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^4}\right] \\
 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^{a-2} \left(- (a-1) \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^4}\right) \\
 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^{a-2} \left(- \frac{(a-1)x^4 - 2(a-2)x^2 + (a+1)}{x^4}\right)
 \end{aligned}$$

Si  $a = 1$ ,  $f'(x) < 0$  de manière immédiate.

Sinon, le discriminant réduit du trinôme  $(a-1)X^2 - 2(a-2)X + a+1$  est  $\Delta = (a-2)^2 - (a^2-1) = -4a+5$ . Ainsi  $\Delta \leq 0$  ssi  $a \geq 5/4$ . En ce cas le trinôme est toujours positif et  $f'(x) \leq 0$  pour  $x \in ]0, 1[$  en s'annulant au plus une fois.

Si  $1 < a < 5/4$ , le trinôme a deux racines distinctes. Le produit des racines est alors positif, les racines sont donc de même signe et comme la somme des racines est alors négative car  $a < 2$ , on a deux racines négatives strictement et donc  $(a-1)x^4 - 2(a-2)x^2 + (a+1) > 0$  pour tout  $x$  réel. Ainsi  $f'(x) < 0$  pour  $x \in ]0, 1[$  en ce cas.

Reste le cas  $0 < a < 1$ . Le trinôme a deux racines de signes distincts. La racine positive est  $X_1 = \frac{a-2 - \sqrt{5-4a}}{a-1} = 1 - \frac{1 + \sqrt{5-4a}}{a-1} > 1$  ( $a-1 < 0$ ). Donc sur l'intervalle  $]0, 1[$ ,  $f'(x)$  ne s'annule pas, et comme on est entre les racines du trinôme, on a nécessairement  $f'(x) < 0$  pour  $x \in ]0, 1[$ .

Dans tous les cas  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$ .

Les limites de  $f$  en 0 et en 1 (respectivement  $+\infty$  et 0) permettent alors de conclure.

5. Avec le résultat précédent, il existe un unique  $r \in ]0, 1[$  tel que  $f(r) = \lambda$ . On en déduit que nécessairement  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$  et  $F$  possède au plus un extrémum sur  $U$  sous la contrainte choisie.
6. On remarque que la limite de  $F(x_1, \dots, x_n)$  lorsque l'un des  $x_i$  tend vers 0 ou 1 (et les autres quelconques tels que  $(x_1, \dots, x_n) \in U$ ) tend vers  $+\infty$ . Cela permet d'affirmer que  $F$  atteint un minimum sur  $]0, 1[^n$  sous la contrainte d'égalité en se restreignant à un ensemble du type  $[\epsilon, 1-\epsilon]^n$  avec la contrainte d'égalité qui est fermé borné de  $\mathbb{R}^n$  sur lequel  $F$  atteint bien un minimum et un maximum. Ce minimum vérifie la condition d'optimalité sous contrainte précédente. Il s'agit donc du point  $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$  pour lequel

$$F\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = n^{1-a}(n^2 + 1)^a$$

L'inégalité (1) s'en déduit.

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 18

Soient  $X$  et  $\varepsilon$  deux variables aléatoires indépendantes, telles que  $X$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $\varepsilon$  une loi à support dans  $\{-1, 1\}$  telle que  $P(\varepsilon = -1) = P(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}$ . On note  $Y = \varepsilon X$ .

Calculer  $\text{Cov}(X, Y)$ .  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

---

### Solution :

On a  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(\varepsilon X^2) = E(\varepsilon)E(X^2) = 0$

Soit  $u \in \mathbb{R}$ . On calcule la loi de  $Y$  :

$$P(Y \leq u) = P(X \leq u)P(\varepsilon = 1) + P(X \geq -u)P(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}(\phi(u) + 1 - \phi(-u)) = \phi(u)$$

$Y$  suit donc aussi une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

On peut montrer de deux manières que  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes :

1. En calculant  $E(X^2Y^2) = E(\varepsilon^2 X^4) = E(X^4) = 3$  tandis que  $E(X^2)E(Y^2) = 1$
2. En considérant  $S = X + Y$ , on constate que  $P(S = 0) = P(X = -\varepsilon X) = \frac{1}{2}$ , ce qui indique que  $S$  n'est pas une loi normale contrairement au cas où  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

# SUJET Maths Approfondies 19

## Exercice principal Maths Approfondies 19

1. Question de cours : convergence en probabilité et convergence en loi.
2. Soient  $(m_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels convergent vers le réel  $m$ ,  $(\sigma_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels strictement positifs et convergent vers le réel  $\sigma > 0$  et  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires telle que  $X_n$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ .  
Montrer que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $X$  suivant la loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .

3. Montrer l'existence d'une constante réelle  $\gamma$  telle que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Dans la suite de l'exercice  $(Y_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance  $m$  et d'écart-type  $\sigma$ . Pour tout entier  $n$ , on note :

$$H_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{k}$$

4. Etablir que la suite  $(H_n)_{n \geq 1}$  convergence en probabilité vers une variable certaine égale à  $m$ .
5. On suppose dans cette question que la loi commune des variables aléatoires  $Y_n$  est une loi normale. Etudier la convergence en loi de la suite  $\left(\ln(n)(H_n - m)\right)_{n \geq 1}$ .

On donne :  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

### Solution :

1. p21 EC2
2. Pour tout  $n$  on a :

$$\frac{X_n - m_n}{\sigma_n} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

et il en résulte que pour tout réel  $t$  on a :

$$F_{X_n}(t) = P(X_n \leq t) = P\left(\frac{X_n - m_n}{\sigma_n} \leq \frac{t - m_n}{\sigma_n}\right) = \Phi\left(\frac{t - m_n}{\sigma_n}\right)$$

en notant  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Il s'ensuit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(t) = \Phi\left(\frac{t - m}{\sigma}\right) = F_{X_\infty}(t)$$

où :

$$X_\infty \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

Bilan :

$(X_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $X_\infty$  suivant la loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .

3. Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

On étudie la série (téléscopique) de terme général  $v_n = u_{n+1} - u_n$ .

On a :

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{-1}{2n^2}$$

La série de terme général  $v_n$  est donc convergente et, par télescopage, la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers un réel noté  $\gamma$ .

*Bilan :*

$$\text{Il existe une constante } \gamma \text{ telle que } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

4. Pour tout entier non nul  $n$  on a :

$$E(H_n) = \frac{m \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n+1)}$$

et comme  $\ln(n+1) \sim \ln(n)$  et  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(H_n) = m$$

De plus, par indépendance des variables aléatoires  $Y_k$ , on a :

$$V(H_n) = \frac{\sigma^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}{\ln^2(n+1)}$$

et puisque la série de Riemann de terme général  $\frac{1}{k^2}$  converge il en résulte que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(H_n) = 0$$

Soit alors  $\epsilon > 0$  fixé.

D'après l'inégalité de Markov on a :

$$P(|H_n - m| \geq \epsilon) \leq \frac{E(|H_n - m|^2)}{\epsilon^2}$$

Or :

$$E(|H_n - m|^2) = V(H_n) + (E(H_n) - m)^2 \rightarrow 0$$

*Bilan :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|H_n - m| \geq \epsilon) = 0$$

Finalement :

la suite  $(H_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers  $m$

5. Posons :  $T_n = \ln(n)(H_n - m)$ .

$$E(T_n) = \ln(n) \left( \frac{m \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n+1)} - m \right) = \frac{m \ln(n)}{\ln(n+1)} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right)$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n) = m\gamma$$

De plus :

$$V(T_n) = \ln^2(n) \left( \frac{\sigma^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}{\ln^2(n+1)} \right)$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(T_n) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\sigma^2 \pi^2}{6}$$

D'après le résultat de la question 2. et du fait que les variables en jeu suivent des lois normales, il en résulte finalement que :

la suite  $\left( \ln(n)(H_n - m) \right)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale  $\mathcal{N} \left( m\gamma, \frac{\sigma^2 \pi^2}{6} \right)$

## Exercice sans préparation Maths Approfondies 19

Soient  $b$ ,  $c$  et  $d$  des constantes réelles et considérons l'équation  $f(x) = 0$  avec  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

- Justifier brièvement pourquoi il existe un entier naturel  $m$  tel que  $f(m)f(-m) \leq 0$ .
- Compléter en Python les endroits soulignés de la fonction `trouver_chg_signe` ci-dessous afin qu'elle renvoie le plus petit entier naturel  $m$  vérifiant  $f(m)f(-m) < 0$ .

---

```
def trouver_chg_signe(b, c, d):
    def pol3(x):
        return x**3 + b*x**2 + c*x + d
    m = _____
    while _____:
        m = _____
    return m
```

---

- On utilise une méthode de dichotomie pour trouver une solution de l'équation dans  $[-m, m]$  : on considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies comme suit :  $a_0 = -m$ ,  $b_0 = m$  et pour tout  $n \geq 0$

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (a_n, c_n) & \text{si } f(c_n)f(a_n) \leq 0, \\ (c_n, b_n) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où on a posé  $c_n = (a_n + b_n)/2$  pour  $n \geq 0$ . Si on se donne un réel  $\varepsilon > 0$  définissant la précision souhaitée, on considèrera que la solution est atteinte quand  $|b_n - a_n| < \varepsilon$ . Dans ce cas, on peut choisir  $c_n = (a_n + b_n)/2$  comme solution.

Compléter en Python les endroits soulignés de la fonction `madichotomie` ci-dessous afin qu'elle renvoie une solution de l'équation  $f(x) = 0$  obtenue par cette méthode de dichotomie avec une précision `epsilon`. Cette fonction peut faire appel à la fonction `trouver_chg_signe`.

---

```
def madichotomie(b, c, d, epsilon):
    def pol3(x):
        return x**3 + b*x**2 + c*x + d
    m = _____
    an = _____
    bn = _____
    while (_____):
        cn = (an + bn)/2
        if (_____):
            _____ = cn
        else:
            _____ = cn
    res = _____
    return res
```

---

**Solution :**

- On a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty$ . Il existe donc  $A \geq 0$  et  $B \geq 0$  tels que  $f(t) < 0$  pour  $t \leq -A$  et  $f(t) > 0$  pour  $t \geq B$ . On peut choisir  $m$  tel que  $m \geq \max(A, B)$ .

---

```
def find_sign_change(b, c, d):
    def pol3(x):
        return x**3 + b*x**2 + c*x + d
    m = 0
    while pol3(m)*pol3(-m) >= 0:
        m = m + 1
    return m
```

---

---

3.

```
def madichotomie(b, c, d, epsilon):
    def pol3(x):
        return x**3 + b*x**2 + c*x + d
    m = find_sign_change(b, c, d)
    an = -m
    bn = m
    while (abs(an-bn) >= epsilon):
        cn = (an + bn)/2
        if (pol3(an)*pol3(cn) <= 0.0):
            bn = cn
        else:
            an = cn
    res = (an + bn)/2
    return res
```

---