SUJET S1

Exercice principal S1

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + ... + X_n$ et $U_n = \dfrac{S_n^4}{n^4}$.

1. Énoncer l'inégalité de Markov
2. Calculer $\mathbb{E}(S_n^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{E}(S_n^4) = 3n^2 - 2n$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\mathbb{P}(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}) \leq \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}$$
5. Montrer que $Z_n = \{\omega \in \Omega, \quad \exists k \geq n, \quad U_k(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\} \in \mathcal{A}$ et que :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0.$$
6. En déduire qu'il existe $Z \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(Z) = 0$ et
$$\forall \omega \in \Omega \setminus Z, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0.$$

Solution :

1. Cours. Programme ECS1 page 24.
2. Comme $\mathbb{E}(X_k) = 0$, on a $\mathbb{E}(S_n) = 0$. Ainsi $\mathbb{E}(S_n^2) = V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$. (indépendance des variables)

   Or, $V(X_k) = 1$, ainsi $\boxed{\mathbb{E}(S_n^2) = n}$
3. On développe S_n^4. Les termes du type X_i^4 on une espérance égal à 1, ceux en $X_i^2 X_k^2$ ont une espérance égale à $\mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_k^2) = 1$ par indépendance et tous les autres ont une espérance nulle.
   * Il y a n termes du type $\mathbb{E}(X_i^4)$
   * Pour une paire d'indices $\{i, k\}$, on peut compter le nombre de termes $X_i^2 X_k^2$ avec i et k fixés, on choisi deux facteurs qui vaudront X_i, les deux autres valant X_k^2, $\binom{4}{2} = 6$ choix.
   * Mais il y a $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ paires d'indices $\{i, k\}$

   Au final,
$$\mathbb{E}(S_n^4) = n + 3n(n-1) = \boxed{3n^2 - 2n}$$
4. C'est une application directe de Markov avec la majoration $3n^2 - 2n \leq 3n^2$.
   $\mathbb{P}\left(U_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \sqrt{n}\mathbb{E}(U_n) \leqslant \dfrac{\sqrt{n}(3n^2 - 2n)}{n^4}$

   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ on a } \mathbb{P}(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}) \leq \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}.}$

5. On a

$$Z_n = \bigcup_{k\geq n} \{\omega \in \Omega, \quad U_k(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\} \in \mathcal{A}$$

et donc

$$P(Z_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{3}{k^{\frac{3}{2}}}$$

C'est le reste d'une série convergente, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0}$

6. On prend

$$Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$$

On a $Z \in \mathcal{A}$ et $\mathbb{P}(Z) = 0$ avec la question précédente et le théorème de la limite monotone (pour $K_n = \bigcap_{k=1}^{n} Z_k$).

Soit ensuite $\omega \notin Z$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n$, on a

$$|\frac{S_k(\omega)}{k}| = U_n(\omega)^{1/4} \leq \frac{1}{k^{\frac{1}{8}}}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \frac{S_k(\omega)}{k} = 0}$$

Exercice sans préparation S1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.
On note $\mathcal{E}_A = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } AMA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \right\}$.
Déterminer la dimension de $\mathcal{E}_A$.

Solution :
$\mathcal{E}_A$ est bien un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ induit par respectivement M et A dans la base canonique et

$M \in \mathcal{E}_A$ ssi $g \circ f \circ g = O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(g \circ f \circ g)(x) = 0$ ssi $\forall y \in \text{ Im } (g)$, $f(y) \in \text{ Ker } (g)$

On construit une deux bases $(e_1, ..., e_n)$ et $(e'_1, ..., e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $(e_1, ...e_r)$ soit une base de $\text{ Im } (g)$ et $(e'_1, ...e'_{n-r+1})$ une base de $\text{ Ker } (g)$

"$\forall y \in \text{ Im } (g)$, $f(y) \in \text{ Ker } (g)$" ssi la matrice de f a pour allure : $\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0_{\mathcal{M}_{r,r}} & D \end{array} \right)$,

où $B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R})$.

Donc $\mathcal{E}_A$ est isomorphe (par un isomorphisme de changement de base) à G,

où $G = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{\mathcal{M}_{r,r}} & C \end{array} \right), A \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R}),\ B \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R}),\ C \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) \right\}$.

Cet espace est lui même isomorphe à $\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$.

Il est donc de dimension $(n-r)^2 + 2r(n-r) = n^2 + r^2 - 2nr + 2nr - 2r^2 = n^2 - r^2$.

$\boxed{\dim(\mathcal{E}_A) = n^2 - r^2.}$

SUJET S2

Exercice principal S2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

* On dira qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à diagonale propre si et seulement si elle est semblable à la matrice $D = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée à partir des propres coefficients diagonaux de A. Autrement dit, vérifiant :

$\forall i \in [|1,n|]$, $d_{i,i} = a_{i,i}$ et $\forall (i,j) \in [|1,n|]^2$, si $i \neq j$ alors $d_{i,j} = 0$.

* On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

1. Question de cours : propriétés de la trace.
2. On suppose dans cette question seulement que $n \geqslant 2$. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non diagonale à diagonale propre.
3. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Exprimer la trace de A^2 à l'aide des coefficients $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
   (b) A quelle condition A est-elle à diagonale propre ?
4. (a) Que renvoie la fonction Scilab `K` suivante, si on rentre `x` un réel, `n` un entier naturel non nul et `B` une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?

```
 function K(x,n,B)
  S = 0;
  for i=1:n
     if x==B(i,1) then S = S+1
                  end
  K = S;
endfunction
```

   (b) Compléter la fonction Scilab suivante, qui si on lui donne `n` un entier naturel non nul et `A` une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ renvoie 1 si la matrice A est à diagonale propre et 0 sinon.
   On pourra utiliser la fonction `K` ainsi que la fonction `rank`.

```
function diagpropre(n,A);
  C = 1;
  I = eye(n,n);
  for i=1:n



  diagpropre=C
  endfunction
```

5. $\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
6. Déterminer le plus grand entier $p \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension p vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$.

Solution :

1. Programme ECS 2 page 5

2. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure se lisent sur sa diagonale. Si ces valeurs sont toutes distinctes, la matrice est diagonalisable et est semblable à une matrice diagonale dont les valeurs sont égales à ses propres coefficients diagonaux. Il suffit de choisir une telle matrice.

$\boxed{\text{Toute matrice triangulaire supérieure non diagonale avec des coefficients diagonaux distincts convient.}}$

3. (a) Si l'on note $A^2 = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

   On obtient pour tout $i \in [|1,n|]$. $b_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}a_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$.

   Ainsi $\boxed{\mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.}$

   (b) Soit A une matrice à diagonale propre, elle est donc semblable à une matrice D diagonale dont les coefficients valent $a_{i,i}$.
   Mais alors A^2 est semblable à D^2, donc tr(A^2) =tr(D^2).
   Ainsi $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2$, donc $\sum_{i\neq j} a_{i,j}^2 = 0$.
   Comme tous les coefficients sont positifs, ils sont tous nuls.
   $\forall i,j \in [|1,n|]$, si $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$. Autrement dit A est diagonale.
   Réciproquement, si A est diagonale, elle est semblable à elle même et elle est à diagonale propre.
   $\boxed{\text{Une matrice symétrique est à diagonale propre si et seulement si elle est diagonale.}}$

4. (a) K renvoie $\boxed{\text{le nombre de fois où l'élément } x \text{ apparaît dans la matrice } B.}$

   (b)
```
function diagpropre(n,A);
  C = 1;
  I = eye(n,n);
  for i=1:n
     if rank(A-A(i,i)*I)<>n-K(A(i,i),n,A) then C = 0
                                          end
  diagpropre = C
```
   Remarque : Cette fonction utilise "`rank`" qui fait du calcul approché et peut parfois proposer une valeur inférieure au rang réel. On peut poser la question au candidat, mais on n'insiste pas si cela ne lui dit rien.

5. Si $n = 1$, la réponse est oui. ($\mathcal{E}_1 = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$)
   Si $n = 2$, il suffit de considérer $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Ces deux matrices sont à diagonale propre d'après 3.
   Mais $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable (une seule valeur propre 0 et $A + B$ n'est pas la matrice nulle), donc encore moins à diagonale propre.
   Ainsi $\mathcal{E}_2$ ne peut pas être un sous-espace vectoriel
   Si $n \geqslant 2$, il suffit de considérer des matrices A' et B' construites avec les coefficients de A et de B sur leurs deux premières lignes et colonnes et complétées avec des 0 pour voir que $\mathcal{E}_n$ n'est pas non plus un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   $\boxed{\mathcal{E}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ sauf si } n = 1.}$

6. L'ensemble $\mathcal{D}_n$ des matrices diagonales est inclus dans $\mathcal{E}_n$.
   Il existe donc un sous-espace vectoriel F de dimension n tel que $F \subset \mathcal{E}_n$.
   En notant $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   $\mathcal{D}_n$=vect$(E_{i,i}, 1 \leqslant i \leqslant n)$ et ces vecteurs, issus de la base canonique forment une famille libre.
   Et si l'on note $\mathcal{G}_n$ =vect$((E_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n, i\neq j}$, c'est un sous-espace de dimension $n^2 - n$. Mais toute matrice de $\mathcal{G}_n$ a ses coefficients diagonaux nuls, donc toute matrice de $\mathcal{G}_n \cap \mathcal{E}_n$ est semblable à la matrice nulle.
   Donc $\mathcal{G}_n \cap \mathcal{E}_n = \{0\}$.
   Donc si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{G}_n \cap F = \{0\}$.
   Donc dim$(\mathcal{G}_n)$+dim$(F) \leqslant n^2$, donc dim$(F) \leqslant n^2 - (n^2 - n) = n$.
   $\boxed{\text{La dimension maximale pour un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ inclus dans } \mathcal{E}_n \text{ est } n.}$

Exercice sans préparation S2

Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle fonction génératrice de Z la fonction

$$G_Z : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(Z = n).$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

1. Montrer que $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ pour tout réel t pour lequel cette égalité a un sens.
2. Montrer que si $X + Y$ suit une loi binomiale, alors X et Y suivent aussi des lois binomiales (pas nécessairement de même paramètre).

Solution :

1. Soit t un réel appartenant simultanément aux ensembles de définition de G_X, G_Y et G_{X+Y}. Puisque X et Y sont indépendantes, t^X et t^Y le sont aussi par le lemme des coalitions. D'après le théorème du transfert, on a :
$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(t^{X+Y}\right) = \mathbb{E}\left(t^X\right)\mathbb{E}\left(t^Y\right) \boxed{= G_X(t)G_Y(t).}$$

2. Supposons que Z suive la loi binomiale de paramètres n et p. Puisque Z est finie, t^Z admet une espérance pour tout réel t. D'après le théorème du transfert,
$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_{X+Y}(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (tp + 1 - p)^n.$$
La fonction G_{X+Y} est donc polynômiale. Puisque Z est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, X et Y le sont aussi, assurant alors que G_X et G_Y sont des fonctions polynômiales. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in [\![0, n]\!]$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = a(tp + 1 - p)^\ell.$$
Puisque $G_X(1) = 1$, $a = 1$.
Or, pour $t \in \mathbb{R}$, et $k \in [|0, \ell|]$, $G_X^{(k)}(t) = \dfrac{\ell!}{(\ell - k)!} p^k (tp + 1 - p)^{\ell - k}$.
On en déduit alors la loi de X en appliquant la formule de Taylor au polynôme G_X (Taylor pour les polynômes n'est pas explicitement au programme, on peut utiliser Taylor-Lagrange ou identifier les DL.)
$$\forall k \in [\![0, \ell]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\ell!}{k!(\ell - k)!} p^k (1 - p)^{\ell - k}.$$
Si $k > \ell$, la même formule donne $\mathbb{P}(X = k) = 0$.
La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètre ℓ et p. On conclut de même pour Y.
$\boxed{\text{Si } X + Y \text{ suit une loi binomiale, alors } X \text{ et } Y \text{ suivent aussi des lois binomiales.}}$

SUJET S3

Exercice principal S3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$ et S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et x.

On pose $X_n = \dfrac{S_n}{n}$.

1. Question de cours : inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Montrer que
$$\forall \alpha > 0, \quad \mathbb{P}(|X_n - x| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$
3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On introduit $Y_n = f(X_n)$ et on pose alors $B_n(f)(x) = \mathbb{E}(Y_n)$. On définit ainsi une fonction $B_n(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$.
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(f)$ est une fonction polynomiale en x.
   (b) On pose $P_0 : x \mapsto 1$, $P_1 : x \mapsto x$ et $P_2 : x \mapsto x^2$.
   Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(P_0)$, $B_n(P_1)$ et $B_n(P_2)$.
4. Justifier qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leqslant M$.
5. Soit maintenant $\varepsilon > 0$ fixé. On admet le résultat suivant :
$$\exists \alpha > 0 \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2 \quad |x-y| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$
   (a) Avec les notations précédentes, montrer que :
$$\left| \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{2n\alpha^2}$$
   et que :
$$\left| \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \varepsilon.$$
   (b) Conclure qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$:
$$\forall x \in [0,1] \quad |B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon.$$
   Commenter le résultat obtenu et illustrer par un dessin.

Solution :

1. Question de cours : programme ECS2 2014 p. 22.
2. De manière immédiate : $\mathbb{E}(X_n) = x$ et $V(X_n) = \dfrac{x(1-x)}{n}$.
   Soit $\alpha > 0$ fixé. En vertu de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$$\mathbb{P}\left(|X_n - x| \geqslant \alpha\right) = \mathbb{P}\left(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{V(X_n)}{\alpha^2} = \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}$$
   Or, pour tout $x \in [0,1]$, $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$. On obtient donc finalement :
$$\boxed{\mathbb{P}(|X_n - x| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}}$$

3. (a) Par la formule de transfert, pour $x \in [0,1]$, en revenant à la définition de $B_n(f)$:

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Il est alors immédiat que $B_n(f)$ est un polynôme en x comme somme de polynômes.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En reprenant la formule précédente dans les cas particuliers respectivement de P_0, P_1 et P_2, on remarque que, pour $x \in [0,1]$:

$$B_n(P_0)(x) = \mathbb{E}(P_0(X_n)) = \mathbb{E}(1) = 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{\forall x \in [0,1] \quad B_n(P_0)(x) = 1 = P_0(x)}$$

De même :

$$B_n(P_1)(x) = \mathbb{E}(P_1(X_n)) = \mathbb{E}(X_n) \quad \text{soit} \quad \boxed{\forall x \in [0,1] \quad B_n(P_1)(x) = x = P_1(x)}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} B_n(P_2)(x) &= \mathbb{E}(P_2(X_n)) \\ &= \mathbb{E}(X_n^2) \\ &= V(X_n) + \mathbb{E}(X_n)^2 \text{ par la formule de Koenig-Huygens} \\ &= \frac{x(1-x)}{n} + x^2 \end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\forall x \in [0,1] \quad B_n(P_2)(x) = x^2 + \frac{1}{n}(x - x^2)}$.

On peut notamment remarquer que cette fois : $B_n(P_2) \neq P_2$.

4. D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée d'où l'existence de $M \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leqslant M$.

5. (a) On montre la première inégalité demandée. Par inégalité triangulaire, pour $k \in [\![0,n]\!]$ et $x \in [0,1]$:

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)| \leqslant M + M = 2M$$

par la question précédente. Alors :

$$\begin{aligned} \left|\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathbb{P}(X_n = k/n)\right| &\leqslant \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\mathbb{P}(X_n = k/n) \\ &\leqslant 2M \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}} \mathbb{P}(X_n = k/n) \\ &\leqslant 2M\mathbb{P}(|X_n - x| > \alpha) \\ &\leqslant 2M\frac{1}{4n\alpha^2} \text{ par la question 2} \\ &\leqslant \frac{M}{2n\alpha^2} \end{aligned}$$

En ce qui concerne la deuxième inégalité, on remarque que pour $|k/n - x| \leqslant \alpha$, alors $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$ par la propriété admise. Ainsi :

$$\begin{aligned} \left|\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathbb{P}(X_n = k/n)\right| &\leqslant \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha}} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\mathbb{P}(X_n = k/n) \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha}} \mathbb{P}(X_n = k/n) \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k/n) \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

(b) En utilisant la question précédente, on obtient, pour $x \in [0,1]$:

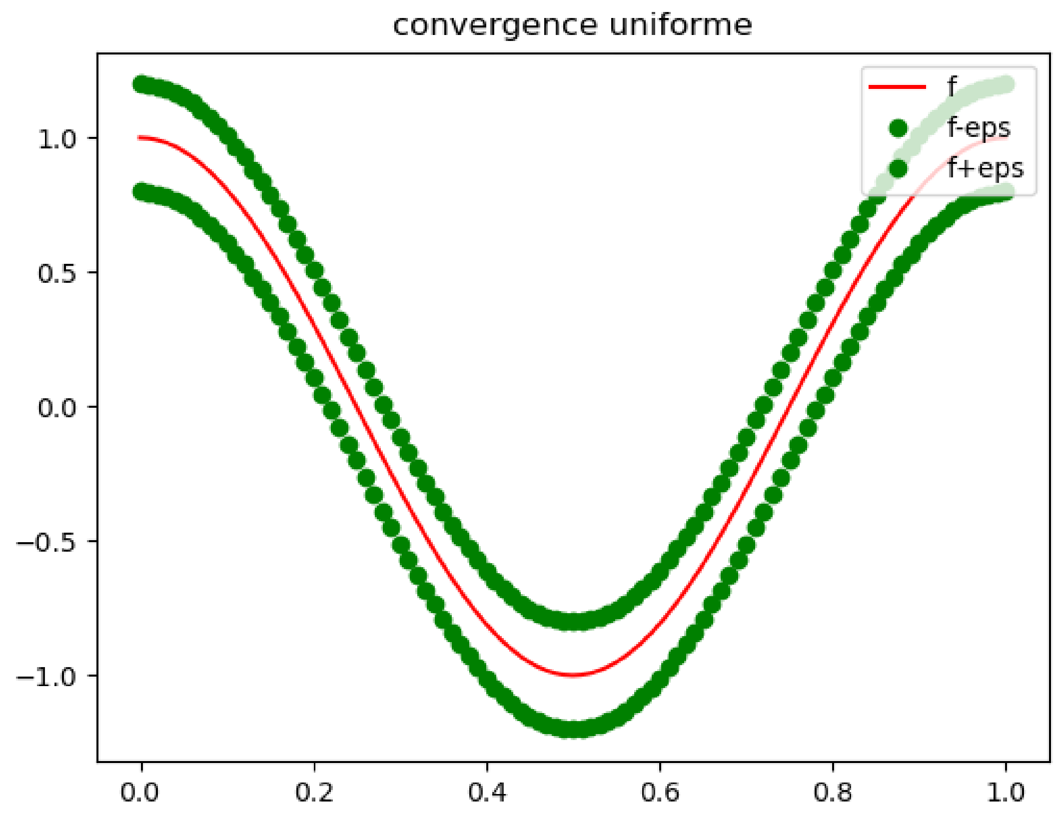
$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbb{P}(X_n = k/n)\right| \\
&= \left|\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbb{P}(X_n = k/n)\right| + \left|\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbb{P}(X_n = k/n)\right| \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{M}{2n\alpha^2}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{M}{2n\alpha^2} \to 0$ quand $n \to +\infty$ et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{M}{2n\alpha^2} \leqslant \varepsilon$. Alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \forall x \in [0,1] \quad |B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon}$$

En terme de commentaires, on attend bien sûr que le candidat remarque qu'on approxime ainsi f par une fonction polynomiale et que l'on a même mieux qu'une convergence simple de $B_n(f)$ vers f.

Remarquons d'ailleurs que la convergence simple peut se déduire de la loi faible des grands nombres mais, sauf erreur, en utilisant un résultat hors programme : X_n converge en probabilité vers x par la loi faible des grands nombres donc $Y_n = f(X_n)$ vers $f(x)$ par continuité de f et enfin, $B_n(f)(x) = \mathbb{E}(Y_n)$ converge alors vers $\mathbb{E}(f(x)) = f(x)$ – mais on utilise lors de cette dernière étape des propriétés de la convergence en loi qui ne sont pas au programme des ECS.



Exercice sans préparation S3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^tMM^tMM = I_n$.

2. Pouvez-vous trouver des solutions supplémentaires à cette équation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui ne soient pas des multiples de l'identité ?

Solution :

1. Soit M une solution. On en déduit immédiatement que M est inversible d'inverse égal à la fois à ${}^tMM^tMM$ et M^tMM^tM.
   On en déduit que $\boxed{M^{-1} \text{ est symétrique, donc } M \text{ aussi.}}$
   On en déduit que $M^5 = I_5$.
   La matrice M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable en vertu du théorème spectral. Il existe donc une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$. Ainsi $I_n = M^5 = PD^5P^{-1}$ donc $D = I_n$ et ainsi $M = I_n$.
   Réciproquement la matrice I_n est solution de l'équation.
   $\boxed{\text{L'unique solution recherchée dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est } I_n.}$
2. Si $n = 1$, c'est impossible, puisque toute matrice est un multiple de I_n.
   On cherche des solutions en plus parmi les matrices diagonalisables : on cherche alors des matrices symétriques telles il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible $M = PDP^{-1}$ et $D^5 = I$
   Il suffit donc de prendre D composée de racine cinquième de l'unité (avec au moins deux coefficients distincts) et d'avoir ${}^tP = P^{-1}$.
   * M est bien symétrique (on a bien ${}^tM = M$), et l'on a bien $M^5 = I_n$
   * M n'est pas un multiple de l'identité car M a plusieurs valeurs propres complexes.
   Les matrices de

   $$\boxed{\{P\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1} | P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ inversibles et vérifiant}\, {}^tP = P^{-1} \text{ et } (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in U_5^n \text{ non tous égaux } \}}$$

   conviennent

SUJET S4

Exercice principal S4

Soient x_0 un réel fixé et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+(x-x_0)^2)}$$

1. **Question de cours :** convergence en probabilité.
2. (a) Justifier le fait que f est bien une densité, et calculer la fonction de répartition d'une variable X admettant f comme densité.
   On dit qu'une telle variable aléatoire suit une loi de Cauchy de paramétre x_0.
   (b) Une variable suivant une loi de Cauchy de paramètre x_0 admet-elle une espérance ?
3. Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que le réel m est une médiane de la variable X si et seulement si m vérifie
   $$\mathbb{P}(X < m) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant m)$$
   Déterminer le ou les réels qui sont des médianes de X dans les cas suivants :
   (a) X suit une loi de Cauchy de paramètre x_0.
   (b) X suit une loi de Bernoulli de paramétre $\frac{1}{3}$.
4. Ecrire une fonction Scilab qui, ayant pour argument un paramétre $a > 0$, et renvoyant une médiane d'une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramétre a.
5. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à densité mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Cauchy de paramètre x_0.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $Y_{n,x}$ la variable aléatoire définie par le nombre d'entiers k de $[|1,n|]$ tels que $[X_k \leqslant x]$ soit réalisé.
   (a) Donner la loi de $Y_{n,x}$.
   (b) Montrer que $\frac{Y_{n,x}}{n}$ converge en probabilité vers un réel que l'on précisera.
6. On définit $\hat{m_n}$ une médiane empirique de $\{X_1, ..., X_n\}$ comme étant une variable aléatoire vérifiant
   (*) Il y a au moins $\frac{n}{2}$ indices i dans $[|1,n|]$ tels que $X_i \leqslant \hat{m_n}$.
   (**) Il y a au plus $\frac{n}{2}$ indices i dans $[|1,n|]$ tels que $X_i < \hat{m_n}$.
   On admet qu'une telle variable aléatoire $\hat{m_n}$ existe.
   (a) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$,
   $$\mathbb{P}(\hat{m_n} < x_0 - \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(Y_{n,x_0-\varepsilon} \geqslant \frac{n}{2}) \text{ et } \mathbb{P}(\hat{m_n} > x_0 + \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(Y_{n,x_0+\varepsilon} \leqslant \frac{n}{2})$$
   (b) Montrer que $\hat{m_n}$ converge en probabilité vers x_0

Solution :

1. Cours ECS1 page 24.

2. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$ et positive.

De plus $\displaystyle\int_y^z f(x)dx = \frac{\arctan(z-x_0)-\arctan(y-x_0)}{\pi}$ qui tend bien vers 1 quand $y\to-\infty$ et $z\to+\infty$

$\boxed{f \text{ définit bien une densité de probabilité, une fonction de répartition est donnée par : } F(z) = \frac{\arctan(z-x_0)}{\pi}+\frac{1}{2}.}$

(b) Comme $xf(x) \sim \dfrac{1}{\pi x}$ au voisinage de l'infini, donc l'intégrale donnant $\mathbb{E}(X)$ diverge.

$\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

3. (a) Comme la variable X est à densité, $\mathbb{P}(X<m)=\mathbb{P}(X\leqslant m)$.

On résout donc $F(x)=\dfrac{1}{2}$ ssi $\arctan(x-x_0)=0$ ssi $x=x_0$.

$\boxed{x_0 \text{ est l'unique médiane de } X.}$

(b) Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{3}$, $\mathbb{P}(X\leqslant x)=0$ si $x<0$, puis $\mathbb{P}(X\leqslant x)=\dfrac{2}{3}$ ou 1.

En revanche $\mathbb{P}(X<x)=0$ si $x\leqslant 0$, puis $\mathbb{P}(X<x)=\dfrac{2}{3}$ pour $x\in]0,1[$.

$\boxed{\text{Donc l'unique médiane de } X \text{ est } m=0.}$

4.
```
function x = mediane(a)
P=exp(-a);
S=P
k = 0;
while S<1/2
   k = k+1;
   P=P*a/k
   S = S+P;
end;
x = k;
endfunction
```

5. (a) Comme les événements $[X_k\leqslant x]$ sont indépendants et ont chacun une probabilité $F(x)$, on a un schéma de loi binomiale.

$\boxed{Y_{n,x} \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } F(x).}$

(b) Donc d'après la loi des grands nombres, comme $Y_{n,x}$ est une somme de variables de Bernoulli identiques et indépendantes :

$\boxed{\frac{Y_{n,x}}{n} \text{ converge en probabilité vers } F(x).}$

6. (a) Soit $\varepsilon>0$:

Si $\hat{m_n}<x_0-\varepsilon$, alors il y a au moins $\dfrac{n}{2}$ indices i de $[|1,n|]$ tel que l'on ait $X_i\leqslant\hat{m_n}<x_0-\varepsilon$.

Ainsi, il y a au moins $\dfrac{n}{2}$ indices i de $[|1,n|]$ tel que l'on ait $X_i\leqslant x_0-\varepsilon$.

Ainsi $Y_{n,x_0-\varepsilon}\geqslant\dfrac{n}{2}$.

On a une inclusion d'événements et donc une inégalité au niveau des probabilités.

$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \mathbb{P}(\hat{m_n}<x_0-\varepsilon)\leqslant\mathbb{P}(Y_{n,x_0-\varepsilon}\geqslant\frac{n}{2}).}$

De même Si $\hat{m_n}>x_0+\varepsilon$, alors il y a moins $\dfrac{n}{2}$ indices i de $[|1,n|]$ tel que l'on ait $X_i<\hat{m_n}$.

Ainsi, il y a au moins $\dfrac{n}{2}$ indices i de $[|1,n|]$ tel que l'on ait $X_i\leqslant x_0+\varepsilon$.

Ainsi $Y_{n,x_0+\varepsilon}\leqslant\dfrac{n}{2}$.

On a une inclusion d'événements et donc une inégalité au niveau des probabilités.

$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \mathbb{P}(\hat{m_n}>x_0+\varepsilon)\leqslant\mathbb{P}(Y_{n,x_0+\varepsilon}\leqslant\frac{n}{2}).}$

(b) Soit $\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(|\hat{m_n}-x_0|>\varepsilon)=\mathbb{P}(\hat{m_n}>x_0+\varepsilon)+\mathbb{P}(\hat{m_n}<x_0-\varepsilon)$.

Or, $\mathbb{P}(\hat{m_n}<x_0-\varepsilon)\leqslant\mathbb{P}(Y_{n,x_0-\varepsilon}\geqslant\dfrac{n}{2})=\mathbb{P}\left(\dfrac{Y_{n,x_0-\varepsilon}}{n}-F(x_0-\varepsilon)\geqslant\dfrac{1}{2}-F(x_0-\varepsilon)\right)$.

Or, d'une part $\dfrac{Y_{n,x_0-\varepsilon}}{n}$ converge en probabilité vers $F(x_0-\varepsilon)$ et d'autre part comme F est strictement croissante et $F(x_0)=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}-F(x_0-\varepsilon)>0$.

Par définition de la convergence en probabilité : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\dfrac{Y_{n,x_0-\varepsilon}}{n}-F(x_0-\varepsilon)\geqslant\dfrac{1}{2}-F(x_0-\varepsilon)\right)=0$.

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(\hat{m}_n<x_0-\varepsilon)=0$.

On montrerait de même que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(\hat{m}_n>x_0+\varepsilon)=0$ et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(|\hat{m}_n-x_0|>\varepsilon)=0$.

$\boxed{\hat{m}_n \text{ converge en probabilité vers } x_0.}$

Exercice sans préparation S4

Soient a, b deux réels vérifiant $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par

$$a_{i,j} = \int_a^b f_i(t) f_j(t) dt, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Montrer que les valeurs propres de A sont toutes réelles positives. Sous quelle condition sont-elles toutes strictement positives ?

Solution :
La matrice A est symétrique. Il en résulte que ses valeurs propres sont toutes réelles. Soient λ une valeur propre et $V =^t (v_1, \cdots, v_n)$ un vecteur propre associé non nul. On a

$$\lambda \|V\|^2 =^t VAV = \sum_{i,j=1}^{n} v_i a_{i,j} v_j = \int_a^b (\sum_{i=1}^{n} v_i f_i(t))^2 dt \geqslant 0.$$

Il en résulte que $\lambda \geqslant 0$.
Si 0 est une valeur propre alors il existe $V =^t (v_1, \cdots, v_n)$ non nul tel que
$^tVAV = \int_a^b (\sum_{i=1}^{n} v_i f_i(t))^2 dt = 0$
Ainsi la fonction $t \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i f_i(t))^2$ est continue, positive, d'intégrale nulle.
Donc il existe $v_1, .., v_n$ non tous nuls tels que pour tout $t \in [|a, b|]$ $\sum_{k=1}^{n} v_k f_k = 0$, autrement dit, la famille de fonctions $(f_1, \cdots, f_n)$ est liée.
Réciproquement si la famille est liée, on construit un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont toutes strictement positives ssi } f_1, \cdots, f_n \text{ forment une famille libre dans } \mathcal{C}^0([a, b])}$

SUJET S5

Exercice principal S5

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi normale centrée réduite.
On pose, pour tout entier non nul n et tout $\omega \in \Omega$:

$$M_n(\omega) = \max\big(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big).$$

On admet qu'on définit ainsi une variable aléatoire M_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires. Exemple.
2. Etudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $\big(M_n\big)_{n\geqslant 1}$.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose : $G(t) = P\big([X_1 \geqslant t]\big)$. Etablir que pour tout entier naturel non nul n il existe un unique réel b_n tel que $G(b_n) = \dfrac{1}{n}$.
4. (a) Etablir, pour tout réel $x > 0$, l'égalité :

$$G(x) = c\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - c\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}dt.$$

pour une certaine constante c (indépendante de x) que l'on précisera.

(b) En déduire l'équivalent :

$$G(x) \sim c\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

(c) Proposer un équivalent simple de b_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

5. Etudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $\big(b_n(M_n - b_n)\big)_{n\geqslant 1}$.

Solution :

1. Programme ECS2 page 22.

2. Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Pour tout réel t on a :

$$F_{M_n}(t) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant t]\Big) = \big(\Phi(t)\big)^n$$

par indépendance des v.a. $X_1, \ldots, X_n$.
De l'encadrement $0 < \Phi(t) < 1$ il s'ensuit que :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{M_n}(t) = 0$$

La fonction nulle n'étant pas une fonction de répartition il en résulte que :

$$\boxed{\text{La suite de variables aléatoires } \big(M_n\big)_{n\geqslant 1} \text{ ne converge pas en loi.}}$$

3. La fonction $G = 1 - \Phi$ réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ vers $]0,1[$. Comme $\frac{1}{n} \in]0,1[$

$\boxed{\text{Il existe un unique } b_n \text{ vérifiant } G(b_n) = \frac{1}{n}.}$

4. (a) On a, pour tout réel x :

$$G(x) = c\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Pour $x > 0$ en écrivant

$$G(x) = c\int_x^{+\infty} \frac{1}{t}\big(te^{-\frac{t^2}{2}}\big)\,\mathrm{d}t$$

une intégration par parties donne l'égalité :

$$\boxed{G(x) = c\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - c\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,\mathrm{d}t}.$$

(b) On remarque que

$$c\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant c\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}G(x)$$

Il en résulte que, au voisinage de $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\,\mathrm{d}t = o\big(G(x)\big)$$

De l'égalité du 4a) on obtient :

$$c\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = G(x) + o\big(G(x)\big)$$

d'où l'équivalent :

$$\boxed{G(x) \underset{+\infty}{\sim} c\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}}$$

(c) Puisque la fonction G tend vers 0 en $+\infty$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ et ainsi :

$$G(b_n) = \frac{1}{n} \sim c\frac{e^{-\frac{b_n^2}{2}}}{b_n}$$

Il existe donc une suite $(\epsilon_n)_{n\geqslant 1}$ de limite nulle telle que :

$$c\frac{e^{-\frac{b_n^2}{2}}}{b_n} = \frac{1}{n}(1+\epsilon_n)$$

En passant au logarithme on a :

$$\underbrace{\ln(c) - \frac{b_n^2}{2} - \ln(b_n)}_{\sim -\frac{b_n^2}{2} \text{ car } \ln(t)=o(t^2)} = \underbrace{-\ln(n) + \ln(1+\epsilon_n)}_{\sim -\ln(n)}$$

Ainsi :

$$\frac{b_n^2}{2} \sim \ln(n)$$

et il en résulte que :

$$\boxed{b_n \sim \sqrt{2\ln(n)}}$$

5. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé et quelconque. On a :

$$P\big(\,[b_n(M_n - b_n) \leqslant t]\,\big) = P\Big(\big[M_n \leqslant b_n + \frac{t}{b_n}\big]\Big) = \left(\Phi\big(b_n + \frac{t}{b_n}\big)\right)^n = \left(1 - G\big(b_n + \frac{t}{b_n}\big)\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - G\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right)\right)\right)$$

Or :

$$G\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right) \sim c\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right)^2\right)$$

et

$$c\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right)^2\right) = c\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{b_n^2}{2}\right)\exp\left(-t\right)\exp\left(-\frac{t^2}{b_n^2}\right)$$

d'où

$$G\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right) \sim \underbrace{cb_n^{-1}\exp\left(-\frac{b_n^2}{2}\right)}_{\sim\frac{1}{n}}\exp(-t)$$

Finalement :

$$G\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right) \sim \frac{e^{-t}}{n}$$

et il s'ensuit que :

$$n\ln\left(1 - G\left(b_n + \frac{t}{b_n}\right)\right) \sim -e^{-t}$$

Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} P\big(\,[b_n(M_n - b_n) \leqslant t]\,\big) = \exp(-e^{-t})$$

Le fonction $F : t \mapsto \exp(-e^{-t})$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, croissante et de limite nulle en $-\infty$ et de limite égale à 1 en $+\infty$, F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y (à densité).

Conclusion :

$$\boxed{\big(b_n(M_n - b_n)\big)_{n\geqslant 1} \xrightarrow{\text{loi}} Y}$$

où Y admet pour fonction de répartition $F_Y : t \mapsto \exp(-e^{-t})$

Exercice sans préparation S5

Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble

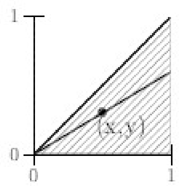
$$\{(x, g(x))/x \in [0,1] \text{ et } g \in \mathcal{G}\}$$

lorsque $\mathcal{G}$ est l'un des ensembles suivants :

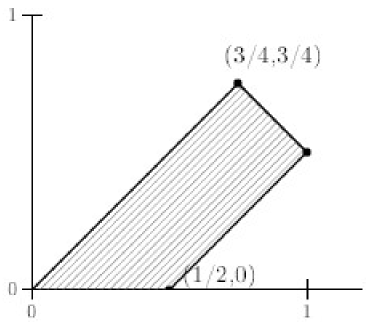
1. $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 = \{g : [0,1] \mapsto [0,1] \text{ dérivable } / g(0) = 0 \text{ et } \forall x \in [0,1],\ |g'(x)| \leqslant 1\}$
2. $\mathcal{G} = \mathcal{G}_2 = \{g : [0,1] \mapsto [0,1] \text{ dérivable } / g(0) = 0, g(1) = \dfrac{1}{2} \text{ et } \forall x \in [0,1], |g'(x)| \leqslant 1\}$.

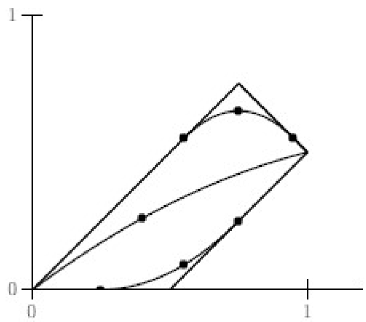
Solution :

1. Soit $(x, y) \in [\,0\,;1\,]^2$.
   Si $(x, y) \in \mathcal{G}_2$ alors $|g(x) - g(0)| \leqslant |x - 0|$ (par l'IAF).
   Soit $|g(x)| \leqslant x$, soit $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$.
   Réciproquement, soit (x, y) tel que $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$.
   Si $x = y = 0$, pas de problème (on prend g la fonction nulle par exemple).
   On considère la fonction g affine passant par et $(0, 0)$ et (x, y) $g(t) = \dfrac{y}{x}.t$
   On a alors $|g(t) - g(t')| = \dfrac{y}{x}|t - t'|$ pour tous $t, t' \in [\,0\,;1\,]$. Comme $\dfrac{y}{x} \leqslant 1$, la fonction g convient, et $(x, y) \in \mathcal{G}_2$.
   $\boxed{\mathcal{G}_1 = \{(x, y) \text{ tel que } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}.}$

2. Conditions nécessaires : Soit $(x, y) \in \mathcal{G}_2$. En utilisant l'IAF on obtient :
   $|g(x) - g(0)| \leqslant |x - 0|$, soit $0 \leqslant y \leqslant x$ $(y \geqslant 0)$ d'une part
   et $|g(x) - g(1)| \leqslant |x - 1|$, soit $x - 1 \leqslant y - 1/2 \leqslant 1 - x$.
   Soit $y \geqslant x - 1/2$ et $y \leqslant 3/2 - x$ (et $y \leqslant 1$ pour $x \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$).
   Ce qui nous donne le domaine suivant :

   Réciproque :
   Si (x, y) est dans ce domaine et n'est pas égal à (1/2,0) ou (3/4,3/4), on peut facilement construire une fonction g dérivable passant par (x, y), et de dérivée toujours inférieure ou égale à 1 en valeurs absolues. (en collant par exemple la courbe à la frontière du domaine et en la "décollant" de façon dérivable).

En revanche si $(x, y) = (3/4, 3/4)$, ou $(1/2, 0)$, on ne peut pas construire de fonction g "convenable", car on aurait "un point anguleux" où la fonction g ne serait pas dérivable.
Soit par exemple une fonction g convenable passant par $(3/4, 3/4)$, $g(3/4) = 3/4$.
pour $x \in [\,0\,;3/4\,]$, pour avoir $|g(x) - 3/4| \leqslant |x - 3/4|$ et $|g(x)| \leqslant x$, nécessairement on doit avoir $g(x) = x$ (sinon, on a une pente supérieure à 1 d'un côté ou de l'autre. Donc $g(x) = x$ sur $[\,0\,;3/4\,]$
De même $g(x) = 3/2 - x$ sur $[\,3/4\,;1\,]$. Donc la fonction g n'est pas dérivable en $\dfrac{3}{4}$.
Et donc $(3/4, 3/4) \notin \mathcal{G}_2$.
De même $(0, 1/2) \notin \mathcal{G}_2$.

SUJET S6

Exercice principal S6

Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(T > n) > 0.$$

On appelle *taux de panne* associé à T la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta_n = \mathbb{P}(T = n | T \geqslant n).$$

1. Question de cours : théorème de la limite monotone dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
2. Si T est une variable aléatoire indiquant l'instant où un matériel tombe en panne, comment interpréter la quantité θ_n pour $n \in \mathbb{N}$?
3. (a) On suppose que T suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer le taux de panne $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associé à T. Commenter le résultat obtenu.
   (b) Soit T une variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par
   $$\mathbb{P}(T = k) = \frac{\lambda}{k(k+1)},$$
   où $\lambda \in \mathbb{R}$.
      i. Déterminer la valeur de λ.
      ii. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T > n) > 0$ et déterminer le taux de panne $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associé à T. Commenter le résultat obtenu.
4. (a) Justifier que $\theta_n \in [0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Exprimer la probabilité $\mathbb{P}(T \geqslant n)$ en fonction des termes de la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire que la série $\sum \theta_n$ diverge.
5. On veut montrer la réciproque du résultat précédent. Soit donc $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \theta_n \in [0,1[\quad \text{et} \quad \sum \theta_n \text{ diverge}$$
   Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T.
6. Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le taux de panne d'une variable aléatoire T. On suppose déjà programmée une fonction Scilab `theta(n)` qui pour $n \in \mathbb{N}$ renvoie θ_n. Ecrire une fonction Scilab `SimulT()` qui simule la variable aléatoire T.

Solution :

1. Question de cours : programme ECS1 2013 p. 21.
2. La probabilité θ_n est la probabilité de tomber en panne à l'instant n alors que le matériel est encore en état de marche à cet instant.
3. (a) Remarquons d'abord que le choix d'un paramètre p dans $]0,1[$ assure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T > n) > 0$ et qu'ainsi la suite (θ_n) associée à T est bien définie. On note $q = 1 - p$.
   Alors, par définition des probabilités conditionnelles, pour $n \in \mathbb{N}$:
   $$\theta_n = \frac{\mathbb{P}(\{T = n\} \cap \{T \geqslant n\})}{\mathbb{P}(T \geqslant n)} = \frac{\mathbb{P}(T = n)}{\mathbb{P}(T \geqslant n)}$$
   Or
   $$\mathbb{P}(T \geqslant n) = \sum_{k \geqslant n} pq^{k-1} = \frac{pq^{n-1}}{1-q} = q^{n-1}$$

et donc finalement :

$$\boxed{\theta_n = p}$$

Le taux de panne est constant en ce cas. Le résultat était relativement prévisible car une loi géométrique correspond à la répétition d'épreuve de Bernoulli indépendantes de même loi et est donc un processus sans mémoire – c'est l'analogue discret d'une loi exponentielle. Ainsi la probabilité de tomber en panne à l'instant n, sachant que l'on fonctionne encore à cette date, ne dépend pas de n, et est simplement la probabilité de succès à l'épreuve de Bernoulli réalisée à l'instant n.

(b) i. On doit avoir comme condition de normalisation :

$$\lambda \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Or :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

par téléscopage et donc : $\boxed{\lambda = 1}$.

ii. Toujours par téléscopage, pour $n > 0$:

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(T \geqslant n+1) = \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k \geqslant n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} > 0$$

On peut alors calculer, pour $n > 0$:

$$\theta_n = \frac{\mathbb{P}(T = n)}{\mathbb{P}(T \geqslant n)} \boxed{= \frac{1}{n+1}}$$

tandis que $\theta_0 = 0$.

On remarque que dans ce cas-là, la suite $(\theta_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante : plus le matériel fonctionne depuis longtemps, moins il a de chances de tomber en panne. Cela correspond par exemple à un matériel ayant besoin d'une période de rodage avant de fonctionner correctement.

4. (a) De manière immédiate $\theta_n \in [0, 1]$. Il reste à voir que $\theta_n < 1$. Or :

$$\mathbb{P}(T \geqslant n) = \mathbb{P}(T = n) + \mathbb{P}(T > n) > \mathbb{P}(T = n)$$

car $\mathbb{P}(T > n) > 0$ par hypothèse, d'où :

$$\theta_n = \frac{\mathbb{P}(T = n)}{\mathbb{P}(T \geqslant n)} < 1$$

(b) Par définition de θ_k, $\mathbb{P}(T = k) = \theta_k \mathbb{P}(T \geqslant k)$ et dans le même temps :

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(T \geqslant k) - \mathbb{P}(T \geqslant k+1)$$

d'où :

$$\frac{\mathbb{P}(T \geqslant k+1)}{\mathbb{P}(T \geqslant k)} = 1 - \theta_k$$

puisque $\mathbb{P}(T \geqslant k) = \mathbb{P}(T > k-1) > 0$ par hypothèse pour $k \in \mathbb{N}^*$, tandis que $\mathbb{P}(T \geqslant 0) = 1$. On en déduit en faisant le produit de ces expressions pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(T \geqslant k+1)}{\mathbb{P}(T \geqslant k)} = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$$

ce qui par téléscopage et compte-tenu de ce que $\mathbb{P}(T \geqslant 0) = 1$ donne :

$$\boxed{\mathbb{P}(T \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)}$$

(c) Par continuité décroissante des probabilités : $\lim_n \mathbb{P}(T \geqslant n) = 0$ d'où, en passant au logarithme dans le résultat de la question précédente, puisque $1-\theta_k > 0$ pour tout k :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-\theta_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)\right) \to -\infty \text{ quand } n \to +\infty$$

Ainsi la série $\sum \ln(1-\theta_n)$ est divergente.

Il faut maintenant distinguer deux cas : si (θ_n) ne converge pas vers 0, la série $\sum \theta_n$ diverge grossièrement. Si la suite (θ_n) converge vers 0 alors :

$$\theta_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln(1-\theta_n)$$

et donc par comparaison de séries à termes de signe constant, on en déduit que la série $\sum \theta_n$ est divergente.

Dans tous les cas, $\boxed{\text{la série } \sum \theta_n \text{ est divergente}}$.

5. On procède par analyse-synthèse. Si T est une variable aléatoire solution, nécessairement, compte-tenu des calculs précédents, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(T=n) = \mathbb{P}(T \geqslant n) - \mathbb{P}(T \geqslant n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k) - \prod_{k=0}^{n}(1-\theta_k) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$$

$P(T=0) = \theta_0$ Ainsi, la donnée du taux de panne détermine entièrement la loi de T.
Il reste donc à faire la synthèse en montrant qu'en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}* \quad u_n = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k) \text{ et } u_0 = \theta_0$$

la suite (u_n) permet bien de définir la loi d'une variable aléatoire T en posant $\mathbb{P}(T=n) = u_n$. Pour cela, il faut vérifier que $u_n \geqslant 0$ pour tout n ainsi que : $\sum_{n\geqslant 0} u_n = 1$.

Le premier point est immédiat car $\theta_n \in [0,1[$ pour tout n.

Pour le second, on note $\forall n \in \mathbb{N}*\ v_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$ et $v_0 = 1$.

Alors, pour $n \geqslant 0$, $u_n = v_n - v_{n+1}$ d'où par téléscopage :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1} = 1 - v_{n+1}$$

Or, en passant au logarithme dans l'expression de v_n, ce qui est possible car $1-\theta_k > 0$ pour tout k :

$$\ln(v_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-\theta_k)$$

Comme précédemment de deux choses l'une : si (θ_n) ne converge pas vers 0, la série $\sum \ln(1-\theta_n)$ diverge grossièrement, si (θ_n) converge vers 0, $1-\theta_n \underset{+\infty}{\sim} -\theta_n$ et la série $\sum \ln(1-\theta_n)$ diverge par comparaison de séries à termes de signe constant.

Dans tous les cas : $\lim_n \ln(v_n) = -\infty$ d'où $v_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Cela prouve que la série $\sum u_n$ converge et :

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n = 1$$

On peut donc définir une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(T=n) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$$

Alors :

$$\mathbb{P}(T \geqslant n) = \sum_{k \geqslant n} \mathbb{P}(T = n) = \sum_{k \geqslant n} u_k = \sum_{k \geqslant n} (v_k - v_{k+1}) = v_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$$

par téléscopage. En particulier $\mathbb{P}(T \geqslant n) > 0$, on peut donc définir le taux de panne associé à T et ce dernier vaut :

$$\frac{\mathbb{P}(T = n)}{\mathbb{P}(T \geqslant n)} = \theta_n$$

$\boxed{\text{La réciproque est bien démontrée.}}$

6.
```
T = simulT();
stop = 0;
n = -1;
while stop == 0
     n = n+1
     if rand() < theta(n) then stop = 1
                          end
end
T=n
endfunction
```

Exercice sans préparation S6

Soient x et y deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E.

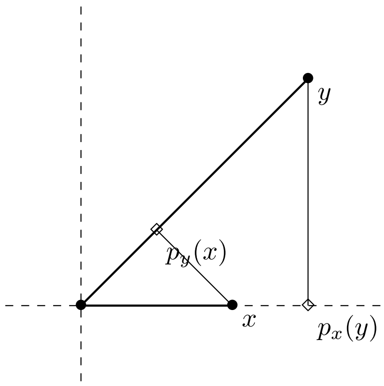
À quelle condition sur x et y, le projeté orthogonal du vecteur x sur la droite $\text{Vect}\,(y)$ est-il égal au projeté orthogonal de y sur la droite $\text{Vect}\,(x)$?

On commencera par faire un dessin avec deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^2$

Solution :

Un dessin est exigé.

Dessin avec deux vecteurs non orthogonaux :



Le projeté orthogonal de x sur $\text{Vect}\,(y)$ est $\dfrac{\langle x;\ y\rangle}{\|y\|^2}y$. Le projeté orthogonal de y sur $\text{Vect}\,(x)$ est $\dfrac{\langle x;\ y\rangle}{\|x\|^2}x$. Ces deux projetés sont égaux si, et seulement si $\dfrac{\langle x;\ y\rangle}{\|y\|^2}y = \dfrac{\langle x;\ y\rangle}{\|x\|^2}x$, c'est-à-dire si et seulement si x et y sont orthogonaux ou si $\|x\|^2 y = \|y\|^2 x$.

La deuxième condition implique que x et y sont colinéaires et ainsi que $\text{Vect}\,(x) = \text{Vect}\,(y)$. Le projeté de chacun des vecteurs x et y sur la droite $\text{Vect}\,(x) = \text{Vect}\,(y)$ est donc lui-même. On en déduit donc que :

$\boxed{\text{les projetés orthogonaux sont égaux si, et seulement si, } x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux ou égaux.}}$

SUJET S7

Exercice principal S7

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé. On considère N une variable aléatoire, indépendante des X_i, suivant une loi de Poisson de paramètre $n \geqslant 1$.
On pose $S_0 = 0$ et pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On définit également la variable aléatoire $T = S_N = X_1 + \cdots + X_N$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega),$$

et enfin, on note pour $n \in \mathbb{N}^*$: $D_n = T - S_n$.

1. **Question de cours :** Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Rappeler la loi de S_k pour tout $k \in \mathbb{N}$, son espérance et sa variance.
3. Montrer que T suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
4. Déterminer $\mathbb{E}(D_n)$.
5. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}\left(D_n^2 \middle| [N=k]\right)$ est égale à :

$$\mathbb{E}\left(D_n^2 \middle| [N=k]\right) = p(1-p) \cdot |k-n| + |k-n|^2 \cdot p^2$$

   (b) Montrer alors que :

$$\mathbb{E}(D_n^2) \leqslant np$$

6. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(n^\alpha \left|\frac{T}{n} - \frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

7. (a) Montrer que si $k \in \mathbb{N}$ et $k \neq n$, $\mathbb{P}_{N=k}(D_n \neq 0) \geqslant 1-p$

   (b) Soient $\alpha \geqslant 1$ et $\varepsilon \in]0,1[$. A-t-on

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(n^\alpha \left|\frac{T}{n} - \frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0 \ ?$$

   On pourra utiliser l'équivalent de Stirling, quand $n \to +\infty$, $n! \sim \dfrac{n^n}{e^n\sqrt{2\pi n}}$

Solution :

1. Pour Y une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\Big|Y - \mathbb{E}[Y]\Big| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}[Y]}{\varepsilon^2}$$

2. • Par définition S_0 suit une loi certaine égale à 0 : $S_0(\Omega) = \{0\}$, $\mathbb{P}(S_0 = 0) = 1$, $\mathbb{E}[S_0] = \mathbb{V}[S_0] = 0$.

- Pour tout $k \geqslant 1$, en tant que somme de k variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de même paramètre p, S_k suit une loi binomiale de paramètre (k,p), à savoir :

$$S_k(\Omega) = [\![0,k]\!], \quad \forall i \in [\![0,k]\!],\ \mathbb{P}(S_k = i) = \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}, \quad \mathbb{E}[S_k] = kp, \quad \mathbb{V}[S_k] = kp(1-p).$$

Remarquons que le cas $k = 0$ vérifie les mêmes formules.

3. On a $T = S_N$.
Remarquons que, pour tout $k \geqslant 0$, sachant $[N = k]$, alors T suit la même loi que S_k.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_{[N=k]}(T = i) = \mathbb{P}_{[N=k]}(S_k = i) = \mathbb{P}(S_k = i) \quad \text{(car } S_k \text{ est indépendante de } N\text{)}$$

Fixons $i \in \mathbb{N}$. Alors, en utilisant le système complet d'événements $([N = k])_{k\geqslant 0}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = i) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\mathbb{P}_{[N=k]}(T = i) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\mathbb{P}(S_k = i) \\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\binom{k}{i} p^i(1-p)^{k-i} \\
&= \frac{e^{-n}p^i}{i!}\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{n^k(1-p)^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= \frac{e^{-n}(np)^i}{i!}\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{(n(1-p))^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= e^{-n}\frac{(np)^i}{i!}e^{n(1-p)} \\
&= e^{-np}\frac{(np)^i}{i!}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{T \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } np.}$

4. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}[D_n] = \mathbb{E}[T - S_n] = \mathbb{E}[T] - \mathbb{E}[S_n] = np - np = 0$.

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   - Si $k = n$, alors $[N = n]$ est réalisé, et donc $D_n = S_n - S_n = 0$, donc $D_n^2 = 0$ également :

$$\mathbb{E}\left[D_n^2 \middle| [N = n]\right] = 0$$

   - Supposons $n < k$, et supposons $[N = k]$ réalisé. Alors :

$$D_n = S_k - S_n = \sum_{i=1}^{k} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=n+1}^{k} X_i$$

   Ainsi, sachant $[N = k]$, D_n suit une loi binomiale de paramètre $(k - n, p)$.
   Or, si Z suit une loi binomiale de paramètre $(k - n, p)$, alors $\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{V}[Z] + (\mathbb{E}[Z])^2$, on a alors :

$$\mathbb{E}\left[D_n^2 \middle| [N = k]\right] = (k-n)p(1-p) + (k-n)^2p^2$$

   - Supposons $n > k$, et supposons $[N = k]$ réalisé. Alors :

$$D_n = S_k - S_n = \sum_{i=1}^{k} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i = -\sum_{i=k+1}^{n} X_i$$

   d'où : $-D_n$ suit encore une loi binomiale de paramètre $(n - k, p)$. Donc de même, on a :

$$\mathbb{E}\left[D_n^2 \middle| [N = k]\right] = \mathbb{E}\left[(-D_n)^2 \middle| [N = k]\right] = p(1-p)(n-k) + (n-k)^2p^2$$

On a donc bien démontré que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left[D_n^2 \middle| [N=k]\right] = p(1-p)\cdot|k-n| + |k-n|^2 \cdot p^2$$

(b) Par le théorème de l'espérance totale,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_n^2] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[D_n^2 \middle| [N=k]\right] \mathbb{P}(N=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(p(1-p)\cdot|k-n| + |k-n|^2\cdot p^2\right)\mathbb{P}(N=k) \\
&= \mathbb{E}\left[p(1-p)|N-n| + p^2|N-n|^2\right] \quad \text{par théorème de transfert} \\
&= p(1-p)\mathbb{E}\left[|N-n|\right] + p^2\mathbb{E}\left[|N-n|^2\right] \quad \text{par linéarité de l'espérance}
\end{aligned}$$

Remarquons ensuite que, puisqu'on a toujours $|N-n| \leqslant |N-n|^2$ (puisque $|N-n|$ prend des valeurs entières positives), on a par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left(|N-n|\right) \leqslant \mathbb{E}[|N-n|^2]$$

d'où :

$$\mathbb{E}[D_n^2] \leqslant (p(1-p)+p^2)\mathbb{E}\left[|N-n|^2\right] = p\mathbb{E}\left[|N-n|^2\right]$$

Et enfin remarquons que :

$$\mathbb{E}\left[|N-n|^2\right] = \mathbb{E}\left[(N-\mathbb{E}[N])^2\right] = \mathbb{V}[N] = n$$

D'où :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[D_n^2\right] \leqslant np}$$

6. Soit $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et soit $\varepsilon > 0$.

La variable aléatoire D_n admet bien une espérance et une variance (et $\mathbb{V}[D_n] = \mathbb{E}[D_n^2] - 0 \leqslant np$).
On peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(n^\alpha\left|\frac{T}{n} - \frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|D_n - \mathbb{E}[D_n]| \geqslant \varepsilon n^{1-\alpha}\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}[D_n]}{(\varepsilon n^{1-\alpha})^2} \leqslant \frac{np}{\varepsilon^2 n^{2-2\alpha}} = \frac{p}{\varepsilon^2 n^{1-2\alpha}}$$

Par encadrement, on a donc bien que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(n^\alpha\left|\frac{T}{n} - \frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.}$$

7. (a) Sachant $N=k$, si $|D_n|$ est une somme de $|k-n|$ variables de Bernoulli.
Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k \neq n$, $\mathbb{P}_{N=k}(|D_n| = 0) = p^{|k-n|} \leqslant p$.
Donc, $\boxed{\text{si } n \geqslant k,\ \mathbb{P}_{N=k}(D_n \neq 0) \geqslant 1-p}$

(b) On pose $\alpha = 1$. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|T - S_n| \geqslant \epsilon) = 0$?
Note : on ne peut pas parler de convergence en probabilité, car la loi de T dépend de n
• La question a. est une indication. On va montrer que $\mathbb{P}(D_n \neq 0)$ ne tend pas vers 0.
En effet si $\varepsilon \in]0,1[$, comme la variable D_n est à valeur dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(|T-S_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(D_n \neq 0)$
• $\mathbb{P}(D_n \neq 0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{N=k}(D_n \neq 0)\mathbb{P}(N=k) \geqslant \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{+\infty} \mathbb{P}_{N=k}(D_n \neq 0)\mathbb{P}(N=k) \geqslant \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{+\infty} p\mathbb{P}(N=k)$
$\mathbb{P}(D_n \neq 0) \geqslant (1-p)\mathbb{P}(N \neq n)$
• $\mathbb{P}(N \neq n) = 1 - \dfrac{\exp(-n)n^n}{n!}$. D'après Stirling, $\dfrac{\exp(-n)n^n}{n!} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(N \neq n) = 1$
• Par contraposée du théorème d'encadrement $\mathbb{P}(|T-S_n| \geqslant \varepsilon)$ ne tend pas vers 0
• Si $\alpha \geqslant 1$, $n^\alpha\left|\dfrac{T}{n} - \dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant n\left|\dfrac{T}{n} - \dfrac{S_n}{n}\right|$, donc $\mathbb{P}\left(n^\alpha\left|\dfrac{T}{n} - \dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \geqslant \mathbb{P}\left(n\left|\dfrac{T}{n} - \dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)$, et donc

$$\boxed{\text{Si } \varepsilon \in]0,1[\text{ et } \alpha \geqslant 1,\ \mathbb{P}\left(n^\alpha\left|\frac{T}{n} - \frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \text{ ne tend pas vers 0 quand } n \to +\infty}$$

Exercice sans préparation S7

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que la suite $(2u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite ℓ. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.
Indication : on peut commencer par le cas $\ell = 0$.

Solution :

On note $(v_n)_{n\geqslant 0} = (2u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$
• Supposons que (v_n) converge vers 0.
On a

$$u_n = \frac{v_{n-1}+u_{n-1}}{2}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} |u_n| &\leqslant \frac{|v_{n-1}|}{2} + \frac{|u_{n-1}|}{2} \\ &\leqslant \frac{|v_{n-1}|}{2} + \frac{|v_{n-2}|}{2^2} + \frac{|u_{n-2}|}{2^2} \\ &\leqslant \frac{|v_{n-1}|}{2} + \frac{|v_{n-2}|}{2^2} + \cdots + \frac{|v_m|}{2^{n-m}} + \frac{|u_m|}{2^{n-m}} \end{aligned}$$

Soit $]-\varepsilon,\varepsilon[$ un intervalle ouvert autour de 0.
• Il existe $m \geqslant 1$ tel que $v_n \in]-\varepsilon/2, \varepsilon/2[$ pour $n \geqslant m$.
On a alors $\dfrac{|v_{n-1}|}{2} + \dfrac{|v_{n-2}|}{2^2} + \cdots + \dfrac{|v_m|}{2^{n-m}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-m}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$
• De plus, pour m ainsi fixé, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_m|}{2^{n+1-m}} = 0$
il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on a $\dfrac{|u_m|}{2^{n+1-m}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Pour $n \geqslant \max(n_0, n)$ on a bien $|u_n| \leqslant \varepsilon$
$\boxed{\text{Si } (v_n) \text{ converge vers } 0\text{, alors } (u_n) \text{ converge vers } 0.}$

Si (v_n) converge vers ℓ. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - \ell$, et l'on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$2w_{n+1} - w_n = 2u_{n+1} - u_n - \ell$.
$(2w_{n+1} - w_n)$ converge vers 0, ce qui implique avec ce que l'on a montré que (w_n) converge vers 0 et par suite que (u_n) converge vers ℓ.
$\boxed{\text{Si } (v_n) \text{ converge vers } \ell\text{, alors } (u_n) \text{ converge vers } \ell.}$

SUJET S8

Exercice principal S8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle ici polynôme trigonométrique d'ordre n une fonction à valeurs réelles de la forme

$$f(\theta) = 1 + \lambda_1 \cos(\theta) + \mu_1 \sin(\theta) + ... + \lambda_n \cos(n\theta) + \mu_n \sin(n\theta)$$

avec $(\lambda_n, \mu_n) \neq (0,0)$.

1. Enoncer les formules trigonométriques donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
2. Soit $\omega = \dfrac{2\pi}{n+1}$. Montrer que
$$f(0) + f(\omega) + f(2\omega) + ... + f(n\omega) = n+1.$$
On admet que l'on aurait de même $f(0) + f(-\omega) + f(-2\omega) + ... + f(-n\omega) = n+1$
3. On suppose dans toute la suite que g est un polynôme trigonométrique d'ordre n prenant toujours des valeurs positives.

   Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$.
   Montrer que la fonction $\tilde{g} : \theta \to g(\theta + \theta_0)$ est aussi un polynôme trigonométrique qui a les mêmes propriétés que g.
4. Montrer que $g(\theta) \leq n+1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
5. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $2n$ tel que
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad g(\theta) = e^{-in\theta} P(e^{i\theta}). \tag{1}$$
6. On suppose que $g(0) = n+1$. Montrer que dans ce cas, le polynôme P vérifiant (1) possède $2n$ racines à déterminer en fonction de $e^{i\omega}$. Montrer que P est alors uniquement déterminé.
7. Montrer que
$$g(\theta) = \frac{1}{n+1} |1 + e^{i\theta} + ... + e^{in\theta}|^2.$$
8. On suppose qu'il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(\theta_0) = n+1$. Que devient le résultat précédent ?

Solution :

1. cours programme ECS1 page 7
2. On utilise une somme géométrique et une inversion de somme

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f(k\omega) &= \sum_{k=0}^{n} \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos(kj\omega) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \sin(kj\omega)\right) \\ &= (n+1) + \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(kj\omega)\right) + \mu_j \left(\sum_{k=1}^{n} \sin(kj\omega)\right)\right)\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikj\omega} = \sum_{k=1}^{n} \left(\exp\left(\frac{2i\pi j}{n+1}\right)\right)^k = \frac{1 - \exp(2i\pi j)}{1 - \exp\left(\frac{2i\pi j}{n+1}\right)} = 0$

(somme géométrique de raison différente de 1 car $\dfrac{2\pi j}{n+1} \in]0, 2\pi[$ pour $j \in [|1, n|]$)

Ainsi la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme sont nulles, on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k\omega) = n+1}$$

3. On utilise les formules trigonométriques, qui donne pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{g}(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos(k\theta_0) + \mu_k \sin(k\theta_0)) \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{n} (-\lambda_k \sin(k\theta_0) + \mu_k \cos(k\theta_0)) \sin(k\theta)$$

La positivité de $\tilde{g}$ est évidente.

$\boxed{\tilde{g} \text{ est aussi un polynôme trigonométrique d'ordre } n \text{ positif sur } \mathbb{R}}$

4. Grâce aux questions précédentes, comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g(k\omega) = n+1$, et que tous les termes sont positifs, , $\boxed{g(0) \leqslant n+1}$

Puis, pour $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}(0) = g(\theta_0) \leq n+1$.

$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ g(\theta) \leqslant n+1}$

5. On utilise le fait que $\cos(k\theta) = \dfrac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2}$ et $\sin(k\theta) = \dfrac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i}$.

Ainsi $g(\theta) = \exp(-in\theta) \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{\mu_k}{2i} \right) (e^{i\theta})^{n+k} + \exp(in\theta) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda_k}{2} - \frac{\mu_k}{2i} \right) (e^{i\theta})^{n-k} + (e^{i\theta})^n \right)$

On a un polynôme en $e^{i\theta}$ de coefficient dominant $\left(\dfrac{\lambda_n}{2} + \dfrac{\mu_n}{2i} \right) X^{2n}$, ce terme est non nul car $(\lambda_n, \mu_n) \neq (0,0)$

$\boxed{\text{il existe } P \in \mathbb{C}[X] \text{ de degré } 2n \text{ tel que } \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad g(\theta) = e^{-in\theta} P(e^{i\theta}).}$

On peut aussi remarquer que le terme de degré n du polynôme P vaut X^n.

6. On déduit de la question 2. que $g(\omega) = ... = g(n\omega) = 0$ (car $g(0) = n+1$ et que chacun des termes est positif

On a de même $g(-\omega) = ... = g(-n\omega) = 0$

$\boxed{\text{Le polynôme } P \text{ possède donc } 2n \text{ racines distinctes qui sont } \{e^{\pm i\omega}, e^{\pm 2i\omega}, ...e^{\pm ni\omega}\}.}$

Donc P est un multiple de $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \left((X - e^{ik\omega})(X + e^{-ik\omega}) \right)$

Mais comme on sait que son coefficient de degré n vaut 1, $\boxed{P \text{ est uniquement déterminé.}}$

7. On note $h(\theta) = \dfrac{1}{n+1} \left| 1 + e^{i\theta} + \cdots + e^{in\theta} \right| = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} e^{ij\theta} \overline{\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}}$

$$h(\theta) = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} e^{i(j-k)\theta} \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=-n}^{n} \alpha_m e^{im\theta}$$

où $\alpha_m = \text{card}\{(j,k) \in [|0,n|]^2 \text{ tel que} j - k = m\}$

On a bien $\alpha_0 = n+1$ et $\alpha_m = \alpha_{-m}$

$$h(\theta) = \frac{1}{n+1} \left((n+1) + \sum_{m=1}^{n} \alpha_m (e^{im} + e^{-im}) \right) \text{ avec } \alpha_m \in \mathbb{N}$$

Ainsi, h est bien un polynôme trigonométrique, h est positive et $h(0) = n+1$

$\boxed{\text{Comme la fonction } g \text{ précédente est uniquement déterminée, on a bien } g = h.}$

8. Dans ce cas, on utilise $\tilde{g}$ qui vérifie bien les propriétés et donc $\tilde{g} = h$ et on trouve que

$$\boxed{g(\theta) = \frac{1}{n+1} |1 + z + ... + z^n|^2}$$

avec $z = e^{i(\theta - \theta_0)}$.

Exercice sans préparation S8

On considère la fonction Scilab suivante :

```
function S = simul(p)
stop = 0
n = 0
while stop == 0
    A = grand(1,1,'bin',1,p);
    B = grand(1,1,'bin',1,p);
    n = n+2
    if A <> B then stop = 1
    end
end
S = (n,B)
endfunction
```

On appelle cette fonction avec $p \in]0,1[$

On considère une suite de variable aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que pour $k \in \mathbb{N}^*$, X_k donne le résultat du k-ième appel de `grand(1,1,'bin',1,p)` s'il a lieu.

1. On note alors (N, Y) le couple de variable aléatoire renvoyé par l'appel de la fonction. Ces variables sont-elle correctement définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
2. Déterminer la loi de Y.

Solution :

1. N détermine le nombre d'appels de `grand(1,1,'bin',1,p)`, donc le nombre de variable $X_1, ...X_N$ considérées.
   On peut constater que N est pair, et que on a $N = 2k$ si et seulement si $\forall j \in [|1, k-1|]$ $X_{2j-1} \neq X_{2j}$ et $X_{2k-1} = X_{2k}$
   $(N = 2k) = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{k-1} \{X_{2j-1} = X_{2j}\} \cap \{X_{2k} \neq X_{2k-1}\}$
   Ainsi on calcule $\boxed{\mathbb{P}(N = 2k) = (p^2+q^2)^{k-1}(2pq)}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$
   On peut vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = 2k) = 1$ (par le calcul, on en constatant que $\dfrac{1}{2}N$ suit une loi géométrique de paramètre $2pq \in]0,1[$)
   $\boxed{\text{La boucle s'arrête presque sûrement}}$, on peut donc presque sûrement définir le couple de variable aléatoire. (et l'on a la loi de N au passage)
2. Y suit une loi de Bernoulli. On peut voir ici sans calcul que $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 0)$
   Sinon, avec la formule des probabilités totales :
   $\mathbb{P}(Y = 1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = 2k\} \cap \{Y = 1\})$
   $\{N = 2k\} \cap \{Y = 1\} = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{k-1} \{X_{2j-1} = X_{2j}\} \cap \{X_{2k-1} = 0\} \cap \{X_{2k} = 1\}$
   Ainsi $\mathbb{P}(Y = 1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (p^2+q^2)^{k-1} pq = \frac{1}{2}$ et $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$

Question bonus : quel est l'intérêt de cet algorithme ?
Simuler une pièce équilibrée lorsque l'on a une pièce biaisé, et donc être certain de faire un tirage équitable.
Question bonus 2 : calculer $\mathrm{Cov}(N, Y)$: les variables sont indépendantes, la covariance est nulle.
Question bonus 3 : $\rho(Y, X_{N-1})$? $Y = 1 - X_{N-1}$, le coefficient de corrélation linéaire vaut -1.

SUJET S9

Exercice principal S9

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique de E.

u étant symétrique, on note $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres associées, et l'on suppose que :

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n.$$

1. Question de cours : caractérisations des fonctions es de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.
2. Justifier que u est inversible et montrer alors que :
$$\forall x \in E \quad \langle u(x);\ x\rangle\langle u^{-1}(x);\ x\rangle \leqslant \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\,||x||^4$$
3. On pose $\alpha = \sqrt{\lambda_1\lambda_n}$. Soit alors $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{x}$.
   (a) Montrer que f_α est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) En déduire que :
$$\forall x \in [\lambda_1, \lambda_n] \quad f_\alpha(x) \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}$$
4. (a) Montrer que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$
   (b) En déduire que :
$$\forall x \in E \quad \sqrt{\langle u(x);\ x\rangle\langle u^{-1}(x);\ x\rangle} \leqslant \frac{1}{2}\langle \frac{1}{\alpha}u(x) + \alpha u^{-1}(x);\ x\rangle$$
   (c) Conclure que :
$$\forall x \in E \quad \langle u(x);\ x\rangle\langle u^{-1}(x);\ x\rangle \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 ||x||^4$$
   Comparer avec le résultat de la question 2.

Solution :

1. Question de cours : programme ECS1 2013 p. 21.
2. Les valeurs propres de u sont toutes non nulles par hypothèse et donc $\boxed{u \text{ est inversible.}}$
   De plus le théorème spectral donne que u est diagonalisable en base orthonormée, ce qui signifie exactement que l'on peut trouver une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.
   On décompose x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Alors la base étant formée de vecteurs propres de u : $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$, puis, la base étant orthonormée :
$$\langle u(x);\ x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_n\,||x||^2$$
   par définition de λ_n.
   De même u^{-1} est également symétrique et ses valeurs propres sont alors $\lambda_1^{-1} \geqslant \lambda_2^{-1} \geqslant \ldots \lambda_n^{-1} > 0$ donc pour $x \in E$:
$$\langle u^{-1}(x);\ x\rangle \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\,||x||^2$$

puis de manière immédiate en multipliant membre à membre les deux inégalités obtenues :

$$\boxed{\forall x \in E \quad \langle u(x);\ x\rangle\langle u^{-1}(x);\ x\rangle \leqslant \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\,||x||^4\,.}$$

3. (a) La fonction f_α est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour $x > 0$:

$$f_\alpha'(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{x^2}$$

Comme $\alpha > 0$, il est immédiat que f_α' est croissante et donc, par la caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^1$ convexe, on en déduit que $\boxed{f_\alpha \text{ est convexe}}$.

(b) Si $x \in [\lambda_1, \lambda_n]$, alors il existe $t \in [0,1]$ tel que $x = (1-t)\lambda_1 + t\lambda_n$. Alors par convexité de f_α :

$$f_\alpha(x) \leqslant (1-t)f_\alpha(\lambda_1) + tf_\alpha(\lambda_n)$$

Or $f_\alpha(\lambda_1) = f_\alpha(\lambda_n) = \sqrt{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}}$ d'où finalement :

$$\boxed{f_\alpha(x) \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}}$$

4. (a) Il suffit de remarquer que, pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$:

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \iff \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0$$

(b) Pour $x \in E$, on peut calculer :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\langle u(x);\ x\rangle\langle u^{-1}(x);\ x\rangle} &= \sqrt{\langle\frac{1}{\alpha}u(x);\ x\rangle\langle\alpha u^{-1}(x);\ x\rangle} \text{ par linéarité}\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\langle\frac{1}{\alpha}u(x);\ x\rangle + \langle\alpha u^{-1}(x);\ x\rangle\right) \text{ par la question précédente}\\
&\leqslant \boxed{\frac{1}{2}\langle\frac{1}{\alpha}u(x) + \alpha u^{-1}(x);\ x\rangle} \text{ par linéarité}
\end{aligned}$$

(c) L'endomorphisme $\dfrac{1}{\alpha}u + \alpha u^{-1}$ est symétrique et la base $\mathcal{B}$ est formée de vecteurs propres pour cet endomorphisme puisque :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\frac{1}{\alpha}u + \alpha u^{-1}\right) = \mathrm{Diag}\left(f_\alpha(\lambda_1), f_\alpha(\lambda_2), \ldots, f_\alpha(\lambda_n)\right)$$

Alors, par un calcul analogue à celui de la première question si $x \in E$ se décompose dans E en $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors :

$$\langle\frac{1}{\alpha}u(x) + \alpha u^{-1}(x);\ x\rangle = \sum_{i=1}^{n} f_\alpha(\lambda_i)x_i^2$$

Or, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \in [\lambda_1, \lambda_n]$ et donc, par la question 3.(b) :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad f_\alpha(\lambda_i) \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}$$

On en déduit que :

$$\langle\frac{1}{\alpha}u(x) + \alpha u^{-1}(x);\ x\rangle \leqslant \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)||x||^2$$

puis finalement, avec l'inégalité de la question précédente, en l'élevant au carré :

$$\boxed{\langle u(x);\ x\rangle\langle u^{-1}(x);\ x\rangle \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 ||x||^4}$$

$\boxed{\text{L'inégalité obtenue à cette question est meilleure qu'à la question 2.(c).}}$ En effet, en raisonnant par équivalence :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}+\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \leqslant \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}+2+\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) \leqslant \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_n}+2 \leqslant 3\frac{\lambda_n}{\lambda_1}
\end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité est vraie car $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n} \leqslant 1 \leqslant \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$.

On peut en fait montrer, via un calcul de multiplicateurs de Lagrange, que l'inégalité obtenue en 4.(c) est optimale et qu'il existe des points de E pour lesquels c'est une égalité.

Exercice sans préparation S9

On considère deux jeux de dés décrits par le programme Scilab suivant (répétés ici 10000 fois) :

```
Njeux=10000;
compteur1=0;compteur2=0;
for i=1:Njeux
  jeux1=floor(6*rand(4,1)+1);
  if (jeux1(1)==6)|(jeux1(2)==6)|(jeux1(3)==6)|(jeux1(4)==6) then
       compteur1=compteur1+1;
  end
  ok2=0;
  for j=1:24
     if floor(6*rand(2,1)+1)==[6;6] then
        ok2=1;
     end
  end
  compteur2=compteur2+ok2;
end
disp(compteur1/Njeux)
disp(compteur2/Njeux)
```

1. En quoi consistent ces deux jeux ?
2. Les deux résultats affichés par le programme, une fois exécuté, sont deux valeurs très proches de 0.5, l'une étant supérieure légèrement à 0.5 et l'autre inférieure légèrement. Donner une expression exacte de ces deux valeurs (correspondant à des probabilités de succès aux deux jeux).
3. Compléter le code afin de tracer la convergence en fonction du nombre de parties jouées vers cette valeur moyenne.

Solution :

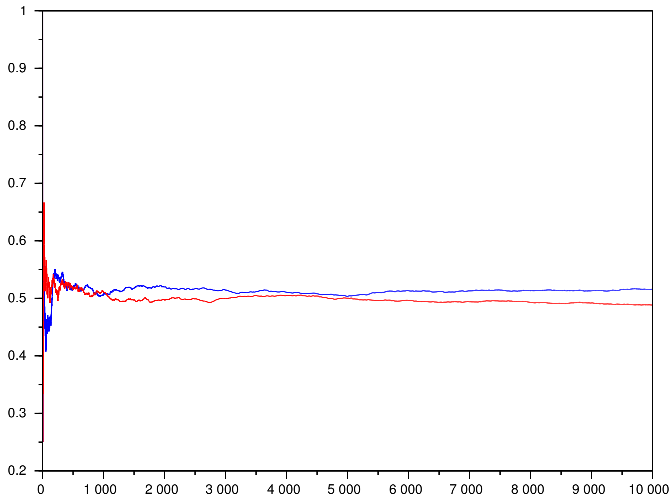
1. Le premier jeu consiste à parier sur la sortie d'un 6 au cours de 4 lancers de dés. Le second jeu consiste à parier sur la sortie d'un double 6 au cours de 24 lancers de deux dés simultanément.
2. La valeur exacte de la première probabilité est $\boxed{1-\left(\frac{5}{6}\right)^4}$ (0.517 environ) et la seconde est égale à $\boxed{1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}}$ (0.491 environ).
3. On rajoute les trois lignes (avant, dans et après la boucle respectivement) :

   ```
   P1=[];P2=[];

   P1(i)=compteur1/i;  P2(i)=compteur2/i;

   plot(1:Njeux,P1,'b-');plot(1:Njeux,P2,'r-')
   ```

   Note : les arguments `'b-'` et `'r-'` ne sont pas exigibles des étudiants.
   On trouve par exemple :



1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0
1 000
2 000
3 000
4 000
5 000
6 000
7 000
8 000
9 000
10 000

SUJET S10

Exercice principal S10

Soit $\theta \in]0, \pi[$ fixé.
On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathscr{B} = (u, v)$.
Pour tous vecteurs $x = x_1 u + x_2 v$ et $y = y_1 u + y_2 v$ de E (avec $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$), on note :

$$\Phi(x, y) = x_1 y_1 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\cos(\theta) + x_2 y_2.$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. **Question de cours :** Développement de $\|a + b\|^2$ lorsque a et b sont deux vecteurs d'un même espace vectoriel euclidien, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\| \cdot \|$.

2. (a) Montrer que Φ définit un produit scalaire sur E.
   On notera $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.
   (b) Calculer $\|u\|$, $\|v\|$ et $\Phi(u, v)$.

3. Montrer que pour tout vecteur x de E, on a :
$$\|f(x)\| = \|x\|.$$

4. En déduire que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.
5. f est elle diagonalisable ?
6. On note $w = \dfrac{v - \cos(\theta) u}{\sin(\theta)}$.
   Montrer que $\mathscr{B}_0 = (u, w)$ est une base orthonormée de E (pour le produit scalaire Φ) et déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}_0$.

Solution :

1. Pour a et b vecteurs de E, on a : $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2\langle a, b \rangle + \|b\|^2$. Programme ECS2 page 7.
2. (a) • On a clairement $\forall (x, y) \in E^2,\ \Phi(x, y) = \Phi(y, x)$, donc Φ est symétrique.
   De plus, pour $x = x_1 u + x_2 v$, $y = y_1 u + y_2 v$, $z = z_1 u + z_2 v$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda x + z, y) &= (\lambda x_1 + z_1) y_1 + ((\lambda x_1 + z_1) y_2 + (\lambda x_2 + z_2) y_1)\cos(\theta) + (\lambda x_2 + z_2) y_2 \\ &= \lambda\left(x_1 y_1 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\cos(\theta) + x_2 y_2\right) + \left(z_1 y_1 + (z_1 y_2 + z_2 y_1)\cos(\theta) + z_2 y_2\right) \\ &= \lambda \Phi(x, y) + \Phi(z, y)\end{aligned}$$

   Ainsi Φ est linéaire par rapport à la 1ère variable, et puisque Φ est symétrique, Φ est bilinéaire.
   • Soit $x = x_1 u + x_2 v \in E$. On a :

$$\begin{aligned}\Phi(x, x) &= (x_1)^2 + 2\cos(\theta) x_1 x_2 + (x_2)^2 \\ &= (x_1 + \cos(\theta) x_2)^2 - \cos^2(\theta)(x_2)^2 + (x_2)^2 \\ &= (x_1 + \cos(\theta) x_2)^2 + \underbrace{(1 - \cos^2(\theta))}_{>0}(x_2)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

- De plus, une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul, donc, pour toué t$x \in E$,

$$\Phi(x,x)=0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1+\cos(\theta)x_2=0 \\ (1-\cos^2(\theta))x_2=0 \end{array} \right. \overset{1-\cos^2(\theta)\neq 0}{\Longleftrightarrow} x_1=x_2=0 \Longleftrightarrow x=0$$

Ainsi, Φ est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc $\boxed{\Phi \text{ définit un produit scalaire sur } E.}$

(b) On a clairement $\boxed{\|u\|=1=\|v\| \text{ et : } \Phi(u,v)=\cos(\theta).}$

3. Soit $x=x_1u+x_2v$. Alors remarquons déjà que :

$$\|x\|^2=\|x_1u+x_2v\|^2=(x_1)^2\|u\|^2+2x_1x_2\Phi(u,v)+(x_2)^2\|v\|^2=(x_1)^2+2x_2x_2\cos(\theta)+(x_2)^2$$

En représentant x dans la base $\mathscr{B}$ par la matrice colonne $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, le vecteur $f(x)$ est représenté dans la base $\mathscr{B}$ par :

$$MX=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1+2\cos(\theta)x_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $f(x)=(-x_2)u+(x_1+2\cos(\theta)x_2)v$
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|^2 &= (-x_2)^2\|u\|^2+2(-x_2)(x_1+2\cos(\theta)x_2)\Phi(u,v)+(x_1+2\cos(\theta)x_2)^2\|v\|^2 \\
&= (x_2)^2+2(-x_2)(x_1+2\cos(\theta)x_2)\cos(\theta)+(x_1+2\cos(\theta)x_2)^2 \\
&= (x_2)^2-2x_1x_2\cos(\theta)-4(x_2)^2\cos^2(\theta)+(x_1)^2+4x_1x_2\cos(\theta)+4\cos^2(\theta)(x_2)^2 \\
&= (x_1)^2+2x_1x_2\cos(\theta)+(x_2)^2 \\
&= \|x\|^2
\end{aligned}$$

Comme les normes sont positives, on a bien que : $\boxed{\text{Pour tout } x \in E,\ \|f(x)\|=\|x\|.}$

4. Si f admet une valeur propre λ, alors il existe un réel x non nul tel que $f(x)=\lambda x$.
Mais alors :

$$\|f(x)\|=\|x\| \Longrightarrow \|\lambda x\|=\|x\| \Longrightarrow |\lambda|\cdot\|x\|=\|x\|$$

Or, x est non nul, donc $\|x\|\neq 0$, d'où $|\lambda|=1$, ainsi : $\lambda\in\{-1,1\}$.
Ainsi :

$$\boxed{Sp(f)\subset\{-1,1\}}$$

5. λ est valeur propre de f ssi $M-\lambda I_2$ non inversible ssi $P(\lambda)=\lambda^2-2\cos(\theta)\lambda+1=0$

$$P(1)=2(1-\cos(\theta)) \text{ et } P(-1)=2(1+\cos(\theta))$$

Comme $\theta\in]0,\pi[$, ni 1, ni -1 sont valeurs propres.
Le spectre est vide et $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

6. On a déjà vu que $\|u\|=1$ donc u est bien normé.
De plus,

$$\Phi(u,w)=\Phi\left(u,\frac{v-\cos(\theta)u}{\sin(\theta)}\right)=\frac{1}{\sin(\theta)}\Phi(u,v)-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\Phi(u,u)=\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}=0$$

Donc u et w sont bien orthogonaux.
Enfin, on a :

$$\|w\|^2=\Phi(w,w)=\frac{\|v-\cos(\theta)u\|^2}{\sin^2(\theta)}=\frac{\|v\|^2-2\cos(\theta)\Phi(u,v)+\cos^2(\theta)\|u\|^2}{\sin^2(\theta)}=\frac{1-\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}=1$$

Ainsi, on a bien $\|w\|=1$, et donc w est bien normé.

Les vecteurs u et w étant orthogonaux et non nuls (de norme 1), ils forment une famille libre, de cardinal $2=\dim(E)$, $\boxed{\text{donc } \mathscr{B}_0=(u,w) \text{ forme bien une base de } E \text{ qui est orthonormée.}}$

Remarquons que puisque $w=\dfrac{v-\cos(\theta)u}{\sin(\theta)}$, on a $\sin(\theta)w=v-\cos(\theta)$, d'où :

$$f(u)=v=\cos(\theta)u+\sin(\theta)w$$

et

$$
\begin{aligned}
f(w) &= f\left(\frac{v-\cos(\theta)u}{\sin(\theta)}\right) \\
&= \frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} f(u) + \frac{1}{\sin(\theta)} f(v) \\
&= \frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} v + \frac{1}{\sin(\theta)}\left(-u + 2\cos(\theta)v\right) \\
&= \frac{-1}{\sin(\theta)} u + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} v \\
&= \frac{-1}{\sin(\theta)} u + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\left(\cos(\theta)u + \sin(\theta)w\right) \\
&= \frac{\cos^2(\theta)-1}{\sin(\theta)} u + \cos(\theta)w \\
&= -\sin(\theta)u + \cos(\theta)w
\end{aligned}
$$

Donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}_0$ est :

$$
\boxed{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}
$$

Exercice sans préparation S10

On considère pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire Z_n qui est simulée dans la fonction Scilab ci-dessous.

```
function c = Z(n,lambda)
X = grand(2,n,"exp",1/lambda);
c = 0;
for k = 1:n
if X(1,k) <= X(2,k) then
                c = c+1
                    end
end
c = c/n
```

1. Montrer que la suite de variables aléatoires (Z_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.
2. Pouvez-vous montrer la même convergence en probabilité si on remplace `if X(1,k)<=X(2,k)` par `if X(1,1)<=X(2,k)` dans le script Scilab ?

Solution :

1. Dans le programme, la commande `X=grand(2,n,"exp",1/lambda)` génère deux lignes de n coefficients chacune où chaque composante suit la loi exponentielle de paramètre λ.
   Le vecteur `X` simule donc la matrice aléatoire $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \end{pmatrix}$.
   La fonction compte alors le nombre de colonnes j de la matrice où $X_j \leqslant Y_j$, et renvoie ce compteur divisé par n.
   $$Z_n = \frac{1}{n} W_n \qquad \text{où} \qquad W_n = \operatorname{Card}(j \in [\![1,n]\!] \ / \ X_j \leqslant Y_j)$$
   Notons pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $B_i = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } X_i \leqslant Y_i \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$
   Les variables aléatoires B_i sont toutes indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(X_1 \leqslant Y_1)$, possèdent donc une même espérance p et une même variance $p(1-p)$.
   Comme $Z_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} B_i$, la loi faible des grands nombres affirme que la suite de variables aléatoires (Z_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $\mathbb{E}[B_1] = p = \mathbb{P}(X_1 \leqslant Y_1)$.

   Les variables Y_1 et X_1 étant à densité et indépendantes, la variable aléatoire $Y_1 - X_1$ est une variable aléatoire à densité (dont la densité est donnée par un produit de convolution).
   Ainsi, $\mathbb{P}(Y_1 - X_1 = 0)$. Et par symétrie évidente, on a $\mathbb{P}(X_1 < Y_1) = \mathbb{P}(Y_1 < X_1) = \dfrac{1}{2}$, ainsi, $p = \dfrac{1}{2}$.
   Ainsi, la suite de variables aléatoires (Z_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à $1/2$.
2. En changeant la ligne de code, on peut toujours écrire $Z_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} B_i$ avec des loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ mais les variables B_i ne sont plus indépendantes.
   On peut montrer que (Z_n) ne converge pas en probabilité vers $\dfrac{1}{2}$, mais ce n'est pas évident du tout avec les outils du programme. On va plutôt suggérer de calculer $V(Z_n)$

$$V(Z_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} V(B_i) + \sum_{\substack{1, \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} \mathrm{Cov}(B_i, B_j)\right)$$

Or, $\mathrm{C}ov(B_i, B_j) = \mathbb{E}(B_i B_j) - \mathbb{E}(B_i)\mathbb{E}(B_j)$

$\mathbb{E}(B_i B_j) = \mathbb{P}(Y_i \geqslant X_1 \cap Y_j \geqslant X_1) = \mathbb{P}(X_1 = \min(X_1, Y_i, Y_j))$

Comme les variables $Y_i - X_1$, $Y_j - X_1$ et $Y_j - Y_i$ sont à densité, les cas d'ex-aequo sont de probabilité nulle et donc $\mathbb{P}(X_1 = \min(X_1, Y_i, Y_j)) = \dfrac{1}{3}$

Donc $\mathrm{Cov}(B_i, B_j) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{14} = \dfrac{1}{12}$

Ainsi $\boxed{V(Z_n) = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{n-1}{12n}}$

Comme la variance ne converge pas vers 0, ce n'est pas suffisant pour conclure, Bienaymé-Tchebychev ne nous donne pas la convergence en probabilité.

SUJET S11

Exercice principal S11

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On pose $\{X\} = X - \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor X \rfloor$ désigne la partie entière de X et on note $p = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$ et $q = 1 - p$.

1. Question de cours : définition d'un système complet d'événements.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n) = pq^n$.
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(\lfloor X \rfloor)$ puis celle de $\mathbb{E}(\{X\})$.
3. Montrer que $\{X\}$ est une variable à densité sur $\mathbb{R}$ et donner une densité de la variable.
4. (a) On définit une suite de variable aléatoire $(X_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{n}\right)$. Etudier la convergence en loi de la suite $(\{X_n\})_{n\geqslant 1}$.
   (b) On définit ensuite une suite de variable aléatoire $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n \sim \mathcal{E}(n)$. Etudier la convergence en loi de la suite $(\{Y_n\})_{n\geqslant 1}$.
5. Les variables $\lfloor X \rfloor$ et $\{X\}$ sont-elles indépendantes ?
6. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant toutes deux des lois exponentielles de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = \max(X_1, X_2)$.
   (a) Conditionnellement à l'événement $[\lfloor X_1 \rfloor > \lfloor X_2 \rfloor]$, les variables $\lfloor Y \rfloor$ et $\{Y\}$ sont-elles indépendantes ? Commenter ce résultat.
   (b) Prouver que $\lfloor Y \rfloor$ et $\{Y\}$ ne sont pas indépendantes.

Solution :

1. Question de cours : ESC1 2013 p. 21.
2. (a) Par définition de la partie entière, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n) = \mathbb{P}(n \leqslant X < n+1) = \int_n^{n+1} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)} + \mathrm{e}^{-\lambda n} = pq^n$$

   (b) La variable $\lfloor X \rfloor + 1$ suit donc une loi géométrique de paramètre p d'où :

$$\mathbb{E}(\lfloor X \rfloor + 1) = \frac{1}{p}$$

   puis par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(\lfloor X \rfloor) = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$$

   Enfin, toujours par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(\{X\}) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\lfloor X \rfloor) = \frac{1}{\lambda} - \frac{q}{p}$$

3. La variable $\{X\}$ est à valeurs dans $[0, 1[$. En notant $F_{\{X\}}$ sa fonction de répartition, on a donc : $F_{\{X\}}(t) = 0$ pour $t < 0$ et $F_{\{X\}}(t) = 1$ pour $t \geqslant 1$. Soit maintenant $t \in [0, 1[$. Alors, comme la famille $(\lfloor X \rfloor = n)_{n\geqslant 0}$

forme un système complet d'événements :

$$\begin{aligned}
F_{\{X\}}(t) &= \mathbb{P}(0 \leqslant \{X\} \leqslant t) \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(0 \leqslant \{X\} \leqslant t, \lfloor X \rfloor = n) \\
&= \sum_{n \geqslant 0} P(n \leqslant X \leqslant n+t) \text{ par la question 2.(a)} \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \int_n^{n+t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u} \, \mathrm{d}u \\
&= \sum_{n \geqslant 0} (\mathrm{e}^{-\lambda n} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+t)}) \\
&= (1-\mathrm{e}^{-\lambda t}) \sum_{n \geqslant 0} q^n \\
&= (1-\mathrm{e}^{-\lambda t}) \frac{1}{1-q} \\
&= \boxed{\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$F_{\{X\}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1-\mathrm{e}^{\lambda}} & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

La fonction de répartition de $\{X\}$, continue sur $\mathbb{R}$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \backslash \{0,1\}$, c'est donc une variable à densité et par dérivation de la fonction de répartition sur $\mathbb{R} \backslash \{0,1\}$, on en déduit de manière immédiate qu'une densité pour $\{X\}$ est donnée par la fonction :

$$\boxed{f : t \mapsto \begin{cases} \lambda \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

4. (a) Par les calculs précédents, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition $F_{\{X_n\}}$ de $\{X_n\}$ vérifie, pour $t \in [0,1[$:

$$F_{\{X_n\}}(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-t/n}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{t/n}{1/n} = t$$

et donc, à t fixé dans $[0,1[$, $F_{\{X_n\}}(t) \to t$ quand $n \to +\infty$.

Cela prouve que $\boxed{\text{la suite } (\{X_n\}) \text{ converge en loi vers une loi uniforme sur } [0,1[.}$

(b) Cette fois, pour $t \in [0,1[$:

$$F_{\{Y_n\}}(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-nt}}{1-\mathrm{e}^{-n}} \to 1 \text{ quand } n \to +\infty$$

Comme $F_{\{Y_n\}}(t) = 0$ pour $t < 0$, on en déduit qu'alors :

En tout t de $\mathbb{R}^*$, $F_{\{Y_n\}}(t)$ converge vers $F(t)$ où F est la fonction de répartition d'une variable nulle. Comme F n'est pas continue en 0 :

$\boxed{\text{La suite } (\{Y_n\}) \text{ converge en loi vers la variable certaine égale à 0.}}$ Cela correspond graphiquement au fait que lorsque n tend vers $+\infty$, la densité de Y_n se concentre en 0

5. On a quasiment calculé la loi conjointe de $\lfloor X \rfloor$ et $\{X\}$ à la question 2.(a). Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1[$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n, \{X\} \leqslant t) &= \mathbb{P}(n \leqslant X \leqslant n+t) \\
&= \int_n^{n+t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u} \, \mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda n} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+t)} \\
&= q^n(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}) \\
&= pq^n F_{\{X\}}(t) \\
&= \mathbb{P}((\lfloor X \rfloor = n)\mathbb{P}(\{X\} \leqslant t)
\end{aligned}$$

Et donc, pour $m \in \mathbb{R}$, on a bien :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor \leqslant m, \{X\} \leqslant t) &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\leqslant m}} \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n, \{X\} \leqslant t) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\leqslant m}} \mathbb{P}((\lfloor X \rfloor = n)\mathbb{P}(\{X\} \leqslant t) \\
&= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor \leqslant m)\mathbb{P}(\{X\} \leqslant t)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les variables } \lfloor X \rfloor \text{ et } \{X\} \text{ sont donc indépendantes.}}$

6. (a) L'argument est le suivant : si $\lfloor X_1 \rfloor > \lfloor X_2 \rfloor$ on a à fortiori $X_1 > X_2$. En ce cas : $\lfloor Y \rfloor = \lfloor X_1 \rfloor$ tandis que $\{Y\} = \{X_1\}$. Or $\lfloor X_1 \rfloor$ et $\{X_1\}$ sont indépendantes. La réponse semble donc être oui.
Plus précisément :
$\mathbb{P}_{[\lfloor X_1 \rfloor < \lfloor X_2 \rfloor]}(\lfloor Y \rfloor = k) = \mathbb{P}(\lfloor X_2 \rfloor] = k)$ tandis que $\mathbb{P}_{[\lfloor X_1 \rfloor < \lfloor X_2 \rfloor]}(\{Y\} \leqslant t) = \mathbb{P}(\{X_2\} \leqslant t)$ et enfin : $\mathbb{P}_{[\lfloor X_1 \rfloor < \lfloor X_2 \rfloor]}(\lfloor Y \rfloor = k, \{Y\} \leqslant t) = \mathbb{P}(\lfloor X_2 \rfloor = k, \{X_2\} \leqslant t)$.ce qui nous ramène bien à la propriété d'indépendance citée.

$\boxed{\text{Conditionnellement à } [\lfloor X_1 \rfloor < \lfloor X_2 \rfloor],\ \lfloor Y \rfloor \text{ et } \{Y\} \text{ sont indépendantes.}}$

On a aussi, par symétrie l'indépendance de $\lfloor Y \rfloor$ et $\{Y\}$ conditionnellement à $[\lfloor X_1 \rfloor > \lfloor X_2 \rfloor]$
Compte-tenu du fait que $\lfloor Y \rfloor$ et $\{Y\}$ ne sont pas indépendantes, ce qui peut a priori sembler contre-intuitif, le résultat ci-dessus nous permet de préciser en un sens d'où vient l'absence d'indépendance : du fait que les variables X_1 et X_2 peuvent avoir la même partie entière.

(b) On détermine rapidement les lois de Y, $\lfloor Y \rfloor$ et $\{Y\}$.
Par indépendance de X_1 et X_2, pour $t \geqslant 0$, en notant F_Y la fonction de répartition de Y :

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leqslant t) = \mathbb{P}(Y_1 \leqslant t)\mathbb{P}(Y_2 \leqslant t) = (1 - e^{-\lambda t})^2 = (1 - q^t)^2$$

où l'on note toujours $q = e^{-\lambda}$.
De même, pour $k \in \mathbb{N}$, puisque $\lfloor Y \rfloor = \max(\lfloor X_1 \rfloor, \lfloor X_2 \rfloor)$ et que X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\lfloor Y \rfloor = k) &= \mathbb{P}(k \leqslant Y < k+1) \\
&= \mathbb{P}(Y < k+1) - \mathbb{P}(Y < k) \\
&= F_Y(k+1) - F_Y(k) \quad (F_Y \text{ est continue .}) \\
&= (1 - q^{k+1})^2 - (1 - q^k)^2
\end{aligned}$$

Enfin, par un calcul analogue à celui de la question 3.(a), pour $t \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned}
F_{\{Y\}}(t) &= \mathbb{P}(0 \leqslant \{Y\} < t) \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(k \leqslant Y < k+t) \\
&= \sum_{k\geqslant 0} (F_Y(k+t) - F_y(k)) \quad (F_Y \text{ est continue .}) \\
&= \sum_{k\geqslant 0} (1 - q^{k+t})^2 - (1 - q^k)^2 \\
&= \sum_{k\geqslant 0} (q^k - q^{k+t})(2 - q^k - q^{k+t}) \\
&= \sum_{k\geqslant 0} 2(1 - q^t)q^k - (1 - q^{2t})q^{2k} \\
&= 2\frac{1 - q^t}{1 - q} - \frac{1 - q^{2t}}{1 - q^2}
\end{aligned}$$

Enfin, pour étudier l'indépendance, il reste à calculer, pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\lfloor Y \rfloor = k, \{Y\} \leqslant t) &= \mathbb{P}(k \leqslant Y \leqslant k+t) \\
&= (1 - q^{t+k})^2 - (1 - q^k)^2
\end{aligned}$$

Supposons que l'égalité $\mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = k, \{Y\} \leqslant t) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = k)\mathbb{P}(\{Y\} \leqslant t)$ ait lieu pour tout $t \in]0, 1[$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On aurait alors, en posant $k = 0$, pour tout $t \in]0,1[$

$$(1-q^t)^2 = p^2 \frac{2(1-q^t)-(1+q)(1-q^{2t})}{(1-q)(1+q)} = \frac{(p\left(2(1-q^t)-(1+q)(1-q^{2t}\right)}{1+q}$$

L'égalité est équivalente à $(1+q)(1-q^t)^2 = p\left(2(1-q^t)-(1+q)(1-q^{2t})\right)$. Comme q^t prend une infinité de de valeurs quand $t \in]0,1[$, on peut alors identifier des polynômes :

On a alors $(1+q)(X-1)^2 = p\left((1-X)+(1+q)(1-X^2)\right)$.

C'est absurde, il suffit de considérer le terme en X^2.

$\boxed{\text{Ainsi les variables } \lfloor Y \rfloor \text{ et } \{Y\} \text{ ne sont donc pas indépendantes.}}$

Exercice sans préparation S11

Soit u_0 une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant le système

$$(S) \quad \begin{cases} \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \ \partial_1 u(x,t) + \partial_2 u(x,t) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $f_{y_0} : y \mapsto u(y + y_0, y)$ est constante sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que (S) admet une unique solution qu'on exprimera en fonction de u_0.

Solution :

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. La fonction f_{y_0} est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \ f'_{y_0}(y) = \partial_1 u(y + y_0, y) + \partial_2 u(y + y_0, y) = 0.$$

$\boxed{\text{La fonction } f_{y_0} \text{ est donc constante sur } \mathbb{R}.}$

2. D'après la question précédente,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \ u(x,t) = u(t + (x-t), t) = f_{x-t}(t) = f_{x-t}(0) = u(x-t, 0) = u_0(x-t).$$

On ainsi démontré que si u est solution de (S) alors u est la fonction $(x,t) \mapsto u_0(x-t)$.
Réciproquement, il est facile de vérifier que la fonction $(x,t) \mapsto u_0(x-t)$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et vérifie (S).

$\boxed{(S) \text{ admet comme unique solution } (x,t) \mapsto u_0(x-t).}$

SUJET S12

Exercice principal S12

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : donner la définition d'une fonction convexe.
2. Soit X une variable aléatoire réelle centrée telle que $|X| \leqslant 1$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in [-1,1],\ e^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$
   (b) En déduire les inégalités suivantes :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(\exp(tX)\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$
3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et centrées telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|X_n| \leqslant c_n$ (où $c_n > 0$) .
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(\exp(tS_n)\right) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \forall t > 0,\ \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right).$$
   (c) En déduire que :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right).$$
   (d) Montrer alors l'inégalité suivante :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right).$$

Solution :

1. Programme ECS 1 (page 20)
2. (a) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1,1]$. Puisque la fonction exp est convexe et puisque :
   $$\frac{1-x}{2} \in [0,1],\ \frac{1+x}{2} \in [0,1] \text{ et } \frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{2} = 1,$$
   il vient que :
   $$\boxed{\frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t} \geqslant \exp\left(\frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2}t\right) = e^{tx}.}$$

(b) Puisque X est une variable aléatoire bornée, elle admet une espérance. D'après la question précédente, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tX) \leqslant \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^{t}.$$

Par croissance de l'espérance, on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(\exp(tX)\right) \leqslant \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Remarquons que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N},\ (2n)! \geqslant 2^n n!$ (peut se prouver par récurrence), donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(\exp(tX)\right) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).}$$

3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et centrées telles que $|X_n| \leqslant c_n$ (où $c_n > 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\exp(tS_n) = \exp(tX_1)\ldots\exp(tX_n)$ et puisque les variables aléatoires $\exp(tX_1),\ \ldots,\exp(tX_n)$ sont indépendantes, $\exp(tS_n)$ admet une espérance (les X_k sont bornés donc admettent une espérance, donc les $\exp(tX_k)$ aussi) et :

$$\mathbb{E}\left(\exp(tS_n)\right) = \mathbb{E}\left(\exp(tX_1)\right)\ldots\mathbb{E}\left(\exp(tX_n)\right).$$

En appliquant la formule précédente à toutes les variables aléatoires $\frac{X_k}{c_k}$ (elles sont bien centrées et bornées par 1), on trouve :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{E}\left(\exp\left(tX_k\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left((tc_k)\frac{X_k}{c_k}\right)\right) \leqslant \exp\left(\frac{t^2c_k^2}{2}\right).$$

On en déduit le résultat en multipliant ces n inégalités.

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\exp(tS_n)\right) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n}c_k^2\right).}$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Remarquons que $[S_n > \varepsilon] \subset [\exp(tS_n) \geqslant \exp(t\varepsilon)]$ par croissance de exp sur $\mathbb{R}_+^*$. L'inégalité de Markov ($\exp(tS_n) \geqslant 0$) assure que :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}\left(\exp(tS_n) \geqslant \exp\left(t\varepsilon\right)\right) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n}c_k^2\right).}$$

(c) L'étude de la fonction du second degré $f : t \mapsto at^2 - \varepsilon t$ où $a = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}c_k^2$ montre qu'elle atteint un minimum en $t = \frac{\varepsilon}{2a}$ Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(f\left(\frac{\varepsilon}{2a}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4a}\right) = \boxed{\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n}c_k^2}\right)}.$$

(d) Puisque les $-X_k$ vérifient les mêmes propriétés que les X_k, la propriété précédente est encore vraie en remplaçant la variable aléatoire S_n par $-S_n$. Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n > \varepsilon) \boxed{\leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n}c_k^2}\right)}.$$

Exercice sans préparation S12

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r avec $0 \leqslant r < n$.

Déterminer le plus petit entier p tel qu'il existe une matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang p telle que $A+B$ soit inversible.

Solution :

Réponse $p = n - r$

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r.

Il existe donc une famille libre de r colonnes de A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, notons-les $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_r}$. avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_r}))$$

D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille $(C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_r})$ en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe donc des colonnes $C'_{r+1}, C'_{r+2}, \ldots, C'_n$ telles que :

$$(C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_r}, C'_{r+1}, C'_{r+2}, \ldots, C'_n) \quad \text{soit une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Pour obtenir une matrice B de rang $n-r$ telle que $A+B$ soit de rang n, il suffit de prendre une matrice B ayant des colonnes nulles en positions $i_1, i_2, \ldots, i_r$, et sur $n-r$ autres colonnes quelconques placer des colonnes de type $C'_k - C_k$ où C_k est la colonne k de A, et C'_k est la colonne issue de la base précédente, les $n-r$ colonnes restantes étant nulles.

La matrice $M + M'$ aura alors parmi ses colonnes exactement n colonnes qui forment une famille libre donc $A+B$ est de rang n.

• Soit B est une matrice de rang strictement inférieur à $n-r$. Si l'on note f et g les applications linéaires induites par A et B dans la base canonique

$\mathrm{Im}\ (f+g) \subset \mathrm{Im}\ (f) + \mathrm{Im}\ (g)$ (Si $y \in \mathrm{Im}\ (f+g)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x) + g(x) \in \mathrm{Im}\ (f) + \mathrm{Im}\ (g)$

Ainsi $\dim(\mathrm{Im}\ (f+g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\ (f) + \mathrm{Im}\ (g)) = \dim(\mathrm{Im}\ (f)) + \dim(\mathrm{Im}\ (g)) - \dim(\mathrm{Im}\ (f) \cap \mathrm{Im}\ (g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\ (f)) + \dim(\mathrm{Im}\ (g))$

On obtient donc que $\mathrm{rg}(A+B) \leqslant \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) < n$, donc $A+B$ n'est pas inversible.

• Conclusion $\boxed{\text{Le rang minimal de } B \text{ pour que } A+B \text{ soit inversible vaut } n-r.}$

SUJET S13

Exercice principal S13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *norme* sur E une application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; (Séparation)
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$; (Semi-homogénéité positive ou simplement homogénéité)
- $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$. (Inégalité triangulaire)

On pourrait montrer facilement que :
— la valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.
— Dans un espace euclidien $||x|| = \sqrt{\langle x;\ x\rangle}$ est une norme, appelée norme euclidienne.
— N_∞ définie, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $N_\infty((x, y)) = \sup(|x|, |y|)$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Soit une application $\varphi : E \to F$ où (E, N_E) et (F, N_F) sont deux espaces vectoriels et N_E et N_F sont deux normes sur respectivement E et F.

On dit que φ est une isométrie si et seulement si $\forall (x_1, x_2) \in E^2, N_F(\varphi(x_1) - \varphi(x_2)) = N_E(x_1 - x_2)$.

1. **Cours** Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace euclidien.
2. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme N_∞ définie plus haut et $\mathbb{R}$ de la norme définie par la valeur absolue usuelle.
   Montrer que l'application $f\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, \sin(t)) \end{array}\right.$ est une isométrie non linéaire.
3. Soient $\mathbb{H}$ un espace euclidien munie de la norme euclidienne $||x|| = \sqrt{\langle x;\ x\rangle}$ et φ une isométrie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{H}$ s'annulant en 0.
   (a) Soit $(x_1, x_2) \in (\mathbb{H}\backslash\{0\})^2$ tel que $||x_1 + x_2|| = ||x_1|| + ||x_2||$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x_1 = \lambda x_2$.
   (b) Montrer que $\forall t \in [1, +\infty[,\ \varphi(t) = t\varphi(1)$.
   (c) En déduire que φ est linéaire et commenter.
4. Soient $\mathbb{H}$ un espace euclidien munie de la norme euclidienne $||x|| = \sqrt{\langle x;\ x\rangle}$ et ψ une application de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$.
   On suppose que
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{H}^2 \quad \langle \psi(x);\ \psi(y)\rangle = \langle x;\ y\rangle$$
   (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{H}^2$. Déterminer $||\psi(x + y) - \psi(x) - \psi(y)||$.
   (b) En déduire que ψ est linéaire.
   (c) Montrer que ψ est une isométrie.

Solution :

1. ECS2 p7
2. Soit $(t, x) \in \mathbb{R}^2$
   $$N_\infty(f(t) - f(x)) = \sup(|\sin t - \sin x|, |t - x|)$$
   En utilisant l'inégalité des accroissements finis, le cos étant borné par 1, nous avons
   $$|\sin t - \sin x| \leqslant |t - x| \qquad \text{et donc}$$

$$N_\infty(f(t)-f(x)) = |t-x|.$$

De plus f n'est pas linéaire, par exemple $f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{f \text{ est une isométrie non linéaire}}$

3. (a) Soit $(x_1, x_2) \in (\mathbb{H}-\{0\})^2$.

$$||x_1+x_2||^2 = (||x_1||+||x_2||)^2 \Leftrightarrow \langle x_1;\ x_2\rangle = ||x_1||\,||x_2||$$

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$P(t) = ||x_1+tx_2||^2 = ||x_1||^2 + 2t\langle x_1;\ x_2\rangle + t^2\,||x_2||^2$$

P est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est nul donc $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(t_0) = 0$ ie $||x_1+t_0x_2|| = 0$.

Ainsi $x_1 = -t_0x_2$. De plus $\langle x_1;\ x_2\rangle = ||x_1||\,||x_2|| \Rightarrow -t_0\,||x_2||^2$, donc $t_0 < 0$ (x est non nul).
donc $\boxed{\text{il existe } \lambda \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } x_1 = \lambda x_2.}$

(b) $\forall t \in [0, +\infty[$

$$\|\varphi(t)-\varphi(0)\| = \|\varphi(t)\| = |t| = t$$

Soit $t \in]1, +\infty[$ $||\varphi(t)-\varphi(1)|| = |t-1| = t-1 > 0$ donc les vecteurs sont non nuls et nous avons

$$||\varphi(t)|| = ||\varphi(t)-\varphi(1)|| + ||\varphi(1)|| \text{ donc } \exists\lambda > 0$$

$$\varphi(t)-\varphi(1) = \lambda\varphi(1) \Rightarrow \varphi(t) = (1+\lambda)\varphi(1)$$

or

$$||\varphi(t)|| = t = (1+\lambda)\,||\varphi(1)|| \Rightarrow t = (1+\lambda)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall t \in [1, +\infty[,\ \varphi(t) = t\varphi(1).}$$

(c) De même si $t \in]0, 1[$ $||\varphi(1)|| = ||\varphi(1)-\varphi(t)|| + ||\varphi(t)||$ vecteurs non nuls et cas d'égalité dans 3.a.
si $t \in \mathbb{R}^{-*}$ $||\ \varphi(1)-\varphi(t)|| = ||\varphi(1)|| + ||-\varphi(t)||$ vecteurs non nuls et cas d'égalité de 3.a
Ainsi

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = t\varphi(1).}$$

L'égalité étant triviale en 0 et 1, φ est ainsi linéaire $\boxed{\text{Les isométries de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{H} \text{ sont linéaires}}$

4. (a)

$$\begin{aligned}
||\psi(x+y)-\psi(x)-\psi(y)||^2 &= \langle\psi(x+y)-\psi(x)-\psi(y);\ \psi(x+y)-\psi(x)-\psi(y)\rangle \\
&= \begin{aligned}&\langle\psi(x+y);\ \psi(x+y)\rangle - \langle\psi(x+y);\ \psi(x)\rangle - \langle\psi(x+y);\ \psi(y)\rangle - \langle\psi(x);\ \psi(x+y)\rangle + \\ &\quad \langle\psi(x);\ \psi(x)\rangle + \langle\psi(x);\ \psi(y)\rangle - \langle\psi(y);\ \psi(x+y)\rangle + \langle\psi(y);\ \psi(x)\rangle + \langle\psi(y);\ \psi(y)\rangle\end{aligned} \\
&= \begin{aligned}&\langle x+y;\ x+y\rangle - \langle x+y;\ x\rangle - \langle x+y;\ y\rangle - \langle x;\ x+y\rangle \\ &\quad +\langle x;\ x\rangle + \langle x;\ y\rangle - \langle y;\ x+y\rangle + \langle y;\ x\rangle + \langle y;\ y\rangle\end{aligned} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\psi(x+y) = \psi(x)+\psi(y)}$$

(b) Soit $(x, \lambda) \in \mathbb{H}\times\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
||\psi(\lambda x)-\lambda\psi(x)||^2 &= \langle\psi(\lambda x)-\lambda\psi(x);\ \psi(\lambda x)-\lambda\psi(x)\rangle \\
&= \langle\psi(\lambda x);\ \psi(\lambda x)\rangle - \lambda\langle\psi(\lambda x);\ \psi(x)\rangle - \lambda\langle\psi(x);\ \psi(\lambda x)\rangle + \lambda^2\langle\psi(x);\ \psi(x)\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\psi \text{ est linéaire}}$

(c) Soit $(x, y) \in \mathbb{H}^2$

$$||\psi(x)-\psi(y)||^2 = ||\psi(x-y)||^2 = \langle\psi(x-y);\ \psi(x-y)\rangle = ||x-y||^2$$

$\boxed{\psi \text{ est une isométrie.}}$

Exercice sans préparation S13

Soient X et Y deux variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ indépendantes, ayant la même loi et vérifiant :

$$\mathbb{P}(XY = 27) = \mathbb{P}(XY = 11) = \mathbb{P}(X + Y = 12) > 0.$$

Montrer que $\mathbb{P}(X = 11) = \mathbb{P}(X = 27)$.

Solution :

$\bullet \mathbb{P}(XY = 11) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 11) + \mathbb{P}(X = 11 \text{ et } Y = 1) = 2\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(X = 11)$.

$$\begin{aligned} \bullet \mathbb{P}(X + Y = 12) &= \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 11) + \mathbb{P}(X = 11 \text{ et } Y = 1) + \sum_{k=2}^{10} \mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = 12 - k) \\ &= 2\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(X = 11) + \sum_{k=2}^{10} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(X = 12 - k). \end{aligned}$$

L'égalité $\mathbb{P}(X + Y = 12) = \mathbb{P}(XY = 11)$ implique donc que $\displaystyle\sum_{k=2}^{10} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(X = 12 - k) = 0$.

Comme c'est une somme de réels positifs, cela donne $\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(X = 12 - k) = 0$ pour $2 \leqslant k \leqslant 10$.
En particulier $\mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(X = 9) = 0$.
$\bullet \mathbb{P}(XY = 27) = 2\mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(X = 9) + 2\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(X = 27) = 2\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(X = 27)$.
Par égalité de $\mathbb{P}(XY = 27) = \mathbb{P}(XY = 11)$ on en déduit que $\boxed{\mathbb{P}(X = 27) = \mathbb{P}(X = 11)}$ $(\mathbb{P}(X = 1) \neq 0)$.

SUJET S14

Exercice principal S14

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux, continues à gauche et bornées sur $[0,1[$.
Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $\mathcal{H}_\delta$ l'ensemble des fonctions f définies sur $[0,1[$ telles que :

$$\forall\,(x,y) \in [0,1[^2,\ \ \big|f(x)-f(y)\big| \leqslant |x-y|^\delta.$$

On considère les applications $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}x \end{array}$ et $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\ \mathrm{d}x \end{array}$.

1. Question de cours : projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel, définition, caractérisation par la distance.
2. Montrer que ψ définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$. On admet que ϕ définit un produit scalaire $\mathcal{E}$. On suppose l'espace $\mathcal{E}$ muni de ce produit scalaire.
   On notera désormais $\phi(f,g) =< f,g >$.
3. (a) Montrer que pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{H}_\delta \subset \mathcal{E}$.
   (b) Caractériser $\mathcal{H}_\delta$ si $\delta > 1$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé.
   On note $\mathcal{E}_k$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ formé des fonctions constantes sur chaque intervalle de la forme $\big[j2^{-k},(j+1)2^{-k}\big[$, où $j \in \big\{0,\dots,2^k-1\big\}$.
4. Montrer que $\mathcal{E}_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ et proposer une base orthonormée de cet espace.
5. On pose alors :
   $$h = \mathbb{1}_{[0,1[}\ ,\quad g = \mathbb{1}_{[0,1/2[} - \mathbb{1}_{[1/2,1[}$$
   et pour $\ell \geqslant 0$ et $j \in \big\{0,\dots,2^\ell-1\big\}$,
   $$g_{\ell,j} :\ x \in [0,1[\ \longmapsto\ 2^{\ell/2}\ g\big(2^\ell x - j\big)\ .$$
   Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $g_{\ell,j}(x)$ est non nul ?
6. Montrer que
   $$\mathcal{B} = \{h\} \cup \bigcup_{\ell=0}^{k-1}\{g_{\ell,0},\ \dots,\ g_{\ell,2^\ell-1}\ \}$$
   est une base orthonormée de $\mathcal{E}_k$.
7. Soit $f \in \mathcal{H}_\delta$. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathcal{E}_k$ tel que $||\gamma - f|| \leqslant 2^{-k\delta}$.
8. En déduire que $\left|\left|< h,f > h + \Big(\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k}\sum_{j=0}^{2^\ell-1}\langle f, g_{l,j}\rangle\, g_{l,j}\Big) - f\right|\right| \leqslant 2^{-k\delta}$.

Solution :

1. Programme ECS2, page 17.
2. ϕ est bien bilinéaire et symétrique.
   Si $< \phi(f),\phi(f) >= 0$. $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
   Si l'on suppose que f est continue, comme f^2 est positive et continue, on obtient bien $f^2 = 0$ puis $f = 0$.
   $\boxed{\phi \text{ définit un produit scalaire.}}$

3. (a) Soit $\delta > 0$ et $f \in \mathcal{H}_\delta$.
Soit x fixé de $[0,1]$ Par encadrement $\lim\limits_{y \to x} |f(x) - f(y)| = 0$, donc f est continue en tout point y de I.
$\boxed{\text{Pour } \delta > 0,\ \mathcal{H}_\delta \subset \mathcal{E}.}$

(b) Si $\delta > 1$, soit $f \in \mathcal{H}_\delta$. $\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant |x - y|^{\delta - 1}$. Donc par encadrement la limite du taux d'accroissement est nulle, et donc la dérivée est nulle en tout point y. Ainsi, f est constante.
Réciproquement, toute fonction de $\mathcal{H}_\delta$ est constante.
$\boxed{\text{Pour } \delta > 1,\ \mathcal{H}_\delta \text{ est l'ensemble des fonctions constantes sur } [0,1[.}$

4. On a bien $\mathcal{E}_k \subset \mathcal{E}$.
Soit $f_{j,k}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}[$.
$\mathcal{E}_k = \text{vect}\{f_{j,k}, 0 \leqslant j \leqslant 2^{k-1}\}$.
En effet toute fonctions constante sur ces intervalles disjoints se décompose en la somme d'indicatrices.
Donc $\mathcal{E}_k$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$.
Et cette famille est bien orthogonale (puisque si $i \neq j$, $\forall x \in [0,1]$, $f_{j,k}(x) f_{i,k}(x) = 0$).
On a de plus $||f_{i,k}^2(x)|| = \displaystyle\int_0^1 f_{i,k}^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{i2^{-k}}^{(i+1)2^{-k}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^k}$.
$\boxed{\text{On propose comme base orthonormée la famille } \left\{x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2^k}} \mathbb{1}_{[j2^{-k}(j+1)2^{-k}[}, 0 \leqslant j \leqslant 2^{k-1}\right\}.}$
$\boxed{\dim(\mathcal{E}_k) = 2^k.}$

5. La fonction g est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $[1, +\infty[$ (et vaut soit 1 soit -1 sur $[0,1[$).
Or, $0 \leqslant 2^\ell x - j < 1$ ssi $j2^{-\ell} \leqslant x < (j+1)2^{-\ell}$. $\boxed{g_{\ell,j}(x) \neq 0 \text{ ssi } x \in [j2^{-\ell}, (j+1)2^{-\ell}[.}$

6. * $g^2(x) = 1$ pour tout x de $[0,1[$, donc h^2 est constant sur son support et vaut $(2^{\ell/2})^2 = 2^\ell$.
Ainsi $< g_{\ell,j}, g_{\ell,j} >= \displaystyle\int_{j2^{-\ell}}^{(j+1)2^{-\ell}} 2^\ell\,\mathrm{d}x = 1$.
* De même $< h, h >= 1$.
* Sinon, $< h, g_{\ell,j} >= \displaystyle\int_{j2^{-\ell}}^{(j+1)2^{-\ell}} g_{\ell,j}(x)\,\mathrm{d}x = 0$. (on intègre une fonction qui vaut 1 et -1 sur des intervalles de longueurs identiques)
* Pour calculer $< g_{\ell,j}, g_{\ell',j'} >$:
Si $\ell = \ell'$ et $j \neq j'$, les supports des fonctions sont disjoints, $< g_{\ell,j}, g_{\ell',j'} >= 0$.
Si $\ell > \ell'$, on a deux possibilités :
Ou bien les supports de $g_{\ell',j'}$ et de $g_{\ell,j}$ sont disjoints, et dans ce cas $< g_{\ell,j}, g_{\ell',j'} >= 0$.
Ou bien le support de $g_{\ell,j}$ est entièrement dans celui de $g_{\ell',j'}$, et dans une des deux moitiés du support. Dans ce cas là, la fonction $g_{\ell',j'}$ est constante sur le support de $g_{\ell,j}$, et vaut soit 1, soit -1.
Et dans ce cas $< g_{\ell,j}, g_{\ell',j'} >= \displaystyle\int_{j2^{-\ell}}^{(j+1)2^{-\ell}} g_{\ell',j'} g_{\ell,j}(x)\,\mathrm{d}x = \pm 2^{\ell'/2} \int_{j2^{-\ell}}^{(j+1)2^{-\ell}} g_{\ell,j}(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
(car sur son support $g_{\ell,j}$ vaut -1, puis 1)
Finalement la famille proposée est bien orthonormée.
Son cardinal vaut $1 + \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k-1} 2^\ell = 1 + \frac{1 - 2^k}{1 - 2} = 2^k$.
Elle est bien incluse dans $\mathcal{E}_k$, les fonctions proposées sont bien constantes sur les intervalle proposés (car $j2^{-\ell-1} = 2^{-k}(j2^{k-1-\ell})$ est bien un multiple de 2^{-k} quand $\ell \leqslant k - 1$.
$\boxed{\text{On a une base orthonormée de } \mathcal{E}_k.}$

7. Soit $f \in \mathcal{H}_\delta$.
On construit la fonction γ de la manière suivante :
$\gamma(x) = f(j2^{-k})$ pour tout $x \in [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}[$.
On a alors, pour tout $x \in [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}[$, $|\gamma(x) - f(x)| \leqslant \left|x - j2^{-k}\right|^\delta \leqslant (2^{-k})^\delta$.
Finalement, pour tout $x \in [0,1[$, $|\gamma(x) - f(x)| \leqslant 2^{-k\delta}$.
Donc $||\gamma - f||^2 = \displaystyle\int_0^1 (\gamma(x) - f(x))^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 (2^{-k\delta})^2\,\mathrm{d}x$.

Finalement $\boxed{||\gamma - f||^2 \leqslant 2^{-k\delta}.}$

8. On a une base orthonormée de $\mathcal{E}_k$.
   On reconnait la formule du projecteur orthogonal dans cette base orthonormée :
   $p(f) =< f, h > h + \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{j=0}^{2^\ell - 1} \langle f, g_{l,j} \rangle \, g_{l,j})$.
   Comme γ est dans $\mathcal{H}_\delta$, on a bien $||p(f) - f|| \leqslant ||\gamma - f|| \leqslant 2^{-k\delta}$.
   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{\left|\left| < h, f > h + (\sum_{\ell=0}^{k} \sum_{j=0}^{2^\ell - 1} \langle f, g_{l,j} \rangle \, g_{l,j}) - f \right|\right| \leqslant 2^{-k\delta}.}$

Exercice sans préparation S14

Une expérience consiste à effectuer dans une urne de n boules distinctes (numérotées de 1 à n) des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on décide de s'arrêter.

Le programme scilab suivant reproduit cette expérience `Nexp` fois :

```
Nexp = 1000; n = 100; Tot = 0;
for k = 1:Nexp
 time = 0;
 obt = [];
  while (length(obt)<n)
    time = time+1;
    i = int(n*rand())+1
    U = find(obt==i);
    if (length(U)==0) then
                      obt=[obt,i]
                      end
 end
 Tot = Tot+time;
end
disp(Tot/Nexp)
```

On rappelle les commandes Scilab suivantes :

`find(L==i)` renvoie pour une la matrice des indices k tels que `L(k)` soit égal à i.

`length(A)` renvoie le nombre d'éléments de la matrice `A`.

1. Déterminer, pour chaque expérience, un protocole expliquant la condition d'arrêt des tirages.
   Que représente la valeur affichée à l'issue du programme ?
2. Montrer que cette valeur est équivalente à $n \ln n$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. Pour chaque expérience, on arrête les tirages quand tous les numéros ont été obtenus (les numéros déjà obtenus sont stockés dans le tableau `obt`)
   Le programme Scilab proposé reproduit l'expérience indiquée 1000 fois pour une valeur de n égal à 10.
   La valeur affichée à l'issue du programme représente
   $\boxed{\text{la valeur moyenne du nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules.}}$
2. Soit alors V la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois et soit T_i le numéro de tirage lorsque i boules différentes ont été tirées au moins une fois. En notant $V_i = T_i - T_{i-1}$ et $V_1 = 1$, on a $V = V_1 + ... + V_n$. Or, V_i est égal au nombre de tirage pour tirer une des $n-(i-1)$ boules qui n'ont pas encore été tirées. V_i suit donc une loi géométrique de paramètre
   $$p_i = \frac{n-(i-1)}{n}$$
   D'où
   $$\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(V_1) + ... + \mathbb{E}(V_n) = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
   Par une comparaison série intégrale classique En particulier $\boxed{\mathbb{E}(V) \sim n \ln n}$ quand n tend vers l'infini.

SUJET S15

Exercice principal S15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soient A et B deux matrices de E. On définit une application u de E dans E par

$$u \ : \ M \mapsto AM - MB.$$

On suppose dans toute la suite que A et B sont diagonalisables à valeurs propres respectivement égales à $(\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$ et $(\mu_i)_{1\leq i\leq p}$.

1. Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation pour un endomorphisme.
2. Vérifier que u est un endomorphisme de E.
3. Montrer que pour tout $(i,j) \in \{1,..,m\} \times \{1,..,p\}$, $\lambda_i - \mu_j$ est une valeur propre de u.
   Indication : on pourra commencer par montrer que μ_j est aussi une valeur propre de ${}^tB$
4. Montrer que $(A - \lambda_1 I)...(A - \lambda_m I) = 0$.
5. Soit λ une valeur propre de u et T un vecteur propre associée.
   (a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(A)T = TP(\lambda I + B)$.
   (b) En déduire qu'il existe $(i,j) \in \{1,..,m\} \times \{1,..,p\}$ tel que $\lambda = \lambda_i - \mu_j$.
6. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de u.
7. Montrer que u est diagonalisable.

Solution :

1. Cours ECS2 page 7.
2. Aisé
3. Comme rg$((B - \mu_j I_n))$ =rg$(({}^t(B - \mu_j I_n))$ =rg$({}^tB - \mu_j I_n))$, μ_j est aussi une valeur propre de ${}^tB$)
   Soit $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nul tel que $YB = \mu_j Y$ (on utilise le fait que . Soit également $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda_i X$. En posant $T = XY$, on constate alors que

   $$u(T) = AT - TB = \lambda_i XY - \mu_j XY$$

   Comme $T = (x_{i,1}y_{j,1})_{(i,j)\in[|1,n|]^2}$, en choisissant un coefficient de X et un coefficient de Y non nuls, on obtient que T n'est pas la matrice nulle.
   $\boxed{\text{Pour tout } (i,j) \in \{1,..,m\} \times \{1,..,p\},\ \lambda_i - \mu_j \text{ est une valeur propre de } u}$
4. On constate que $(A-\lambda_1 I)...(A-\lambda_n I) = 0$ lorsque $A = diag(\lambda_1,..,\lambda_n)$ est une matrice diagonale. Le résultat reste vrai lorsque A est semblable à $diag(\lambda_1,..,\lambda_n)$ par les propriétés usuelles de la similitude.
   $\boxed{(A - \lambda_1 I)...(A - \lambda_n I) = 0}$
5. (a) On a $AT = T(\lambda I + B)$ puis par récurrence sur k, la formule demandée est vraie pour $P(X) = X^k$. Elle est ensuite vraie pour tous les polynôme par linéarité.
   $\boxed{\text{Pour tout polynôme } P \in \mathbb{R}[X], \text{ on a } P(A)T = TP(\lambda I + B).}$
   (b) On applique ensuite le résultat de la question précédente au polynôme

   $$P(X) = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_m)$$

   ce qui donne

   $$T(\lambda I + B - \lambda_1 I)...(\lambda I + B - \lambda_m I) = 0$$

En particulier, la matrice

$$S = (B + (\lambda - \lambda_1)I)...(B + (\lambda - \lambda_n)I)$$

n'est pas inversible (car $T \neq 0$).

Donc, il existe $i \in \{1, ..m\}$ tel que $B + (\lambda - \lambda_i)I$ soit non inversible.

Donc $\lambda_i - \lambda$ est une valeur propre de B et donc il existe $j \in [|1, p|]$ tel que $\lambda_i - \lambda = \mu_j$

$\boxed{\text{Il existe } (i, j) \in \{1, .., m\} \times \{1, .., p\} \text{ tel que } \lambda = \lambda_i - \mu_j.}$

6. $\boxed{\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_i - \mu_j, (i, j) \in \{1, .., m\} \times \{1, .., p\}\}.}$

7. On ne peut pas conclure avec le nombre de valeurs propres. Construisons une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres.

   Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A

   B étant diagonalisable, ${}^tB$ l'est aussi.

   On note$(Y_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tel que ${}^tY_j$ soit un vecteur propre de ${}^tB$.

   Avec les calculs de 3. X_iY_j est un vecteur propre de u.

   Il suffit de montrer que la famille $(X_iY_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est libre (elle est bien de cardinal n^2)

   Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i Y_j = 0$ alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i) Y_j = 0$

   On a envie de dire que chacun des $\displaystyle(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i) = 0$ car la famille des Y_j est libre. Mais cela ne marche à priori qu'avec des scalaires.

   On note alors $x_{i,k}$ la k-ième coordonnée de X_i

   La $k$ième ligne de $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i) Y_j = 0$ vaut donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} x_{i,k}) Y_j$

   Cette ligne est nulle, et donc comme les Y_j forment une famille libre :

   $\forall j \in [|1; n|]$, $\forall k \in [|1; n|]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} x_{i,k} = 0$

   Ce qui donne $\forall j \in [|1; n|]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i = 0$ et finalement :

   $\forall i, j \in [|1, n|]$, $\lambda_{i,j} = 0$.

   On a construit une base de vecteurs propres pour u.

   $\boxed{\text{Ainsi } u \text{ est bien diagonalisable.}}$

Exercice sans préparation S15

On considère une expérience consistant à lancer une pièce équilibrée n fois de manière consécutive. L'expérience en question est simulée par le programme Scilab ci-dessous pour la valeur $n = 10$ (et répétée ici 1000 fois) :

```
Nexp = 1000;
n = 10;
u = floor(2*rand(n,Nexp))+1;
test = 0;
for k = 1:Nexp
    ok = 1;
    for i = 2 : n
     if (u(i-1,k)==1) & (u(i,k)==1) then
                                ok = 0;
                                 end
    end
    test = test+ok;
end
Pn = test/Nexp;
disp(Pn)
```

1. De quel évènement E_n la variable `Pn` représente-t-elle la fréquence d'apparition ?
2. On note pour $n \geqslant 1$, P_n la probabilité de l'événement E_n.
   Soit $n \geqslant 3$, trouver une relation entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2}.
3. Montrer que (P_n) est décroissante et trouver sa limite quand n tend vers l'infini.

Solution :

1. Cette expérience consiste à calculer la probabilité que $\boxed{\text{sur } n = 10 \text{ tirages, il n'y ait pas deux piles consécutifs.}}$
2. Soit S_n le résultat du lancer n et E_n l'événement 'deux piles successifs n'apparaissent pas dans les n lancers'.
   Pour $n \geqslant 3$:
   $$\mathbb{P}(E_n \cap \{S_n = F\}) = \mathbb{P}(E_{n-1} \cap \{S_n = F\}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(E_{n-1})$$
   et
   $$\mathbb{P}(E_n \cap \{S_n = P\}) = \mathbb{P}(E_{n-2} \cap \{S_{n-1} = F\} \cap \{S_n = P\}) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(E_{n-2})$$
   On a donc, par la formule des probabilités totales la relation
   $$P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}P_{n-2}$$
   avec $P_1 = 1$ et $P_2 = 3/4$
3. On peut montrer ensuite que P_n est décroissante (et minorée). En effet,
   $$P_{n-1} = \frac{1}{2}P_{n-2} + \frac{1}{4}P_{n-3} \geq \frac{1}{2}P_{n-2}$$
   ce qui implique que
   $$P_n \leq \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}(2P_{n-1}) = P_{n-1}$$
   (On peut aussi montrer $P_{n+1} \leqslant P_n$ par récurrence double, voire calculer la suite explicitement.)
   Par passage à la limite dans la relation de récurrence, on obtient alors nécessairement que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n = 0}$ vaut 0.

SUJET S16

Exercice principal S16

1. Question de cours : énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Déterminer trois réels a, b, et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0\},\ \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{k(k+1)}.$$

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs.
   (a) On suppose qu'on dispose d'une fonction Scilab `a` telle que pour tout entier naturel n non nul, `a(n)` soit égal à a_n. Écrire en Scilab une fonction prenant en argument un entier n et renvoyant la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k}$. *On cherchera à limiter au maximum le nombre d'appels à la fonction* `a`.
   (b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n^2(n+1)^2}{4} \leqslant (a_1 + \cdots + a_n) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

   (c) On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n}$ est convergente. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n}$ converge et qu'il existe un réel $K > 0$ ne dépendant pas de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} \leqslant K \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

Solution :

1. Programme ECS 2 (page 7)
2. On trouve sans difficulté que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0\},\ \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   La série converge $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)^2}$ par comparaison à la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$. D'après la question précédente, on a (les deux autres séries ci-dessous convergent) :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \int_{k+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{t^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

   On a fait une comparaison série-intégrales, en remarquant que $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2} \geqslant \int_{n+2}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$

   Ainsi $\displaystyle\boxed{\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{k(k+1)}}$

4. (a)

```
function s = somme(n)
    denominateur = 0
    s = 0
    for k = 1:n
        denominateur = denominateur + a(k)
        s = s + k/denominateur
    end
endfunction
```

(b) On considère les vecteurs $x = (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$ et $y = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{n}{\sqrt{a_n}}\right)$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve que $\langle x;\, y\rangle^2 \leqslant ||x||^2\, ||y||^2$, i.e. :

$$\boxed{\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}\frac{k}{\sqrt{a_k}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right).}$$

(c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

On obtient $\dfrac{n}{(\sum_{k=1}^{n} a_k)} \leqslant \dfrac{4}{n(n+1)^2}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right)$.

On somme alors

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{4}{n(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right) = \sum_{k=1}^{N}\frac{4k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n(n+1)^2}$$

(inversion de somme)

Puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)^2}$ est à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On trouve alors :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} \leqslant \sum_{k=1}^{N}\frac{4k}{a_k(k+1)} \leqslant 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k} \leqslant 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{a_k}.$$

Puisque la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{n}{a_1 + \cdots + a_n}$ est à termes positifs, elle converge (en vertu du théorème de la limite monotone), et par passage à la limite, on trouve bien le résultat attendu avec $K = 4$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} \leqslant 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{a_k}.}$$

Exercice sans préparation S16

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soient F_X et F_Y leurs fonctions de répartition.
On dit que Y *domine stochastiquement* X lorsque :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_Y(t) \leqslant F_X(t)$$

On note alors :

$$X \prec Y$$

1. Montrer que si $0 < \lambda < \mu$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ alors on a : $X \prec Y$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $0 \leqslant p < q \leqslant 1$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,q)$ alors on a : $X \prec Y$.

Solution :

1. On remarque d'abord que pour des variables aléatoires à valeurs entières on a

$$X \prec Y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad F_Y(n) \leqslant F_X(n)$$

En effet : Si $X \prec Y$ alors $\forall t \in \mathbb{R} \quad F_Y(t) \leqslant F_X(t)$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_Y(n) \leqslant F_X(n)$$

Réciproquement :
La v.a. X étant supposée à valeurs entières on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \big[X \leqslant t\big] = \big[X \leqslant \lfloor t \rfloor\big]$$

Il en résulte que pour tout réel t positif (en posant $n = \lfloor t \rfloor$) :

$$F_Y(t) = F_Y(n) \leqslant F_X(n) = F_X(t)$$

et comme par ailleurs $F_Y(t) = F_X(t) = 0$ pour tout réel $t < 0$ on a finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_Y(t) \leqslant F_X(t)$$

Soit donc n un entier fixé quelconque. On a :

$$F_X(n) = P([X \leqslant n]) = \sum_{k=0}^{n} P([X = k]) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Soit f_n la fonction définie pour tout réel t par :

$$f_n(t) = e^{-t} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

On ainsi

$$F_X(n) = f_n(\lambda) \quad \text{et} \quad F_Y(n) = f_n(\mu)$$

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout réel t :

$$f_n'(t) = -e^{-t} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + e^{-t} \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

soit, après un glissement d'indice :

$$f_n'(t) = -e^{-t}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} + e^{-t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!} = -e^{-t}\frac{t^n}{n!}$$

Il s'ensuit que pour tout réel t positif :

$$f_n'(t) = -e^{-t}\frac{t^n}{n!} \leqslant 0$$

La fonction f_n est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et puisque par hypothèse $0 < \lambda < \mu$ on a $f_n(\mu) \leqslant f_n(\lambda)$ soit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_Y(n) \leqslant F_X(n)$$

Bilan :

$$\boxed{X \prec Y}$$

2. Une idée (par couplage) est de construire deux variables aléatoires X et Y telles que :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p), \quad Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,q) \quad \text{et} \quad P([X \leqslant Y]) = 1$$

Pour cela on peut considérer des v.a. $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on construit alors la v.a. Y_i en posant :

- Si $X_i = 1$ alors $Y_i = 1$.
- Si $X_i = 0$ alors $Y_i = 1$ avec probabilité $\dfrac{q-p}{1-p} \in [0,1]$ (car $p \leqslant q$).

Formellement on peut poser :

$$Y_i = X_i + (1 - X_i)\mathbb{1}_{[U_i \leqslant \frac{q-p}{1-p}]}$$

où U_i est indépendante de X_i et suit la loi uniforme à densité sur $[0,1]$.

On a alors $Y_i(\Omega) = \{0,1\}$ et $P([Y_i = 1]) = p + (1-p)\dfrac{q-p}{1-p} = q$.

Il s'ensuit que Y_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(q)$ et on a : $P\left([X_i \leqslant Y_i]\right) = 1$.

On pose alors :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

et on a bien :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p), \quad Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,q) \quad \text{et} \quad P([X \leqslant Y])$$

En effet $(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant Y_i\} \subset \{X \leqslant Y\}$, donc $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i \leqslant Y_i\right) \leqslant \mathbb{P}\left(X \leqslant Y\right)$
Or, les événements $\{X_i \leqslant Y_i\}$ sont indépendants par le lemme des coalitions donc $1 \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant Y)$
Il en résulte que :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad F_Y(t) \leqslant F_X(t) \text{ et ainsi } X \prec Y}$$

SUJET S17

Exercice principal S17

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des variables aléatoires X à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ telles que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) \neq 0$ et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit $f : [\![1,n]\!] \to \mathbb{R}$ une fonction injective et soit a un réel. On considère l'ensemble $\mathcal{E}_a$ des variables aléatoires de $\mathcal{E}$ telles que $\mathbb{E}(f(X)) = a$, qu'on suppose non vide.

Pour toute variable aléatoire X de $\mathcal{E}$, on note :

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) \ln(\mathbb{P}(X=k)).$$

Soit U une variable aléatoire de $\mathcal{E}$ suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1. Question de cours : énoncer le théorème du transfert pour les variables aléatoires discrètes infinies.
2. Calculer $H(U)$.
3. Justifier que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire que, pour tout $X \in \mathcal{E}$, $H(X) \leqslant H(U)$.
5. Montrer que la fonction ci-dessous est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (f(k)-a)\, e^{(f(k)-a)x} \end{array}$$

6. Pour tout $X \in \mathcal{E}_a$ et $k \in [\![1,n]\!]$, on note $p_k = \mathbb{P}(X=k)$. En considérant H comme une fonction de $(p_1, \dots, p_n)$, déterminer la hessienne de H.
7. En déduire que si H admet un extremum local sur $\mathcal{E}_a$, c'est en un unique point. Est-ce un maximum ou un minimum ?

Solution :

1. Programme ECS 1 (page 23)
2. $H(U) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln n \boxed{= \ln n}$.
3. Puisque ln est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln'' < 0$ sur cet intervalle, $\boxed{\text{ln est concave sur cet intervalle.}}$
4. Soit X une variable aléatoire de $\mathcal{E}$. Par concavité du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$ et puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1$, on a :

$$\begin{aligned} H(U) - H(X) &= \ln n + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) \ln(\mathbb{P}(X=k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)(\ln(\mathbb{P}(X=k)) + \ln(n)) = -\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) \ln\left(\frac{1}{n\mathbb{P}(X=k)}\right) \\ &\geqslant -\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) \times \frac{1}{n\mathbb{P}(X=k)}\right) = 0 \ \ (-\ln \text{ est convexe.}) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour toute variable aléatoire } X \text{ de } \mathcal{E},\ H(U) \geqslant H(X)}$

5. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par théorèmes opératoires et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \sum_{k=1}^{n} (f(k)-a)^2 e^{(f(k)-a)x} \geqslant 0.$$

De plus :

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ f(k) = a,$$

ce qui est absurde puisque f est injective. On en déduit que $\varphi' > 0$ sur $\mathbb{R}$, et ainsi que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection strictement croissante entre $\mathbb{R}$ et $\varphi(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} \varphi, \lim_{+\infty} \varphi[$.

Puisque $\mathcal{E}_a$ est non-vide, le théorème du transfert assure qu'il existe une variable aléatoire $X \in \mathcal{E}_a$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)\mathbb{P}(X=k) = a, \quad \text{i.e.} \quad \sum_{k=1}^{n} (f(k)-a)\mathbb{P}(X=k) = 0.$$

Puisque par hypothèse $\mathbb{P}(X=k) \neq 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, les $f(k)-a$ ne peuvent être tous de même signe, ni même tous nuls, par injectivité de f. On en déduit donc que :

$$\lim_{-\infty} \varphi = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} \varphi = +\infty$$

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ réalise une bijection strictement croissante de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$

6. En écrivant $H : (p_1, \ldots, p_n) \mapsto -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k)$, on trouve que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \frac{\partial H}{\partial p_k}(p_1, \ldots, p_n) = -\ln p_k - 1.$$

$$\boxed{\text{La hessienne de } H \text{ en un point } (p_1, \ldots, p_n) \text{ est donc la matrice diag}\left(-\frac{1}{p_1}, \ldots, -\frac{1}{p_n}\right).}$$

7. Si la fonction H admet un extremum local $p = (p_1, \ldots, p_n)$ sur l'ouvert $(]0,1[)^n$ sous les contraintes linéaires $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ et $\sum_{k=1}^{n} f(k)p_k = a$, alors $\nabla H(p) \in \text{Vect}\left((1, \ldots, 1), (f(1), \ldots, f(n))\right)$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ -\ln(p_k) - 1 = \lambda + \mu f(k), \text{ i.e. } p_k = e^{-1-\lambda-\mu f(k)}.$$

Or :

$$0 = \sum_{k=1}^{n} (f(k)-a)p_k = e^{-1-\lambda} \sum_{k=1}^{n} (f(k)-a)e^{-\mu f(k)} = e^{-1-\lambda-a\mu}\varphi(-\mu).$$

On en déduit que $\varphi(-\mu) = 0$, i.e. $\mu = -\varphi^{-1}(0)$ par bijectivité de φ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Puisque $\sum_{k=1}^{n} p_k = e^{-1-\lambda} \sum_{k=1}^{n} e^{-\mu f(k)} = 1$, on trouve que $\lambda = -1 + \ln\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\mu f(k)}\right)$. L'unicité de μ assure alors l'unicité de λ.

On en déduit donc que si H admet un extremum local sous les contraintes précédentes, $\boxed{\text{cet extremum est unique.}}$

Les valeurs propres de la hessienne de H étant toujours strictement négatives

$\boxed{\text{Si } H \text{ atteint un extremum local sous contrainte, c'est un maximum}}$

Exercice sans préparation S17

Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que :
- $f(0) = 0$
- $f'(0) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{f'(f(x))}$

Solution :

- Supposons qu'il existe une telle fonction.
  Remarquons que avec la troisième hypothèse, on a :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f'(f(x)) = 1$$
  D'où en primitivant :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = x + k, \quad k \in \mathbb{R}$$
  Comme $f(0) = 0$, on a nécessairement $k = 0$, d'où :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = x$$
  Remarquons que f' ne peut pas s'annuler sur $\mathbb{R}$ pour que la troisième hypothèse ait un sens. Comme f' est continue (f est de classe $\mathscr{C}^1$), elle doit être de signe strict constant, donc strictement positive puisque $f'(0) = 1$.
  Ainsi, f est nécessairement strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

  Enfin s'il existait x tel que $f(x) > x$, alors en appliquant f on aurait $f(f(x)) > f(x)$, donc $x > f(x)$, ce qui est absurde.
  (De même, c'est absurde d'avoir $f(x) < x$ pour un réel x).
  Ainsi nécessairement :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x.$$
- Réciproquement, la fonction identité $x \mapsto x$ vérifie bien les hypothèses proposées.
  $\boxed{\text{La fonction identité est donc la seule fonction répondant au problème.}}$

SUJET S18

Exercice principal S18

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

On considère deux familles de vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de E.

On note $A = \mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_n)$ et $B = \mathrm{Mat}_e(y_1, \dots, y_n)$.

1. Question de cours : donner les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée d'un espace euclidien.
2. Écrire en Scilab une fonction calculant le produit scalaire usuel de deux vecteurs colonnes.
3. Déterminer les coefficients de la matrice ${}^tAB$.
4. On suppose ici que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E. Montrer qu'il existe une unique famille $(y_1, \dots, y_n)$ de E telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle y_i;\ x_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer alors que $(y_1, \dots, y_n)$ est une base de E et exprimer la matrice de passage P de la base $(x_1, \dots, x_n)$ à la base $(y_1, \dots, y_n)$ à l'aide de la matrice :

$$M = (\langle x_i;\ x_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

5. On suppose ici que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!],\ \|x_i\| = 1, \\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle x_i;\ x_j\rangle < 0, \\ \exists v \in E,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \langle x_i;\ v\rangle > 0. \end{cases}$$

(a) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E$. Notons $I = \{i \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_i > 0\}$.

i. Montrer que $I = \emptyset$ en calculant $\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2$.

ii. En déduire que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E.

(b) Montrer que la matrice $S = I_n - \dfrac{1}{n} M$ est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $]0;1[$.

Indication : on pourra considérer un vecteur propre X de M et calculer $\|AX\|^2$ de deux manières.

Solution :

1. Programme ECS 2 (page 7)
2.
```
function s = prodscal(u,v)
    s = 0;
    n = max(size(u));
    for k = 1:n
        s = s + u(k)*v(k);
    end
endfunction
```
3. Puisque e est une base orthonormée de E, $A = (\langle e_i;\ x_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (\langle e_i;\ y_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Ainsi, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient à la i-ème ligne et j-ème colonne de la matrice ${}^tAB$ est :

$$\left({}^tAB\right)_{i,j} = \sum_{k=1} \langle e_k;\ x_i\rangle \langle e_k;\ y_j\rangle \boxed{= \langle x_i;\ y_j\rangle.}$$

4. La condition de l'énoncé est vérifiée si, et seulement si, ${}^tAB = I_n$. Il existe donc une unique famille solution $(y_1, \dots, y_n)$, entièrement déterminée par sa matrice dans la base e :

$$\boxed{\operatorname{Mat}_e(y_1, \dots, y_n) = B = \left({}^tA\right)^{-1}.}$$

Puisque B est inversible, $(y_1, \dots, y_n)$ est une base de E. De plus :

$$P = \operatorname{Mat}_x(y) = \operatorname{Mat} y, x(\operatorname{Id}_E) = \operatorname{Mat} e, x(\operatorname{Id}_E) \operatorname{Mat} y, e(\operatorname{Id}_E) = A^{-1}B = \left({}^tAA\right)^{-1} = \boxed{M^{-1}.}$$

5. On suppose ici que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!],\ \|x_i\| = 1, \\ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle x_i;\ x_j \rangle < 0, \\ \exists v \in E,\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle x_i;\ v \rangle > 0. \end{cases}$$

(a) i. Notons $J = [\![1, n]\!] \setminus I$. On a alors :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = -\sum_{j \in J} \lambda_j x_j.$$

Ainsi :

$$\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = -\langle \sum_{i \in I} \lambda_i x_i;\ \sum_{j \in J} \lambda_j x_j \rangle = -\sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i \lambda_j \langle x_i;\ x_j \rangle \leqslant 0.$$

On en déduit que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$. Ainsi :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \langle x_i;\ v \rangle = 0,$$

ce qui est impossible à moins que $\boxed{I = \emptyset.}$

ii. On peut montrer de même que l'ensemble $I' = \{i \in [\![1, n]\!] \mid \lambda_i < 0\}$ est vide, assurant ainsi la liberté de la famille $(x_1, \dots, x_n)$. Par argument de cardinalité, $\boxed{(x_1, \dots, x_n) \text{ est bien une base de } E.}$

(b) Remarquons que $\boxed{S = I_n - \frac{1}{n}{}^tAA \text{ est symétrique réelle donc diagonalisable.}}$

Soit λ une valeur propre de M associée à un vecteur propre X. On a alors ${}^tAAX = \lambda X$ puis :

$$\|AX\|^2 = {}^tX{}^tAAX = \lambda \|X\|^2.$$

On en déduit que $\lambda > 0$ puisque $\|X\| > 0$ et $\|AX\| > 0$ (A est inversible). En notant $X = {}^t\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a aussi :

$$\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \alpha_j \right)^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (appliquée n fois) assure que :

$$\|AX\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_i;\ x_j \rangle^2 \|X\|^2 = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \|X\|^2 = n\|X\|^2.$$

Remarquons que cette inégalité est stricte car sinon X serait colinéaire à chaque ligne de la matrice A, ce qui est impossible puisque A est inversible. Ainsi : $\|AX\|^2 < n\|X\|^2$. On en déduit donc que $\lambda < n$, puis que $\operatorname{Sp}(M) \subset]0, n[$.

Soit λ une valeur propre de S associée à un vecteur propre X. Ainsi $X - \frac{1}{n}MX = \lambda X$, i.e. $MX = n(1 - \lambda)X$. On en déduit que $n(1 - \lambda) \in \operatorname{Sp}(M) \subset]0, n[$ donc $\boxed{\lambda \in]0, 1[.}$

Exercice sans préparation S18

Soit N une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite et X une variable de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ indépendante de N, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On pose $R = 1 - 2X$.

1. Déterminer la loi de R.
2. On pose $Y = RN$. Montrer que $\mathrm{Cov}(N, Y) = 0$.
3. Les variables N et Y sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. De manière immédiate $\boxed{\mathbb{P}(R = 1) = \mathbb{P}(R = -1) = \dfrac{1}{2}.}$
2. On commence par déterminer la loi de Y.
   On peut calculer, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leqslant x) &= \mathbb{P}(N \leqslant x \text{ et } R = 1) + \mathbb{P}(-N \leqslant x \text{ et } R = 1) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(N \leqslant x) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(-N \leqslant x) \text{ car } N \text{ et } R \text{ sont indépendantes} \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(N \leqslant x) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N \leqslant x) \text{ car } N \text{ et } -N \text{ ont même loi} \\
&= \mathbb{P}(N \leqslant x)
\end{aligned}$$

   Ainsi Y et N ont même loi et $\boxed{Y \text{ suit donc une loi normale centrée réduite.}}$ Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(N, Y) &= \mathbb{E}(NY) - \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(RN^2) \\
&= \mathbb{E}(R)\mathbb{E}(N^2) \text{ par indépendance de } R \text{ et } N \\
&= 0
\end{aligned}$$

   $\boxed{\mathrm{Cov}(N, Y) = 0}$

3. Si N et Y étaient indépendantes, comme elles suivent des lois normales, ce serait également le cas de $N + Y$.
   Or :

$$\mathbb{P}(N + Y = 0) = \mathbb{P}(R = -1) = \frac{1}{2} \neq 0$$

   Ainsi $N + Y$ ne suit pas une loi normale.
   On peut aussi voir que $|N| = |Y|$, donc par exemple les événements $\mathbb{P}(|N| \leqslant 1)$ et $\mathbb{P}(|Y| \leqslant 1)$ ne sont pas indépendants.
   $\boxed{N \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

SUJET S19

Exercice principal S19

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit l'application ϕ par :

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ v & \mapsto & u \circ v \end{cases}$$

On note $Id_{\mathcal{L}(E)}$ et Id_E les fonctions identité des espaces $\mathcal{L}(E)$ et E.

1. **Cours** Rappeler la définition d'un projecteur et ses propriétés.
2. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
3. Montrer que $\mathrm{Sp}\,(\phi) \subset \mathrm{Sp}\,(u)$
4. En considérant des endomorphismes particuliers de E, montrer que $\mathrm{Sp}\,(\phi) = \mathrm{Sp}\,(u)$.
5. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$.
   (a) Montrer que
   $$v \in \text{ Ker } (\phi - \lambda Id_{\mathcal{L}(E)}) \Leftrightarrow \text{ Im } (v) \subset \text{ Ker } (u - \lambda Id_E)$$
   (b) En déduire $\dim(\text{ Ker } (\phi - \lambda Id_{\mathcal{L}(E)}))$
6. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si v est diagonalisable.

Solution :

1. ECS1 p16
2. Soit $(v_1, v_2, \lambda) \in \mathcal{L}(E)^2 \times \mathbb{K}$, en utilisant la linéarité de u, nous avons
   $$\phi(v_1 + \lambda v_2) = u \circ (v_1 + \lambda v_2) = u \circ v_1 + \lambda u \circ v_2$$
   De plus $\phi(v_1) \in \mathcal{L}(E)$ donc $\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{L}(E).}$
3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\phi)$, il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ non nulle tel que $\phi(v) = \lambda v$.
   Comme v est non nulle, il existe $x \in E$ tel que $v(x) \neq 0$. De plus $\phi(v)(x) = u(v(x)) = \lambda v(x)$
   Donc $v(x)$ est un vecteur propre de u et $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$
   $$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\phi) \subset \mathrm{Sp}\,(u)}$$
4. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$, il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$.

   Considérons p_x une projection sur Vect x parallèlement à un supplémentaire de Vect x.
   Soit $y \in E$.
   $p_x(y) \in$ Vect x donc $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $p_x(y) = \alpha x$
   $$\phi(p_x)(y) = u(p_x(y)) = u(\alpha x) = \alpha \lambda x = \lambda p_x(y)$$
   p_x est un vecteur propre de ϕ associé à λ.
   $$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\phi) = \mathrm{Sp}\,(u)}$$

5. (a) Soit $v \in E_\lambda(\phi)$ et soit $y \in E$

$\phi(v)(y) = u(v(y)) = \lambda v(y)$ donc $v(y) \in E_\lambda(u)$ et $\boxed{\text{Im } (v) \subset E_\lambda(u)}$

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que Im $(v) \subset E_\lambda(u)$ alors

soit $y \in E$, $v(y) \in E_\lambda(u)$ et donc $u(v(y)) = \lambda v(y)$ et finalement $\phi(v) = \lambda v$.

$$\boxed{v \in E_\lambda(\phi) \Leftrightarrow \text{Im } (v) \subset E_\lambda(u)}$$

(b) Donc $\dim(E_\lambda(\phi)) = \dim(\mathcal{L}(E, E_\lambda(u))) = n \dim(E_\lambda(u))$

6. ϕ est diagonalisable ssi $\displaystyle\sum_{\lambda \in \text{Sp }(\phi)} \dim(E_\lambda(\phi)) = \dim(\mathcal{L}(E))$

ssi $\displaystyle\sum_{\lambda \in \text{Sp }(\phi)} n \dim(E_\lambda(u)) = n^2$ ssi $\displaystyle\sum_{\lambda \in \text{Sp }(u)} \dim(E_\lambda(u)) = n$

D'où $\boxed{u \text{ est diagonalisable ssi } v \text{ est diagonalisable.}}$

Exercice sans préparation S19

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On cherche à déterminer la probabilité qu'il soit possible de dessiner un triangle dont les trois côtés soient de longueurs respectives X, Y et Z.

1. Compléter le programme Scilab, pour qu'il donne une valeur approchée de cette probabilité.

```
n=1000;
X=
Y=
Z=
N=0;
for i=1:n



end;
p=
disp(p);
```

2. Calculez cette probabilité.

Solution :

1. Il est en fait plus simple de simuler la probabilité qu'il ne soit pas possible de dessiner le triangle : $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(X+Y<Z) - \mathbb{P}(X+Z<Y) - \mathbb{P}(Y+Z<X) = 1 - 3\mathbb{P}(X+Y<Z)$.

```
n=1000;
X=grand(n,1,"exp",1);
Y=grand(n,1,"exp",1);
Z=grand(n,1,"exp",1);
N=0;
for i=1:n if X(i,1)+Y(i,1)<Z(i,1) then  N=N+1
                   end
 end;
p=1-3*N/n;
disp(p);
```

2. On cherche alors la loi de $X+Y$ avec la formule de convolution, les variables sont indépendantes
$f_{X+Y}(x) = x\exp(x)\ \forall x \in \mathbb{R}_+$ (simple calcul)
Une densité de $-Z$ est donnée par $x \mapsto \exp(x)$ pour $x \leqslant 0$.
Donc une densité f_U de $U = X+Y-Z$ est donnée par :
Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $f_U(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X+Y}(t) f_Z(u-t)\,\mathrm{d}t$.
$f_{X+Y}(t)f_Z(u-t) \neq 0$ ssi $t \geqslant 0$ et $u - t \leqslant 0$ ie $t \geqslant u$.
Seules les valeurs u négatives nous intéressent :
si $u < 0$, $f_U(u) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t.e^{-t}e^{u-t}\,\mathrm{d}t = e^u \int_0^{+\infty} te^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}e^u$.
(on reconnait $\dfrac{1}{2}\mathbb{E}(T)$ avec $T \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$.)
Et finalement $\mathbb{P}(X+Y<Z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4}e^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}$.
$\boxed{\mathbb{P}(A) = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}.}$