SUJET S1

Exercice principal S1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.

Soit S_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre (n,p) et $x > 0$. On pose $q = 1 - p$.

1. **Question de cours :** inégalité de Markov.
2. Soit $\lambda > 0$. Montrer que :
$$\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - np)})}{\mathrm{e}^{n\lambda x}}$$
3. Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - np)}) = (p\mathrm{e}^{\lambda q} + q\mathrm{e}^{-\lambda p})^n$.
4. On admet pour l'instant que, pour tout réel t, $\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{t^2} + t$.
Montrer, en utilisant cette inégalité, que :
$$\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \mathrm{e}^{n(\lambda^2 - \lambda x)}.$$
puis en déduire que :
$$\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{4}}.$$
5. Expliquer comment on démontrerait de la même façon que :
$$\mathbb{P}(S_n - np \leqslant -nx) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{4}}.$$
6. En déduire :
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant x\right) \leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{4}}.$$
Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
7. Dans cette dernière question, on revient sur l'inégalité admise à la question 4. Etudier la fonction $f : t \mapsto e^{t^2 - t} + t\mathrm{e}^{-t}$ et en déduire l'inégalité admise à la question 4.

Solution :

1. Question de cours : programme ECS1 2013 p. 24.
2. Soit $\lambda > 0$. Comme $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ est une bijection strictement croissante :
$$\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) = \mathbb{P}(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - np)} \geqslant \mathrm{e}^{n\lambda x})$$
puis par l'inégalité de Markov :
$$\boxed{\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - np)})}{\mathrm{e}^{n\lambda x}}}$$
3. Par le théorème de transfert :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - np)}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\lambda(k-np)}\mathbb{P}(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \mathrm{e}^{\lambda(k-np)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda np}(p\mathrm{e}^{\lambda} + q)^n \text{ par la formule du binôme} \\
&= \boxed{(p\mathrm{e}^{\lambda q} + q\mathrm{e}^{-\lambda p})^n}
\end{aligned}$$
comme demandé.

4. On applique l'inégalité admise avec $t = \lambda q$ et $t = -\lambda p$. On en déduit :

$$\begin{aligned} p\mathrm{e}^{\lambda q} + q\mathrm{e}^{-\lambda p} &\leqslant p(e^{\lambda^2 q^2} + \lambda q) + q(e^{\lambda^2 p^2} - \lambda p) \\ &\leqslant p\mathrm{e}^{\lambda^2 q^2} + q\mathrm{e}^{\lambda^2 p^2} \\ &\leqslant p\mathrm{e}^{\lambda^2} + q\mathrm{e}^{\lambda^2} \text{ car } p^2 \leqslant 1 \text{ et } q^2 \leqslant 1 \\ &\leqslant e^{\lambda^2} \text{ car } p + q = 1 \end{aligned}$$

Alors $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - np)}) \leqslant e^{n\lambda^2}$ d'où finalement :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \mathrm{e}^{n(\lambda^2 - \lambda x)}}$$

Cette inégalité, dont le premier membre ne dépend pas de λ est vraie pour tout λ. Or, à $x > 0$ fixé, la fonction $\lambda \mapsto \lambda^2 - \lambda x$ atteint son minimum pour la valeur $\lambda_0 = \dfrac{x}{2}$ et ce minimum vaut alors $-\dfrac{x^2}{4}$. On en déduit donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{4}}}$$

5. On démarre de la même façon en écrivant :

$$\mathbb{P}(S_n - np \leqslant -nx) = \mathbb{P}(\lambda(n - S_n) \geqslant \lambda nx) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda(np - S_n)})}{\mathrm{e}^{n\lambda x}}$$

Il suffit alors de reprendre les calculs précédents en remplaçant λ par $-\lambda$ et on obtient le même majorant à l'arrivée.

6. Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant x\right) &= \mathbb{P}(|S_n - np| \geqslant nx) \\ &= \mathbb{P}(S_n - np \geqslant x) + \mathbb{P}(S_n - np \leqslant -nx) \\ &\leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{4}} \end{aligned}$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne simplement :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant x\right) \leqslant \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{x^2} = \frac{p(1-p)}{nx^2}$$

L'inégalité de Bernstein $\boxed{\text{est nettement meilleure}}$ pour les grandes valeurs de n puisque l'exponentielle va plus vite vers zéro.

7. On revient sur la preuve de l'inégalité utilisée dans la question 4. Cette preuve a été reportée en fin d'exercice car elle est essentiellement technique.
On suit l'indication de l'énoncé et donc, soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^{t^2 - t} + t\mathrm{e}^{-t}$. La fonction f est dérivable et, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = (2t-1)\mathrm{e}^{t^2 - t} + (1-t)\mathrm{e}^{-t} = [(2t-1)\mathrm{e}^{t^2} + (1-t)]\mathrm{e}^{-t}$$

Le signe de $f'(t)$ est donc le même que celui de $\varphi(t) = (2t-1)\mathrm{e}^{t^2} + (1-t)$. La fonction φ ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(t) = (4t^2 - 2t + 2)\mathrm{e}^{t^2} - 1$$

La fonction $t \mapsto 4t^2 - 2t + 2$ admet un minimum en $t_0 = \dfrac{1}{4}$ et ce minimum est égal à $\dfrac{7}{4}$. On en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) \geqslant \frac{7}{4}\mathrm{e}^{t^2} - 1 \geqslant \frac{7}{4} - 1 > 0$$

La fonction φ est donc croissante. Or $\varphi(0) = 0$ donc φ est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. Il en est donc de même pour f' et la fonction f admet donc un minimum en $t = 0$. Or $f(0) = 1$. On en déduit donc que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) \geqslant 1 \text{ soit } \boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{t^2} + t}$$

Exercice sans préparation S1

Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$$

1. Donner une expression de $f(x)$ en fonction de x.
2. Dessiner le graphe de f sur $[0, 4[$.
3. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Solution :

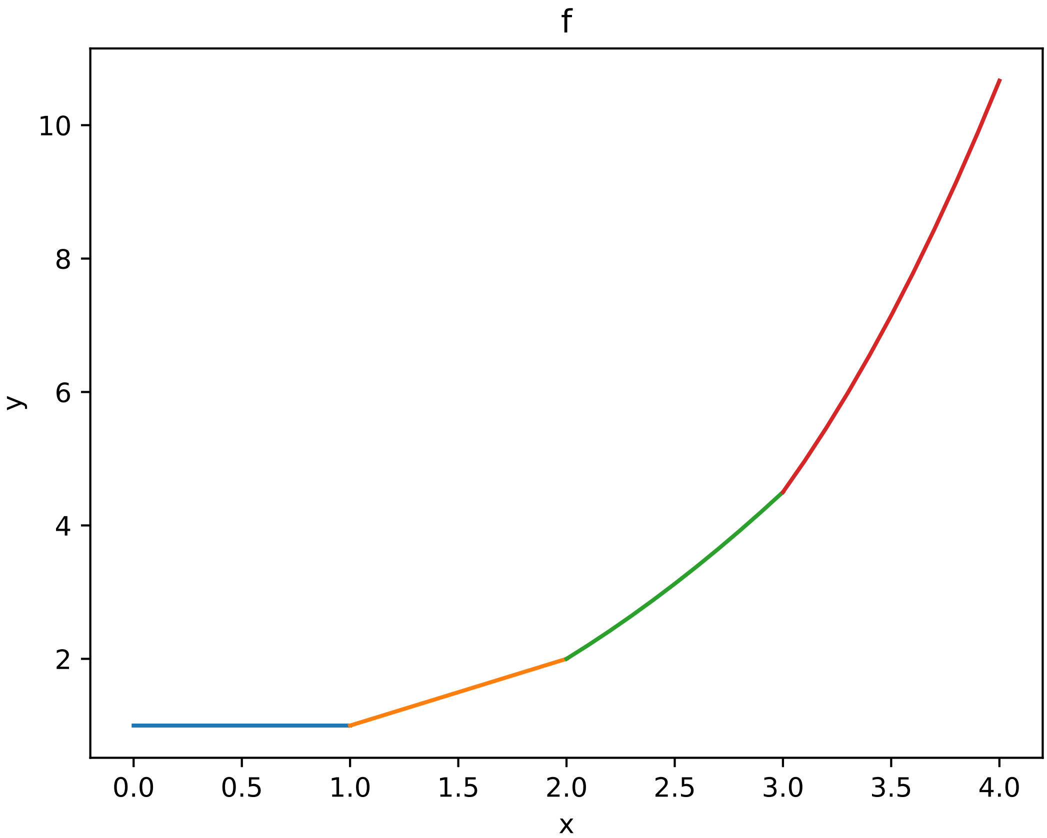
1. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [k, k+1[$ (on a ainsi $k = \lfloor x \rfloor$) . Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$

$$u_n(x) \leqslant u_{n+1}(x) \Leftrightarrow n+1 \leqslant x \Leftrightarrow n \leqslant x-1 \Leftrightarrow n < \lfloor x \rfloor$$

   Donc $u_0(x) \leqslant u_1(x) \leqslant .... \leqslant u_k(x) > u_{k+1}(x) > u_{k+2}(x)......$

$$f(x) = \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{(\lfloor x \rfloor)!}$$

2. Sur le dessin, on voit la continuité mais pas la dérivabilité .



3. f est continue et C^1 sur $\mathbb{R}^+$ privé de $\mathbb{N}^*$. Etude en k

$$\lim_{\substack{x \to k \\ x < k}} f(x) = \frac{k^k}{k!} = \frac{k^{k-1}}{(k-1)!} \text{ et } \lim_{\substack{x \to k \\ x > k}} f(x) = \frac{k^{k-1}}{(k-1)!} = f(k).$$

f est bien continue sur $\mathbb{R}$.
On peut faire aussi chercher les dérivée à droite et à gauche
(qui valent respectivement $\dfrac{k^{k-1}}{(k-1)!}$ et $\dfrac{k^{k-2}}{(k-2)!}$ si $k \geqslant 2$, et 0 et 1 si $k = 1$)

SUJET S2

Exercice principal S2

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, non identiquement nulle, et à valeurs positives.
Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

1. **Question de cours :** Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
2. Justifier que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que pour tout n entier vérifiant $n \geqslant 1$, il existe une base orthogonale $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que :
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \left\{ \begin{array}{l} \deg(P_k) = k \\ \text{et } P_k \text{ est unitaire} \end{array} \right.$$
4. Montrer que P_1 admet une racine dans $[0,1]$.
5. Soit $k \geqslant 1$. On souhaite montrer que P_k admet exactement k racines réelles simples, toutes dans $[0,1]$.
Soit $j \in [\![0,k]\!]$, et supposons que P_k admette exactement j racines distinctes dans $[0,1]$ qui soient d'ordre de multiplicité impaire, notées (dans le cas où $j \geqslant 1$) $a_1, a_2, \ldots, a_j$.
On note alors $Q(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{j}(X - a_i)$ si $j \neq 0$ et $Q(X) = 1$ si $j = 0$.
   (a) Étudier le signe de $t \mapsto P_k(t)Q(t)$ sur $[0,1]$.
   (b) Montrer que $P_k(X)Q(X) = 0$ si $j < k$.
   (c) Conclure.
6. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, le polynôme $(P_k)^2 + 1$ n'admet que des racines complexes, toutes simples.

Solution :

1. Programme officiel ECS1 page 7.
2.
   - L'application φ est clairement bien définie, symétrique, et bilinéaire par linéarité de l'intégrale.
   - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\left(P(t)\right)^2 \mathrm{d}t$.
   Comme $t \mapsto f(t)\left(P(t)\right)^2$ est continue positive, et que les bornes d'intégration sont dans le bon ordre, on a bien $\varphi(P,P) \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
   - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$.
   La fonction $t \mapsto f(t)\left(P(t)\right)^2$ étant continue positive d'intégrale nulle, elle est alors nulle sur $[0,1]$.
   On a donc : $\forall t \in [0,1], f(t)\left(P(t)\right)^2 = 0$.
   Comme f n'est pas identiquement nulle : il existe au moins un réel $c \in [0,1]$ tel que $f(c) \neq 0$.
   Comme f est continue en c, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in [0,1] \cap [c-\varepsilon, c+\varepsilon], f(t) \neq 0$.
   Ainsi, $\forall t \in [0,1] \cap [c-\varepsilon, c+\varepsilon], P(t) = 0$.
   Le polynôme P admet donc une infinité de racines, donc est nul.

   $\boxed{\varphi \text{ est donc bien un produit scalaire.}}$ Notons dans la suite $\|\cdot\|$ la norme associée.
3. On procède par récurrence, en appliquant la $\boxed{\text{méthode d'orthonormalisation de Schmidt}}$ à partir de la base canonique.
   - Notons $P_0 = \dfrac{1}{\|1\|}$: P_0 est un polynôme de degré 0.

- Soit $k \geqslant 0$.
Supposons qu'on ait défini une base orthonormée $(P_0, \ldots, P_k)$ de $\mathbb{R}_k[X]$ telle que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$.
Notons $e_{k+1} = X^{k+1} - \sum_{j=0}^{k} \varphi(X^{k+1}, P_k)P_k$.
Alors e_{k+1} est de degré $k+1$, donc n'appartient pas à $\mathbb{R}_k[X] = Vect(P_0, \ldots, P_k)$.
De plus, $\forall i \in [\![0, k]\!]$, $\varphi(e_{k+1}, P_i) = \varphi(X^{k+1}, P_i) - \varphi(X^{k+1}, P_i)\varphi(P_i, P_i) = 0$.
Ainsi, e_{k+1} est non nul, et orthogonal à $(P_0, \ldots, P_k)$.
Ainsi, en posant $P_{k+1} = \dfrac{e_{k+1}}{\|e_{k+1}\|}$, la famille $(P_0, \ldots, P_k, P_{k+1})$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_{k+1}[X]$, de cardinal $k+2 = \dim(\mathbb{R}_{k+1}[X])$, donc $\boxed{\text{une base orthonormée de } \mathbb{R}_{k+1}[X].}$

4. On sait que $1 \in$Vect(P_0), donc $P_1 \perp 1$: on doit avoir $\varphi(1, P_1) = 0$.

$$\forall t \in [0,1], \quad \int_0^1 f(t)P_1(t)\mathrm{d}t = 0.$$

La fonction P_1 est continue sur $[0,1]$, donc est bornée et atteint ses bornes.
Comme $\forall t \in [0,1]$, $\min\limits_{u\in[0,1]}(P_1(u)) \leqslant P_1(t) \leqslant \max\limits_{u\in[0,1]}(P_1(u))$, en multipliant par $f(t) \geqslant 0$ et en intégrant (positivité de l'intégrale), on obtient :

$$\min_{u\in[0,1]}(P_1(u)) \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leqslant 0 \leqslant \max_{u\in[0,1]}(P_1(u)) \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

Comme f est positive non identiquement nulle, on a $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t > 0$, donc nécessairement :
$\min\limits_{[0,1]} P_1 \leqslant 0 \leqslant \max\limits_{[0,1]} P_1$.
Par Théorème des Valeurs Intermédiaires, $\boxed{P_1 \text{ s'annule donc au moins une fois sur } [0,1]}$ (et c'est la seule racine réelle puisque $\deg(P_1) = 1$)

5. Soit $k \geqslant 1$.
   (a) Remarquons que pour tout $k \geqslant 1$, $P_k \perp 1$ donc comme dans 4, P_k admettra toujours au moins une racine dans $[0,1]$.
   Notons $a_1, \ldots, a_j$ les racines d'ordre impair de P_k dans $[0,1]$, de multiplicités respectives $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$.
   Notons $b_1, \ldots, b_m$ les (éventuelles) racines d'ordre pair de P_k dans $[0,1]$, de multiplicités resp. $\beta_1, \ldots, \beta_m$.
   Remarquons qu'on peut factoriser P_k sous la forme

$$P_k = \prod_{i=1}^{j}(X - a_i)^{\alpha}_i \cdot \prod_{i=1}^{m}(X - b_i)^{\beta_i} \cdot R_k(X),$$

   où R_k est un polynôme n'admettant pas de racines dans $[0,1]$ donc de signe constant sur $[0,1]$ car continu.
   Alors, on a :

$$P_k(X)Q(X) = \prod_{i=1}^{j}(X - a_i)^{\alpha_i+1} \cdot \prod_{i=1}^{m}(X - b_i)^{\beta_i} \cdot R_k(X)$$

   Ainsi, $P_k(t)Q(t)$ est toujours du signe de $R_k(t)$ sur $[0,1]$, donc toujours $\boxed{\text{de signe constant.}}$
   (b) Supposons $j < k$. Alors $Q(X) \in \mathbb{R}_j[X]$ =Vect$(P_0, \ldots, P_j)$. Donc P_k est orthogonal à Q.

$$\varphi(P_k, Q) = \int_0^1 f(t)P_k(t)Q(t)\mathrm{d}t = 0$$

   Or, la fonction $t \mapsto f(t)P_k(t)Q(t)$ est continue, de signe constant, d'intégrale nulle, donc est nulle sur $[0,1]$.
   Comme à la question 1, on montre que $\boxed{\text{le polynôme } P_kQ}$ est nul car admet une infinité de racines.
   (c) Or, P_k est de degré $k \geqslant 1$ et on a toujours $Q \neq 0$, donc c'est absurde d'avoir $P_kQ = 0$.
   Ainsi, on a nécessairement $j = k$. Ainsi, P_k admet exactement k racines réelles dans $[0,1]$, d'ordre de multiplicité impaire, donc toutes ses racines d'ordre de multiplicité 1 nécessairement, donc
   $\boxed{\text{toutes simples, et toutes dans } [0,1].}$

6. Soit $k \geqslant 1$.
Déjà, pour tout réel t, on a $(P_k(t))^2 + 1 > 0$, donc $P_k^2 + 1$ ne peut pas avoir de racines réelles.

Supposons que $P_k^2 + 1$ admette une racine au moins double $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On aurait :

$$2P_k(\alpha)P_k'(\alpha) = 0$$

Donc α serait racine de P_k ou racine de P_k'.
Or, P_k admet k racines réelles uniquement, donc $P_k(\alpha) \neq 0$.
De plus, en notant toujours $a_1 < \cdots < a_k$ les racines de P_k, en appliquant Rolle sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ ($i \in [\![1, k-1]\!]$), P_k' s'annule déjà au moins $k-1$ fois (une fois sur chacun de ces intervalles), en étant de degré $k-1$.
Donc P_k' admet exactement $k-1$ racines, toutes réelles.
Ainsi, $\boxed{P_k^2 + 1 \text{ ne peut pas avoir de racine double.}}$

Exercice sans préparation S2

On dispose d'un dé à 6 faces non pipé.
Proposer une méthode pour effectuer un tirage au sort équitable entre 24 individus (c'est à dire un tirage uniforme entre 1 et 24) en au plus 3 lancers.
Implémenter la méthode avec Scilab et proposer un programme qui affiche un histogramme permettant de valider la méthode proposée.

Solution :

On lance le dé 6 fois, on modélise par $X_1, ..., X_3$, 3 variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[\![1, 6]\!]$.

On divise les 24 résultats possibles en quatre "lots" de 6

On utilise les deux derniers lancers pour déterminer quel sous ensemble choisit parmi les quatre, en fonction de la valeur de ces deux derniers lancers par rapport à 3.

$X = X_1 + 12 * \mathbb{1}_{[X_2 \leqslant 3]} + 6 * \mathbb{1}_{[X_3 \leqslant 3]}$.

On peut écrire le programme Scilab suivant :

```
Ntest=50000;
test=[];
for i=1:Ntest
    de=grand(3,1,"uin",1,6);
    choix=de(1);
    if de(2)<4 then choix=choix+de(2)*12
               end
    if de(3)<4 then choix=choix+de(3)*6
               end
    test=[test,choix];
end;
histplot(0.5:25,test)
```

SUJET S3

Exercice principal S3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne canonique.

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n)^2 \,\mathrm{d}t$.

1. **Question de cours :** Donner une condition suffisante pour qu'une fonction de plusieurs variables admette des extrema globaux sur un ensemble donné.
2. Montrer que la fonction f est bien définie.
3. On note $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $M = ((i+j)!)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$

   Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $u = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$

   Montrer que $f(x) = {}^t u M u$
4. (a) On admet que pour tout $u \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, si $u \neq 0$ alors ${}^t u M u > 0$
   Montrer que les valeurs propres de M sont toutes strictement positives.

   (b) En déduire qu'il existe un réel A strictement positif tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:
   $$f(x) \geqslant A \,||x||^2$$
5. En déduire que f admet un minimum global.
   On notera $a = (a_1, \dots, a_n)$ un point où ce minimum est atteint.
6. (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k! + (k+1)!a_1 + \cdots + (k+n)!a_n = 0$.

   (b) On pose $P(X) = 1 + a_1(X+1) + a_2(X+1)(X+2) + \cdots + a_n(X+1)(X+2)\cdots(X+n)$.
   Montrer que $P(X) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}(X-1)(X-2)\cdots(X-n)$.

   (c) Montrer que $f(a) = P(0) = \dfrac{1}{n}$.

Solution :

1. Programme officiel ECS2 page 19.
2. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
   Soit la fonction $g : t \mapsto e^{-t}(1 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n)^2$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. De plus, $g(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\mathrm{t}^2}\right)$ par croissances comparées, donc $\boxed{\text{l'intégrale } f(x) \text{ converge}}$ par domination.
3. Par linéarité (toutes les intégrales convergent par le même raisonnement qu'à la question précédente), on

trouve que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}(1+x_1t+x_2t^2+\cdots+x_nt^n)^2\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t + 2\sum_{k=1}^n x_k \int_0^{+\infty} t^k k e^{-t}\,\mathrm{d}t + + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j \int_0^{+\infty} t^{i+j}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + 2\sum_{k=1}^n k!x_k + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (i+j)!x_ix_j \\
&= \sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^n (i+j)!x_ix_j \text{ en notant } x_0 = 1 \\
&\boxed{= u^TMu}
\end{aligned}$$

Remarque : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{i+j}e^{-t}\,\mathrm{d}t = (i+j)!$ en utilisant la densité d'une loi $\gamma(i+j)$, ou éventuellement par récurrence.

4. (a) Soit λ une valeur propre de M et u un vecteur propre associé
   Comme u est non nul, $u^TMu = \lambda\,||u||^2 > 0$.
   Donc $\boxed{\text{Toutes les valeurs propres de } M \text{ sont strictement positives.}}$

   (b) La matrice M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable d'après le théorème spectral et il existe donc une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ (on peut supposer $0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$) et une matrice orthogonale P telle que $M = PD^tP$. On peut alors écrire avec les notations précédentes, en posant $v = {}^tPu = (v_0,\ldots,v_n)$:

$$f(x) = {}^tuPD^tPu = {}^tvDv = \sum_{k=0}^n \lambda_k v_k^2 \geqslant \lambda_0\sum_{k=0}^n v_k^2 = \lambda_0\|v\|^2 = \lambda_0\|u\|^2 \boxed{\geqslant \lambda_0\|x\|^2.}$$

5. D'après la question précédente, il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| > r \Rightarrow f(x) > f(0)$.
   La fonction f étant polynômiale, elle est continue sur la boule fermée bornée $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant r\}$. Elle admet donc un minimum m sur $\mathcal{B}$. Par construction de r, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B},\ f(x) > f(0) \geqslant m$.
   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet donc un minimum global sur } \mathbb{R}^n.}$

6. (a) Puisque la fonction f est polynômiale, donc $\mathcal{C}^1$, sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$, le point a est un point critique, i.e. :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0.$$

   Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 2k! + 2\sum_{i=1}^n a_k(k+i)!$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ k! + \sum_{i=1}^n a_k(k+i)! = 0.}$$

   (b) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k!P(k) = k! + \displaystyle\sum_{i=1}^n a_k(k+i)! = 0$. Le polynôme P est de degré inférieur ou égal à n et admet n racines distinctes. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = \lambda(X-1)\cdots(X-n)$.
   Puisque $P(-1) = 1$, on trouve $\lambda = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

$$\boxed{P(X) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(X-1)\cdots(X-n).}$$

   (c) On a, par linéarité (toutes les intégrales convergent) :

$$\begin{aligned}
f(a) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}(1+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n)^2\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}(1+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^n a_k\int_0^{+\infty} t^ke^{-t}(1+x_1t+x_2t^2+\cdots+x_nt^n)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}(1+a_1 t+a_2 t^2+\cdots+a_n t^n)\,\mathrm{d}t = k!+a_1(k+1)!+a_2(k+2)!+\cdots+a_n(k+n)! = 0.$$

Ainsi :

$$f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(1+a_1 t+a_2 t^2+\cdots+a_n t^n)\,\mathrm{d}t = 1+\sum_{k=1}^{n} a_k k! = P(0) \boxed{= \frac{1}{n}}.$$

Exercice sans préparation S3

On tire (avec remise) une boule d'une urne contenant n boules distinctes. On note V la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois. Calculer l'espérance de V et trouver un équivalent quand n tend vers l'infini.

Proposer un programme Scilab pour tester ce résultat.

Solution :

Soit T_i le numéro de tirage lorsque i boules différentes ont été tirées au moins une fois. En notant $V_i = T_i - T_{i-1}$ et $V_1 = 1$, on a $V = V_1 + ... + V_n$. Or, V_i est égal au nombre de tirages pour tirer une des $n-(i-1)$ boules qui n'ont pas encore été tirées. V_i suit donc une loi géométrique de paramètre

$$p_i = \frac{n-(i-1)}{n}$$

D'où

$$E(V) = E(V_1) + ... + E(V_n) = \frac{1}{p_1} + ... \frac{1}{p_n} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1}}$$

En particulier $\boxed{E(V) \sim n \ln n}$ quand n tend vers l'infini.

On peut proposer le programme Scilab suivant :

```
n=30;
Ntest=10000;
esp=0;
E=0
compt=0;
for i=1:Ntest
 A=zeros(1,n);
 while sum(A)<n
    u=int(n*rand()+1);
    if A(u)==0 then
       A(u)=1 ;
    end
    compt=compt+1;
 end
end
 E=compt/Ntest;
 esp=E/(n*log(n));
disp(esp)
```

SUJET S4

Exercice principal S4

1. **Question de cours :** matrice hessienne en un point x.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 2$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ puis calculer les dérivées premières et les dérivées secondes de f.
3. (a) Déterminer le seul point critique $(a_1, \ldots, a_n)$ de f sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Vérifier que la hessienne de f en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$ où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.
4. Déterminer le rang de J_n.
   En déduire le spectre de J_n, puis celui de A_n.
5. Montrer que f admet un minimum local en $(a_1, \ldots, a_n)$ et préciser la valeur de ce minimum.
6. Dans cette dernière question, on va retrouver et préciser le résultat précédent par une méthode différente.
   Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\mathcal{C}_r$ la contrainte d'équation $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = r^2$ et $S_r = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = r^2 \right\}$.
   (a) Montrer que f admet un minimum global et un maximum global sous la contrainte $\mathcal{C}_r$.
   On note respectivement $m(r)$ et $M(r)$ la valeur de ce minimum et de ce maximum.
   (b) On admet que :

$$m(r) = \begin{cases} (n+1)r^2 - r\sqrt{n} & \text{si } 0 < r < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \\ r^2 - \dfrac{1}{4} & \text{si } r \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \end{cases} \quad \text{et} \quad M(r) = (n+1)r^2 + r\sqrt{n}$$

   En déduire que le minimum local obtenu à la question 5. est un minimum global.
   (c) Prouver le résultat admis à la question précédente.

Solution :

1. Question de cours : programme ECS2 2014 p. 19.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 2$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall n \in \mathbb{R}^n \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

   La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ car elle est polynomiale. Un calcul immédiat donne :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \partial_i f(x_1, \ldots, x_n) = 2x_i + 2\sum_{k=1}^{n} x_k - 1 = 4x_i + 2\sum_{k \neq i} x_k - 1}$$

   puis

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad \partial^2_{i,j} f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 4 & \text{si } j = i \\ 2 & \text{si } i \neq j \end{cases}}$$

3. (a) Le point $(a_1, \dots, a_n)$ est un point critique de f si et seulement si $\partial_i f(a_1, \dots, a_n) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Le n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$ est donc solution du système linéaire dont la matrice augmentée est :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant successivement pour i variant de 1 à $n-1$, les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$, on trouve $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ puis la dernière équation donne $a_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$.

Finalement l'unique point critique de f est :

$$\boxed{(a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{1}{2(n+1)}, \dots, \frac{1}{2(n+1)}\right)}$$

(b) On note $a = (a_1, \dots, a_n)$. Le résultat demandé découle directement du calcul des dérivées secondes. On remarque d'ailleurs que la hessienne ne dépend pas du point ce qui est normal car f est un polynôme de degré 2 en les x_k.

On a donc :

$$\boxed{\nabla f(a) = 2(I_n + J_n)}$$

4. La matrice J_n a toutes ses colonnes égales. Elle est donc au plus de rang 1. De plus, elle est non nulle. On a donc $\operatorname{rg} J_n = 1$.

Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim \operatorname{Ker}(J_n) = n-1$. Ainsi 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$.

On remarque par ailleurs que $J_n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

Ainsi, n est valeur propre de J_n. Comme le sous-espace propre associé à 0 est de dimension $n-1$, la dimension du sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre n est nécessairement 1 et alors, par argument de dimension, $\boxed{\operatorname{Sp} J_n = \{0, n\}}$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$J_n X = \lambda X \Leftrightarrow (I_n + J_n)X = (1+\lambda)X \Leftrightarrow A_n X = 2(1+\lambda)X$$

On en déduit donc que $\boxed{\operatorname{Sp} A_n = \{2, 2(n+1)\}}$

5. La matrice hessienne de f en $a = (a_1, \dots, a_n)$ n'admet que des valeurs propres strictement positives donc f admet un minimum local en ce point. Ce mininum est alors :

$$f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4(n+1)^2} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(n+1)}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(n+1)} = -\frac{n}{4(n+1)}$$

6. (a) Chercher les extrema globaux de f sous la contrainte $\mathcal{C}_r$ revient à chercher les extrema de la restriction de f à S_r. Or S_r est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ et f est continue sur $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet donc un minimum global et un maximum global sur } S_r.}$

(b) On remarque que $\mathbb{R}^n \backslash \{(0, \dots, 0)\} = \bigcup_{r>0} S_r$ et que $S_r \cap S'_r = \varnothing$ pour $r \neq r'$ avec r et r' dans $\mathbb{R}_+^*$.

Comme, pour tout $x \in S_r$, $f(x) \geqslant m(r)$, il suffit de montrer qu'il existe $r_1 > 0$ tel que $m(r_1) \leqslant m(r)$ pour tout $r > 0$ pour montrer que la fonction f admet un minimum global.

Or, pour $r \geqslant r_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, $m(r) = r^2 - \dfrac{1}{4} \geqslant r_0^2 - \dfrac{1}{4}$.

On peut par ailleurs remarquer que :

$$r_0^2 - \frac{1}{4} = (n+1)r_0^2 - r_0\sqrt{n}$$

Maintenant la fonction $r \mapsto (n+1)r^2 - r\sqrt{n}$ est une fonction polynomiale de degré 2 qui admet un minimum en

$$r_1 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

On peut vérifier que l'on a bien $0 < r_1 < r_0$ car $n+1 > n$.
Ainsi, pour tout $r \in]0, r_0]$: $m(r_1) \leqslant m(r)$. En particulier : $m(r_1) < m(r_0)$ et donc :

$$\forall r > 0 \quad m(r_1) \leqslant m(r) \text{ où } r_1 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

Or :

$$m(r_1) = (n+1)r_1^2 - r_1\sqrt{n} = \frac{1}{4}\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}\frac{n}{n+1} \boxed{= -\frac{1}{4}\frac{n}{n+1}}$$

En particulier $m(r_1) < 0 = f(0, \dots, 0)$.

Ainsi, la fonction f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ égal à $\boxed{-\frac{1}{4}\frac{n}{n+1}}$. On retrouve bien la valeur obtenue à la question 5.

(c) On note $g(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. La fonction g ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
Les points $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ où les extrema de f sous la contrainte $\mathcal{C}_r$ sont atteints sont nécessairement ceux pour lesquels $g(x) = r^2$ et pour lesquels il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \partial_i f(x) = \lambda \partial_i g(x)$$

soit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad 2(2-\lambda)x_i + 2\sum_{k \neq i} x_k = 1$$

La matrice augmentée de ce système est :

$$\tilde{B}_r = \begin{pmatrix} 2(2-\lambda) & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2(2-\lambda) & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2(2-\lambda) & & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2(2-\lambda) & 1 \end{pmatrix}$$

On suppose d'abord $\lambda \neq 1$. Sous cette hypothèse, on peut résoudre le système par les mêmes opérations élémentaires sur les lignes et colonnes que pour le système de la question 3.(a) et on obtient de même que $x_1 = \dots = x_n$.
On a alors $2(n+1-\lambda)x_1 = 1$ et donc nécessairement, pour qu'il existe une solution, $\lambda \neq n+1$. Alors :

$$x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{2(n+1-\lambda)}$$

La contrainte $g(x) = r^2$ donne alors la condition :

$$\frac{n}{4(n+1-\lambda)^2} = r^2$$

soit :

$$\lambda = \lambda_1 = n+1+\frac{\sqrt{n}}{2r} \text{ ou } \lambda = \lambda_2 = n+1-\frac{\sqrt{n}}{2r}$$

On remarque que $\lambda_1 \neq n+1$ et $\lambda_2 \neq n+1$. De même $\lambda_1 \neq 1$. Par contre :

$$\lambda_2 = 1 \iff r = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Pour la valeur $r = r_0 = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, la valeur λ_2 est donc à éliminer.
De plus, pour $\lambda = \lambda_1$, alors :

$$x_1 = \dots = x_n = -\frac{r}{\sqrt{n}} \text{ et } f(x_1, \dots, x_n) = (n+1)r^2 + r\sqrt{n}$$

tandis que pour $\lambda = \lambda_2$, alors :

$$x_1 = \ldots = x_n = \frac{r}{\sqrt{n}} \text{ et } f(x_1, \ldots, x_n) = (n+1)r^2 - r\sqrt{n}$$

Regardons maintenant ce qui se passe dans le cas où $\lambda = 1$. Le système ne contient alors qu'une seule équation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2}$. A cela s'ajoute la contrainte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = r^2$. S'il existe un $x = (x_1, \ldots, x_n)$ qui vérifie ces deux équations, on a donc nécessairement :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = r^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = r^2 - \frac{1}{4}$$

A r fixé, on peut remarquer que :

$$r^2 - \frac{1}{4} \leqslant (n+1)r^2 - r\sqrt{n} \leqslant (n+1)r^2 + r\sqrt{n}$$

avec égalité dans la première inégalité si et seulement si $r = r_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
Il est donc essentiel de savoir s'il existe un $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant les deux conditions :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = r^2$$

Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1}$$

Ainsi, si un x vérifie les deux contraintes demandées, nécessairement :

$$\frac{1}{2} \leqslant r\sqrt{n} \quad \text{soit} \quad r \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Pour $r = r_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, on remarque que $x = \left(\dfrac{1}{2n}, \ldots, \dfrac{1}{2n}\right)$ vérifie les deux conditions et par homothétie on pourra trouver un tel x pour $r > r_0$.
Comme déjà remarqué, à r fixé :

$$r^2 - \frac{1}{4} \leqslant (n+1)r^2 - r\sqrt{n} \leqslant (n+1)r^2 + r\sqrt{n}$$

Comme l'on sait déjà que $m(r)$ et $M(r)$ existent, on peut affirmer à partir des calculs précédents que :

$$\boxed{m(r) = \begin{cases} (n+1)r^2 - r\sqrt{n} & \text{si } 0 < r < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \\ r^2 - \dfrac{1}{4} & \text{si } r \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \end{cases} \quad \text{et} \quad M(r) = (n+1)r^2 + r\sqrt{n}}$$

Remarquons que les calculs précédents permettent également de retrouver que le minimum est atteint en $a = \left(\dfrac{1}{2(n+1)}, \ldots, \dfrac{1}{2(n+1)}\right)$.

Exercice sans préparation S4

Le métro automatique de la ligne 14 s'arrête à 9 stations numérotées de 0 à 8.
Il démarre à la station 0.
Quand il arrive à la station n$^{\text{o}}$ 8 ou à la station n$^{\text{o}}$ 0, il fait demi tour, et poursuit un mouvement de balancier entre ces deux stations.

On suppose qu'il s'arrête 1 min à chaque station avec un temps de trajet négligeable entre deux stations. (*à la minute 1, il est à la station* 1, *à la minute 2, il est à la station* 2, *à la minute 8, il est à la station 8, à la minute 9, il est la station 7)*

Un voyageur s'endort à la station n$^{\text{o}}$ 0. Son temps de sommeil T, compté en minute suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On note X le numéro de la station à laquelle il se réveille.
Déterminer la loi de X

Solution :

$X(\Omega) = [\![0,8]\!]$.
Le métro fait un aller-retour en 16 minutes et sa position est donc 16-périodique.
On note $q = 1-p$.

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(T \in 16\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 16k) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{16k-1}p = \boxed{\frac{pq^{15}}{1-q^{16}}}$$

$$\mathbb{P}(X=8) = \mathbb{P}(X \in 16\mathbb{N}+8) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 16k+8) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{16k+7}p = \boxed{\frac{pq^{7}}{1-q^{16}}}$$

Pour $i \in [\![1,7]\!]$, lors de son premier aller-retour, le métro sera à la station i aux minutes i et $16-i$.

$$\mathbb{P}(X=i) = \mathbb{P}(T \in 16\mathbb{N}+i) + \mathbb{P}(T \in 16\mathbb{N}+16-i) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 16k+i) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 16k+16-i)$$

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{16k+i-1}p + \sum_{k=0}^{+\infty} q^{16k+16-i-1}p = \boxed{\frac{pq^{i-1}}{1-q^{16}} + \frac{pq^{15-i}}{1-q^{16}}}$$

Idée de question supplémentaire : écrire un programme SCILAB simulant le trajet du métro jusqu'au réveil du voyageur et donnant la valeur de X

```
function x=X(p);
position=1;
sens=1;
a=rand();
While a>p

  if (position=0) or (position=8)
  then sens=(-1)*sens
  end;
  position=position+sens
  a=rand()
end
x=position;
endfunction
```

SUJET S5

Exercice principal S5

Soit a un réel de $]0,1[$ qu'on suppose inconnu. Soit X une variable aléatoire réelle telle que :

- $\mathbb{P}([X \leqslant a]) = \dfrac{1}{2}$.
- la loi conditionnelle de X sachant $[X \leqslant a]$ est la loi uniforme sur $[0,a]$.
- la loi conditionnelle de X sachant $[X > a]$ est la loi uniforme sur $[a,1]$.

1. **Question de cours :** Énoncer le théorème central limite.
2. Montrer que la variable aléatoire X est à densité, dont une densité f_X est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ \dfrac{1}{2(1-a)} & \text{si } a < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
3. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer en fonction de a.
4. Établir que l'on a $\dfrac{1}{12} \leqslant \mathbb{V}[X] \leqslant \dfrac{1}{8}$.
5. On considère $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, toutes de même loi que X.

   On note pour tout $n \geqslant 1$, $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Déterminer deux réels β et γ ($\beta \neq 0$) tels que $T_n = \beta\overline{X_n} + \gamma$ soit un estimateur sans biais de a.

   (b) Montrer que T_n est un estimateur convergent de a.

   (c) Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer que $\left[T_n - \dfrac{1}{\sqrt{2n\alpha}}, T_n + \dfrac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right]$ est un intervalle de confiance de a au niveau de confiance $1-\alpha$.

   (d) On pose pour tout $\alpha \in]0,1[$, $u_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Monter que l'intervalle $\left[T_n - \dfrac{1}{\sqrt{2n}}u_\alpha, T_n + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}u_\alpha\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a au niveau de confiance $1-\alpha$.

Solution :

1. Programme officiel ECS2 page 29.
2. D'après la définition de X, on voit que $X(\Omega) \subset [0,1]$ presque-sûrement.
   - Pour $x < 0$, $F_X(x) = 0$.
   - Pour $x \geqslant 1$, $F_X(x) = 1$.
   - Soit $x \in [0,a]$. Alors :
   $$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}([X \leqslant a] \cap [X \leqslant x]) = \mathbb{P}(X \leqslant a)\mathbb{P}_{[X\leqslant a]}(X \leqslant x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{a} = \frac{x}{2a}$$
   - Soit $x \in [a,1]$. Alors :
   $$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}([X \leqslant a] \cup [a < X \leqslant x]) = \mathbb{P}(X \leqslant a) + \mathbb{P}(X > a] \cap [a < X \leqslant x]) \\ &= \frac{1}{2} + \mathbb{P}(X > a)\mathbb{P}_{[X>a]}(a < X \leqslant x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-a}{1-a} = \frac{x+1-2a}{2(1-a)} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de répartition de X est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{2a} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ \dfrac{x+1-2a}{2(1-a)} & \text{si } a \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

La fonction de répartition F_X est clairement continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{0, a, 1\}$ ce qui suffit, donc X est bien une variable aléatoire à densité. On peut donner comme densité par exemple la fonction f_X donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ \dfrac{1}{2(1-a)} & \text{si } a < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

3. La variable aléatoire X est bornée puisque $X(\Omega) = [0, 1]$, donc X admet bien une espérance et une variance.

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 t f_X(t) dt = \int_0^a \frac{t}{2a} dt + \int_a^1 \frac{t}{2(1-a)} dt = \frac{1}{2a} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2(1-a)} \cdot \frac{1-a^2}{2} = \frac{a}{4} + \frac{1+a}{4} \boxed{= \frac{1+2a}{4}}$$

Par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 t^2 f_X(t) dt = \int_0^a \frac{t^2}{2a} dt + \int_a^1 \frac{t^2}{2(1-a)} dt = \frac{1}{2a} \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{1}{2(1-a)} \cdot \frac{1-a^3}{3} = \frac{a^2}{6} + \frac{1+a+a^2}{6} \boxed{= \frac{1+a+2a^2}{6}}$$

Donc :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1+a+2a^2}{6} - \frac{(1+2a)^2}{16} = \frac{8(1+a+2a^2) - 3(1+4a+4a^2)}{48} = \frac{5-4a+4a^2}{48} = \boxed{\frac{(2a-1)^2+4}{48}}$$

4. D'après ce qui précède, on a :

$$\mathbb{V}[X] = \frac{(2a-1)^2+4}{48} \geqslant \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$

et

$$\mathbb{V}[X] = \frac{(2a-1)^2+4}{48} < \frac{1+4}{48} \leqslant \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$$

5. (a) Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}[X_1] = \frac{1+2a}{4}$$

On voit donc qu'en particulier $\mathbb{E}\left[\dfrac{4\overline{X_n} - 1}{2}\right] = a$.

Il suffit donc de poser $\boxed{T_n = 2\overline{X_n} - \frac{1}{2} \text{ pour obtenir un estimateur sans biais de } a.}$

(b) D'après la loi faible des grands nombres, $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers $\dfrac{1+2a}{4}$

$x \mapsto \dfrac{4x-1}{2}$ est continue donc $\boxed{T_n \text{ converge en probabilité vers } a.}$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T_n - \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}} \leqslant a \leqslant T_n + \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right) &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{2n\alpha}} \leqslant T_n - a \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}[T_n]| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right)\\
&= 1 - \mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}[T_n]| > \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right)\\
&\geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}[T_n]}{\left(\frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right)^2}\\
&= 1 - 2n\alpha\mathbb{V}[T_n]\\
&= 1 - 2n\alpha\left(\frac{4}{n}\mathbb{V}[X_1]\right) (les X_i \text{ sont indépendants})\\
&= 1 - 8\mathbb{V}[X_1]\alpha\\
&\geqslant 1 - \alpha
\end{aligned}$$

$\boxed{\left[T_n - \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}, T_n + \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right] \text{ est un intervalle de confiance de } a \text{ au niveau de confiance } 1-\alpha.}$

(d) En utilisant le théorème central limite $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X_n} - \frac{2a+1}{2}}{\sigma(X)}$ converge en loi vers $N \hookrightarrow N(0,1)$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \frac{2a+1}{4}}{\sigma(X)} \in [-u_\alpha, u_\alpha]\right) = 1 - \alpha$$

Or $\overline{X_n} = \dfrac{2T_n + 1}{4}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{T_n - a}{2\sigma(X)} \in [-u_\alpha, u_\alpha]\right) = 1 - \alpha$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(T_n - a \in \left[-u_\alpha\sqrt{\frac{4\mathbb{V}(X)}{n}}, u_\alpha\sqrt{\frac{4\mathbb{V}(X)}{n}}\right]\right) = 1 - \alpha$$

Or $\mathbb{V}[X] \leqslant \dfrac{1}{8}$ donc

$$\mathbb{P}\left(T_n - a \in \left[-u_\alpha\sqrt{\frac{4\mathbb{V}(X)}{n}}, u_\alpha\sqrt{\frac{4\mathbb{V}(X)}{n}}\right]\right) \leqslant \mathbb{P}\left(T_n - a \in \left[-u_\alpha\sqrt{\frac{1}{2n}}, u_\alpha\sqrt{\frac{1}{2n}}\right]\right)$$

$\boxed{\left[T_n - \frac{1}{\sqrt{2n}}u_\alpha, T_n + \frac{1}{\sqrt{2n}}u_\alpha\right] \text{ est un intervalle de confiance asymptotique de } a \text{ de niveau } 1-\alpha.}$

Exercice sans préparation S5

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.

Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ ,\ AM = MA\}$.

Solution :

Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. On vérifie sans peine que $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (en tant que noyau de l'endomorphisme $M \mapsto AM - MA$).
Puisque $A^2 = 0$, $f^2 = 0$, et ainsi $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Puisque $f \neq 0$ (car $A \neq 0$), le théorème du rang assure nécessairement que $\operatorname{rg} f = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.
Soit (e_1) une base de $\operatorname{Im} f$. En ajoutant un vecteur $e_2 \in \operatorname{Ker} f \setminus \operatorname{Im} f$, on obtient une famille libre donc une base de $\operatorname{Ker} f$. Soit e_3 un antécédent de e_1 par f. Puisque $e_1 \neq 0$, $e_3 \notin \operatorname{Ker} f$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est alors une famille libre de cardinal $3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base la matrice de f est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

en notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{A et B sont semblables.}}$

Remarquons que :

$$M \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow PBP^{-1}M = MPBP^{-1} \Leftrightarrow B\left(P^{-1}MP\right) = \left(P^{-1}MP\right)B$$

Les matrices $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $BN = NB$ sont les matrices de la forme

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

On en déduit une famille génératrice de $\mathcal{C}_A$:

$$\mathcal{C}_A = \left\{ P \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} P^{-1},\ (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\} = \operatorname{Vect}\left(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\right)$$

où $M_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$, $M_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, $M_3 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, $M_4 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ et $M_5 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On vérifie sans problème que $(M_1, \ldots, M_5)$ forme une famille libre, i.e. $\boxed{\dim \mathcal{C}_A = 5.}$

SUJET S6

Exercice principal S6

1. **Question de cours** Rappeler la définition d'un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E.
2. Soient l et k deux entiers de $[\![1,n]\!]$. Soit $E_{l,k}$ la matrice de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé sur la l-ième ligne et la k-ième colonne qui vaut alors 1.
   Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
   Exprimer $\mathrm{Tr}(E_{l,k}A)$ en fonction d'un coefficient de la matrice A.
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit F l'application bilinéaire symétrique définie par
$$F: \begin{array}{lll} M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B) - \mathrm{Tr}(AB) \end{array}.$$
   (a) Montrer que si, pour tout X de $M_n(\mathbb{R})$ on a $F(A,X)=0$, alors $A=0$.

   (b) Soit u une application de $M_n(\mathbb{R})$ vers $M_n(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall (X,Y) \in (M_n(\mathbb{R}))^2, \quad F(u(X),Y) = F(X,u(Y)).$$
   Montrer que u est linéaire.

   (c) L'application F est-elle un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$?
4. Soit M une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$.
   Soit f l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par :
$$f: \begin{array}{lll} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MXM^{-1} \end{array}.$$
   On pose l'équation suivante pour h un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$:
$$\forall (X,Y) \in (M_n(\mathbb{R}))^2, \quad F(f(X),Y) = F(X,h(Y)) \quad (*)$$
   (a) Montrer que f est bijective et expliciter f^{-1}.

   (b) Montrer que f^{-1} est l'unique endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation (*).

   (c) Montrer qu'une condition suffisante pour que f soit égal à f^{-1} est que la matrice M soit diagonalisable et que $\mathrm{Sp}\,(M) \subset \{1;-1\}$. Cette condition est-elle nécessaire ?
5. Soit l'endomorphisme g de $M_2(\mathbb{R})$ défini par :
$$g: \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a+c & b+d-a-c \\ c & d-c \end{pmatrix} \end{array}$$
   (a) Déterminer $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$, $g(A)M = MA$.

   (b) Déterminer tous les endomorphismes k de $M_2(\mathbb{R})$ tel que, pour tout X et Y de $M_2(\mathbb{R})$ on ait :
$$Tr(g(X))Tr(Y) - Tr(X)Tr(k(Y)) = -Tr(k(Y)X) + Tr(Yg(X)).$$

Solution :

1. Programme officiel ECS2 page 7.
2. On note $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $(x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les coefficients respectifs des matrices A et $E_{l,k}$

   Avec la formule du produit matriciel : $\mathrm{Tr}(A.E_{l,k}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_{j,i})$

   Mais $x_{j,i} = 0$ seulement si $j = l$ et $i = k$, donc

   $\boxed{\mathrm{Tr}(A.E_{l,k}) = a_{k,l}}$
3. (a) Soit A telle que pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, $F(A,X) = 0$

   En prenant $X = E_{l,k}$ on obtient

   Si $l = k$: $\mathrm{Tr}(A)\times 1 - a_{l,l} = 0$ et si $l \neq k$, $0 - a_{k,l} = 0$. Les $a_{l,l}$ sont tous égaux, on doit avoir $\mathrm{Tr}(A) = n\mathrm{Tr}(A)$ ce qui donne $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

   $\boxed{\text{Ainsi A=0.}}$

   (b) Soient α et β réels et des matrices X, Y et T de $M_n(\mathbb{R})$ on a :

$$\begin{aligned}
F(u(\alpha X+\beta Y)-\alpha u(X)-\beta u(Y),T) &= F(u(\alpha X+\beta Y),T)-F(u(\alpha X),T)-F(u(\beta Y),T)\\
&= F(\alpha X+\beta Y,u(T)-F(\alpha X,u(T)))-F(\beta Y,u(T))\\
&= F(\alpha X+\beta Y-\alpha X-\beta Y,u(T))\\
&= F(0,u(T))=0
\end{aligned}$$

   Comme cette propriété est vraie pour tout T , d'après a) on a $u(\alpha X+\beta Y)-\alpha u(X)-\beta u(Y) = 0$

   $\boxed{\text{l'application } u \text{ est linéaire.}}$

   (c) Non : en effet si on note $\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}, C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}}$

   Et $F(C,C) = \mathrm{Tr}^2(C) - \mathrm{Tr}(C^2) = -1 < 0$

   $\boxed{\text{F n'est pas un produit scalaire.}}$
4. (a) Soit $Y \in M_n(\mathbb{R})$, $f(X) = Y$ ssi $MXM^{-1} = Y$ ssi $X = M^{-1}YM$.

   $\boxed{\text{Pour tout } Y \in M_n(\mathbb{R}),\ f^{-1}(Y) = M^{-1}YM}$

   (b) * Montrons que f^{-1} vérifie (*) ie $\mathrm{Tr}(MXM^{-1}Y) - \mathrm{Tr}(f(X))\mathrm{Tr}(Y) = \mathrm{Tr}(XM^{-1}YM) - \mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(f^{-1}Y)$.
   On a déjà $\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(f(X))$ et $\mathrm{Tr}(f^{-1}(Y)) = \mathrm{Tr}(Y)$. De plus $\mathrm{Tr}(M.XM^{-1}Y) = \mathrm{Tr}(XM^{-1}Y.M)$, on a bien l'identité voulue.
   Ainsi $\forall(X,Y) \in (M_n(\mathbb{R})^2, \quad F(f(X),Y) = F(X,f^{-1}(Y))$ et f^{-1} vérifie (*)

   * Supposons qu'il y ait un autre endomorphisme h de $M_n(\mathbb{R})$; alors, pour tout X tout Y de $M_n(\mathbb{R})$ on aurait $F(X,h(Y)) = F(X,f^{-1}(Y))$ d'où pour tout X de $M_n(\mathbb{R})$ on aurait $F(X,h(Y)-f^{-1}(Y)) = 0$ d'où d'après 1) a) pour tout Y de $M_n(\mathbb{R}))$ on a : $h(Y) - f^{-1}(Y) = 0$ d'où $h = f^{-1}$.

   $\boxed{f^{-1} \text{ est l'unique endomorphisme de } M_n(\mathbb{R}) \text{ vérifiant la relation demandée}}$

   (c) Si la matrice M est semblable à une matrice diagonale D ne contenant que des 1 ou des -1 sur la diagonale on a $D^2 = I$ et par suite $M^2 = I$ donc $M = M^{-1}$ et $h = f$ $\boxed{\text{La condition est bien suffisante}}$

   Cette condition $\boxed{\text{n'est pas nécessaire}}$ car si on choisit $M = 2I$ on a $h = f$.
5. (a) On détermine cette matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ en écrivant l'égalité $Mg(A) = Ag(M)$ pour des matrices de la base canonique.

   Pour $E_{1,1}$; $\begin{pmatrix} \alpha & 0\\ \gamma & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-\gamma & \beta-\delta\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

   Pour $E_{1,2}$ $\begin{pmatrix} 0 & \alpha\\ 0 & \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

   On trouve ainsi $\alpha = \beta = \delta$ et $\gamma = 0$

$\boxed{\text{On pose alors } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ et l'on trouve bien : $M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d-a-c \\ c & d-c \end{pmatrix} M$.
(en fait tous les multiples non nuls de M conviennent)

(b) La matrice M trouvée est inversible, donc l'endomorphisme g est de la forme $g(X) = MXM^{-1}$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Alors d'après 4. on sait que l'endomorphisme k existe et est unique ; il est défini par : $k(X) = M^{-1}XM$ c'est à dire puisque $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a : $\boxed{k(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a-c & a-c+b-d \\ c & c+d \end{pmatrix}}$.

Exercice sans préparation S6

On dit qu'une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suit la distribution de Lévy–Pareto si :

— Il existe $\varepsilon > 0$ tel que
  — $\mathbb{P}(X > \varepsilon) = 1$;
  — pour tout $\eta > \varepsilon$, $\mathbb{P}(X > \eta) > 0$.

— pour tous η_1, $\eta_2 > \varepsilon$, la loi de $\dfrac{X}{\eta_1}$ conditionnellement à l'événement $\{X > \eta_1\}$ est la même que celle de $\dfrac{X}{\eta_2}$ conditionnellement à l'événement $\{X > \eta_2\}$, ce qui équivaut à dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \, \mathbb{P}\left(\frac{X}{\eta_1} > x | X > \eta_1\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{\eta_2} > x | X > \eta_2\right).$$

Déterminer la forme de la densité d'une telle variable aléatoire.

Solution :

Il suffit de voir que l'hypothèse implique que $Z = \ln \dfrac{X}{\varepsilon}$ possède la propriété d'absence de mémoire (ECS1 p.24) et donc que $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$.

On détermine la densité cherchée en déterminant la fonction de répartition de x (et en la dérivant à la fin) : Soit $x > \varepsilon$ (et donc $\ln \dfrac{x}{\varepsilon} > 0$), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leqslant x) &= \mathbb{P}\left(\ln \frac{X}{\varepsilon} \leqslant \ln \frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &= 1 - \exp(-\lambda . \ln \frac{x}{\varepsilon}) = 1 - \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{-\lambda} \end{aligned}$$

On obtient par dérivation (la f.r. obtenue, valant 0 sur $]-\infty, \varepsilon[$ est bien continue sur tout $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\varepsilon\}$) la densité de X :

$$\boxed{\delta_X(x) = \lambda . \frac{\varepsilon^\lambda}{x^{\lambda+1}} \mathbb{1}_{]\varepsilon, +\infty[}(x)}.$$

De là, on peut enchainer sur des questions d'existence d'espérance et de variance, de lois du min, du max, etc...

SUJET S7

Exercice principal S7

On se place dans un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 1$.

1. **Question de cours :** réduction des matrices symétriques réelles.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que :
$$\forall x \in E \quad ||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k\rangle^2.$$
3. On s'intéresse maintenant à la réciproque du résultat précédent. Soit donc une famille de vecteurs $(e_1, \ldots, e_m)$ de E telle que :
$$\forall x \in E \quad ||x||^2 = \sum_{k=1}^{m} \langle x;\ e_k\rangle^2.$$
On suppose en outre que les vecteurs $e_1, \ldots, e_m$ sont tous de norme 1.
   (a) Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_m)$ est une famille orthonormée de E.
   (b) Déterminer $(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m))^\perp$ et conclure.
4. On considère désormais une famille de n vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ de E (où $n = \dim E$) telle que :
$$\forall x \in E \quad ||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k\rangle^2.$$
On ne suppose plus que les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont de norme 1.
   (a) Pourquoi la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est-elle encore une base de E avec ces hypothèses ?
   (b) Montrer que, pour tous x et y dans E :
$$\langle x;\ y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k\rangle\langle y;\ e_k\rangle.$$
   (c) Soit G la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$G = \begin{pmatrix} \langle e_1;\ e_1\rangle & \langle e_1;\ e_2\rangle & \ldots & \langle e_1;\ e_n\rangle \\ \langle e_2;\ e_1\rangle & \langle e_2;\ e_2\rangle & \ldots & \langle e_2;\ e_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n;\ e_1\rangle & \langle e_n;\ e_2\rangle & \ldots & \langle e_n;\ e_n\rangle \end{pmatrix}.$$
   Autrement dit : $G = (\langle e_i;\ e_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
   Pourquoi la matrice G est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
   (d) Prouver que $G^2 = G$.
   En déduire que $G = I_n$ et conclure.

Solution :

1. Question de cours : programme ECS2 2013 p. 18.

2. C'est encore un résultat du cours. Si la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée, le vecteur x se décompose sous la forme :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k \rangle e_k$$

d'où par bilinéarité du produit scalaire :

$$||x||^2 = \langle x;\ x\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x;\ e_i\rangle\langle x;\ e_j\rangle\langle e_i;\ e_j\rangle \boxed{= \sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k\rangle^2}$$

car la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée.

3. (a) On applique l''hypothèse avec $x = e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$. On obtient ainsi :

$$1 = ||e_i||^2 = \sum_{k=1}^{m} \langle e_i;\ e_k\rangle^2 = 1 + \sum_{k \neq i} \langle e_i;\ e_k\rangle^2$$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k\neq i} \langle e_i;\ e_k\rangle^2 = 0$. Mais c'est une somme de termes positifs donc chaque terme est nul :

$$\forall (i, k) \in [\![1, m]\!] \quad i \neq k \Rightarrow \langle e_i;\ e_k\rangle = 0$$

Les vecteurs étant unitaires, $\boxed{\text{la famille est donc bien orthonormée.}}$

(b) Soit $x \in (\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m))^{\perp}$. Alors, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $\langle x;\ e_k\rangle = 0$ d'où :

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{m} \langle x;\ e_k\rangle^2 = 0$$

Donc $x = 0$. Ainsi :

$$(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m))^{\perp} = \{0\}$$

Mais alors $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m) = E$ et donc la famille $(e_1, \ldots, e_m)$ est génératrice. Elle est libre car orthonormée et c'est donc bien $\boxed{\text{une base orthonormée de } E.}$ En particulier, cela prouve que $m = n$.

4. (a) L'argument utilisé à la question 3.(b) pour montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice reste valable. De plus, comme on sait désormais que le cardinal de la famille est égal à la dimension de E, on peut affirmer que $\boxed{\text{la famille } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une base de } E.}$

(b) D'une part :

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x;\ y\rangle + ||y||^2$$

et d'autre part, en utilisant l'hypothèse sur la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ on peut également calculer :

$$\begin{aligned}
||x + y||^2 &= \sum_{k=1}^{n} \langle x + y;\ e_k\rangle^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\langle x;\ e_k\rangle + \langle y;\ e_k\rangle\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k\rangle^2 + 2\sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k\rangle\langle y;\ e_k\rangle + \sum_{k=1}^{n} \langle y;\ e_k\rangle^2 \\
&= ||x||^2 + 2\sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k\rangle\langle y;\ e_k\rangle + ||y||^2
\end{aligned}$$

En comparant les deux expressions on en déduit :

$$\boxed{\langle x;\ y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x;\ e_k\rangle\langle y;\ e_k\rangle}$$

(c) La matrice G est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car c'est une matrice $\boxed{\text{symétrique réelle.}}$

(d) On note $A = G^2 = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors par définition du produit matriciel, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$:

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i;\ e_k\rangle\langle e_k;\ e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i;\ e_k\rangle\langle e_j;\ e_k\rangle = \langle e_i;\ e_j\rangle$$

par la question 4.(b). Mais cela signifie exactement que $\boxed{G^2 = G.}$
La matrice G définit donc un projecteur.
Montrons que G est inversible. Il suffit pour cela de montrer que ses colonnes forment une famille libre.
On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de G. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$. Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_j;\ e_i\rangle = 0$$

soit encore par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j;\ e_i\rangle = 0$$

Mais alors cela signifie que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in (\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n))^{\perp} = \{0\}$ et donc $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$. Mais alors, par liberté de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$, on obtient $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Cela prouve que la matrice G est inversible.
En multipliant l'égalité $G^2 = G$ par G^{-1} on obtient alors $G = I_n$. Mais cela signifie exactement que $\langle e_i;\ e_j\rangle = 0$ si $i \neq j$ et que $\langle e_i;\ e_i\rangle = 1$: $\boxed{\text{la base } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est orthonormée.}}$

Exercice sans préparation S7

```
function y=g(x)
    X=grand(1,10000,"unf",0,1/2);
    Y=grand(1,10000,"unf",0,1/3);
    S=0;
for k=1:10000

    if X(k)+Y(k)<=x then S=S+1;
    end
end
y=S/10000;

endfunction
function graph2()
    X=linspace(-0.1,1,101);
    fplot2d(X,g)
endfunction
```

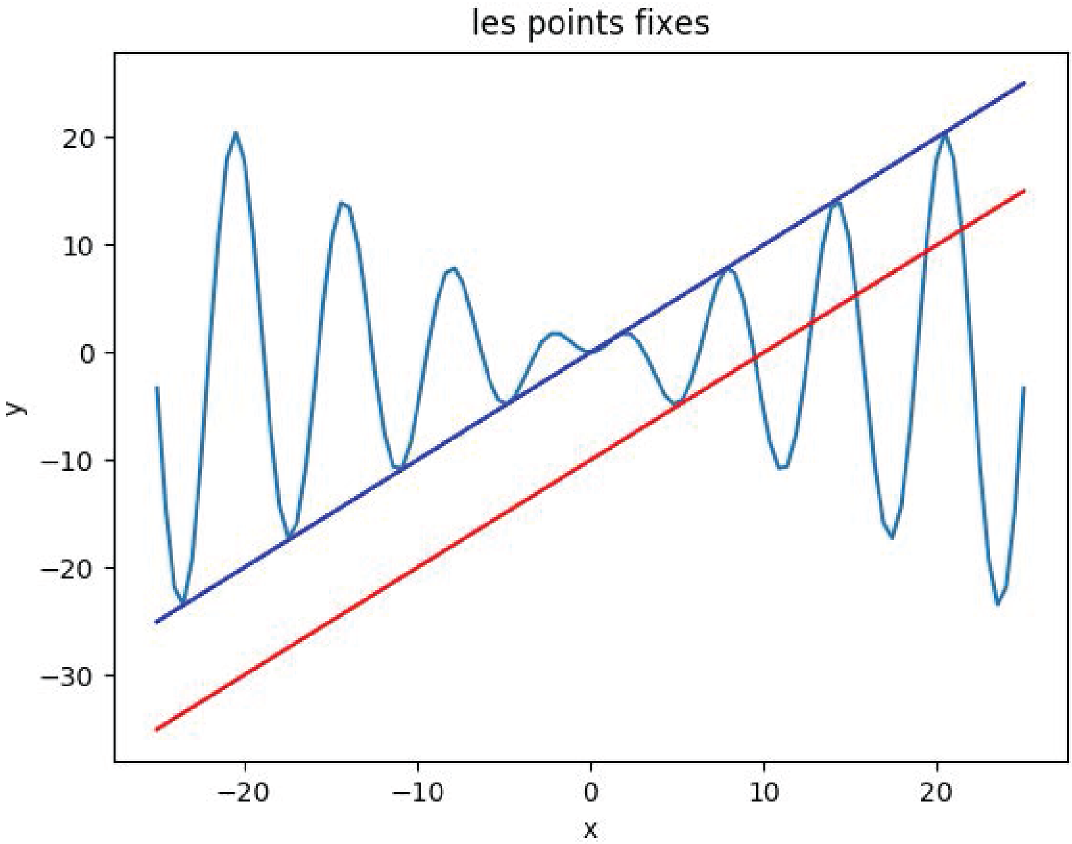
1. Commentez les fonctions Scilab.
2. Dessiner le graphe de sortie la fonction **graph2**

Solution :

1. g représente la fonction de répartition de $X+Y$ où $X \hookrightarrow U([0,\dfrac{1}{2}])$ et $Y \hookrightarrow U([0,\dfrac{1}{3}])$.
2. X et Y sont indépendantes. Posons $Z = X+Y$, le produit de convolution donne une densité de Z

$$h(z) = 6\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{0\leqslant t\leqslant 0.5}\mathbb{1}_{0\leqslant z-t\leqslant \frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = 6\int_0^{\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{z-\frac{1}{3}\leqslant t\leqslant z}\,\mathrm{d}t$$

   $z-\dfrac{1}{3} \geqslant 0$ ssi $z \geqslant \dfrac{1}{3}$ et $z-\dfrac{1}{3} \geqslant \dfrac{1}{2}$ ssi $z \geqslant \dfrac{5}{6}$
   si $z<0$ ou $z>\dfrac{5}{6}$, $h(z)=0$,
   si $z \leqslant \dfrac{1}{3}$, $h(z) = 6\displaystyle\int_0^z \mathrm{d}t = 6z$,
   si $\dfrac{1}{3} < z \leqslant \dfrac{1}{2}$, $h(z) = 6\displaystyle\int_{z-\frac{1}{3}}^z \mathrm{d}t = 2$,
   si $\dfrac{1}{2} < z \leqslant \dfrac{5}{6}$, $h(z) = 6\displaystyle\int_{z-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = 3-6z+2 = 5-6z$,
   Calculons la fonction de répartition : si $z \leqslant \dfrac{1}{3}$ $H(z) \boxed{= 3z^2}$,
   si $\dfrac{1}{3} < z \leqslant \dfrac{1}{2}$ $H(z) = H\left(\dfrac{1}{3}\right) + \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^z 2t\,\mathrm{d}t \boxed{= 2z - \dfrac{1}{3}}$,
   si $\dfrac{1}{2} < z \leqslant \dfrac{5}{6}$ $H(z) = H\left(\dfrac{1}{2}\right) + \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^z (5-6t)\,\mathrm{d}t \boxed{= 5z - 3z^2 - \dfrac{13}{12}}$,
   si $z<0$ $H(z)=0$, et si $z>\dfrac{5}{6}$, $H(z)=1$.



les points fixes
y
x
20
10
0
−10
−20
−30
−20
−10
0
10
20

SUJET S8

Exercice principal S8

Pour tout réel t de $[0,1]$, on définit la fonction f_t sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f_t(x) = \ln(x) - \ln(x+t) + \frac{1}{x}.$$

1. **Question de cours :** Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires à densité.
2. (a) Soit $t \in [0,1]$.
   Montrer que l'équation $f_t(x) = 1$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une unique solution dans $]0,+\infty[$ que l'on note $\varphi(t)$.
   (b) Calculer $\varphi(0)$, et montrer que $\dfrac{1}{3} < \varphi(1) < \dfrac{1}{2}$.
   (c) Montrer que φ est strictement décroissante sur $[0,1]$.
3. Pour tout réel t de $[0,1]$, on note g_t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \varphi(t) \\ \dfrac{t+x-tx}{x^2(x+t)} & \text{si } x \geqslant \varphi(t) \end{cases}$$

   Montrer que g_t est une densité de probabilité.
4. Soit t un réel de $[0,1]$. On considère dans la suite une variable aléatoire X_t admettant g_t pour densité. Les questions (a), (b) et (c) sont indépendantes.
   (a) On admettra provisoirement que φ est continue en 0.
   On note pour tout $n \geqslant 1$, $Z_n = X_{1/n}$. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.
   (b) Montrer que X_t admet une espérance si et seulement si $t = 1$, et vérifier que : $\mathbb{E}[X_1] = \dfrac{1}{\varphi(1)} - 1$.
   (c) On note $Y_t = f_t(X_t)$. Montrer que Y_t suit une loi uniforme sur un intervalle $[a,b[$, où a et b sont deux réels à préciser.
5. Montrer que $\forall t \in [0;1[$, $\varphi(t) \geqslant 1-t$. En déduire que φ est continue en 0.

Solution :

1. Programme officiel ECS2 page 22
2. (a) Soit $t \in [0,1]$. La fonction f_t est dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus,

$$\forall x > 0,\ f_t'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+t} - \frac{1}{x^2} = \frac{x(x+t) - x^2 - x - t}{x^2(x+t)} = \frac{x(t-1)-t}{x^2(x+t)}$$

   Comme $t-1 \leqslant 0$ et $-t \leqslant 0$, on a $\forall x > 0, f_t'(x) \leqslant 0$ et f_t' ne s'annule jamais.
   (si $x(t-1)+(-t) = 0$, on a nécessairement (tout est négatif) $x(t-1) = -t = 0$, donc $t = 1$ et $t = 0$, absurde).

   Ainsi f_t est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, et continue. Donc f_t réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $f_t(]0,+\infty[) =]\lim\limits_{+\infty} f_t, \lim\limits_{0^+} f_t[$.
   Or, en 0^+, $f_t(x) = \dfrac{x\ln(x)+1}{x} - \ln(x+t) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ car $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée.
   En $+\infty$, $f_t(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+t}\right) + \dfrac{1}{x} = \ln\left(\dfrac{1}{1+\frac{t}{x}}\right) + \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Finalement : $1 \in]0,+\infty[= f_t(]0,+\infty[)$, donc $\boxed{\text{il existe un unique réel } \varphi(t) \in]0,+\infty[\text{ tel que } f_t(\varphi(t)) = 1.}$

(b) $f_0(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $f_0(x) = 1 \iff x = 1$: on a donc $\varphi(0) = 1$.

$f_1(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

On a $f_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 + \ln\left(\dfrac{1/2}{3/2}\right) = 2 - \ln(3) < 1$ (car $\ln(3) > \ln(e) > 1$).

Par ailleurs $f_1\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3 + \ln\left(\dfrac{1/3}{4/3}\right) = 3 - \ln(4) = 3 - 2\ln(2) > 1$ (car $\ln(2) < \ln(e) < 1$).

Ainsi :

$$f_1\left(\frac{1}{2}\right) < f_1(\varphi(1)) < f_1\left(\frac{1}{3}\right) \overset{f_1 \searrow}{\Longrightarrow} \boxed{\frac{1}{3} < \varphi(1) < \frac{1}{2}}$$

(c) Fixons $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.

Alors :

$$f_a(\varphi(b)) = \ln(\varphi(b)) - \ln(\varphi(b) + a) + \frac{1}{\varphi(b)} = (1 + \ln(\varphi(b) + b)) - \ln(\varphi(b) + a) = 1 + \ln\left(\frac{\varphi(b) + b}{\varphi(b) + a}\right) > 1$$

Ainsi, $f_a(\varphi(b)) > f_a(\varphi(a))$, et f_a est strictement décroissante, donc nécessairement $\varphi(b) < \varphi(a)$.

La fonction $\boxed{\varphi \text{ est donc strictement décroissante sur } [0,1].}$

3. La fonction g_t est clairement continue au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{\varphi(t)\}$.
De plus, comme $t \in [0,1]$, on a $\forall x \geqslant \varphi(t),\ t + x - tx = x(1-t) + t \geqslant 0$.
La fonction g_t est donc bien positive.
De plus,

$$\forall A > 0,\ \int_{\varphi(t)}^{A} g_t(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(t)}^{A} (-f_t'(x))\mathrm{d}x = \Big[-f_t(x)\Big]_{\varphi(t)}^{A} = 1 - f_t(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(t)}^{+\infty} g_t(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

$\boxed{\text{La fonction } g_t \text{ est donc bien une densité de probabilité.}}$

4. (a) On note pour tout $n \geqslant 1$, $Z_n = X_{1/n}$.
Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \\ 1 - f_{1/n}(x) & \text{si } x \geqslant \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \\ 1 - \frac{1}{x} - \ln(x) + \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) & \text{si } x \geqslant \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

Comme φ est décroissante et $\varphi(0) = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right) < 1$ donc :

pour $x < 1$, alors comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, pour n assez grand, $x < \varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et donc $F_{Z_n}(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour $x \geqslant 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \geqslant 1 \geqslant \varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $F_{Z_n}(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \ln(x) + \ln\left(x + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \dfrac{1}{x}$.

La fonction $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est continue, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, croissante, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$: c'est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z et $\boxed{(Z_n) \text{ converge en loi vers } Z.}$

(b)

$$\mathbb{E}[X_t] < +\infty \iff \int^{+\infty} x g_t(x)\mathrm{d}x \text{ converge (absolument)}$$

Or,

$$x g_t(x) = \frac{x((1-t)x + t)}{x^2(x+t)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{(1-t)x^2}{x^3} = \frac{1-t}{x} & \text{si } t \neq 1 \\ \frac{tx}{x^3} = \frac{t}{x^2} & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Par critère d'équivalence de fonctions positives, par comparaison avec les intégrales de Riemann, on a donc bien que :

$$\boxed{\mathbb{E}[X_t] \text{ existe } \iff t = 1}$$

Dans le cas où $t = 1$, on a :

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_{\varphi(1)}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx = \lim_{A \to +\infty} \left(\Big[\ln(x) - \ln(x+1) \Big]_{\varphi(1)}^{A} \right) = 0 - (\ln(\varphi(1)) - \ln(\varphi(1)+1) \boxed{= \frac{1}{\varphi(1)} - 1}$$

(c) Vu l'expression de g_t, on voit déjà que $X_t(\Omega) = [\varphi(t), +\infty[$.
La fonction de répartition de X_t est alors donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{X_t}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \varphi(t) \\ 1 - f_t(x) & \text{si } x \geqslant \varphi(t) \end{cases}$$

Comme $f_t([\varphi(t), +\infty[) =]0, 1]$, on a donc $Y_t(\Omega) =]0, 1]$.
De plus,

$$\forall x \in]0,1],\ F_{Y_t}(x) = \mathbb{P}(Y_t \leqslant x) = \mathbb{P}(f_t(X_t) \leqslant x) = \mathbb{P}(X_t \geqslant f_t^{-1}(x)) = 1 - F_{X_t}(f_t^{-1}(x)) = 1 - (1 - x) = x$$

(la variable X_t étant à densité, $\mathbb{P}((X_t = f_t^{-1}(x)) = 0)$

$\boxed{\text{Ainsi, } Y_t \text{ suit bien une loi uniforme sur }]0,1].}$

5. Soit $t \in [0, 1[$. $\varphi(t) \geqslant 1 - t$ ssi $f_t(\varphi(t)) \leqslant f_t(1-t)$ ssi $1 \leqslant \ln(1-t) + \dfrac{1}{1-t}$
   On définit sur $[0; 1[$ $x \mapsto \ln(1-x) + \dfrac{1}{1-x}$, $g'(x) = \dfrac{-1}{1-x} + \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2}$.
   g est bien croissante sur $[0; 1[$ et $g(0) = 1$, donc en particulier $g(t) \geqslant 1$ et $1 \geqslant \varphi(t) \geqslant 1 - t$.
   Par encadrement $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = 1 = \varphi(0)$.
   $\boxed{\varphi \text{ est continue en } 0.}$

Exercice sans préparation S8

Soit a un réel strictement positif.

1. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\arctan(n+a) - \arctan n)$.
2. Proposer un programme SCILAB permettant d'en donner une valeur approchée à 0.001 près quand $a = \dfrac{1}{2}$
   On rappelle que `atan(x)` renvoie la valeur de $\arctan(x)$

Solution :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction arctan est dérivable sur $[n, n+a]$, donc, en vertu du théorème des accroissements finis, il existe un réel $u_n \in]n, n+a[$ tel que $\dfrac{\arctan(n+a) - \arctan n}{a} = \dfrac{1}{u_n^2+1}$. On en déduit que
$$\arctan(n+a) - \arctan n = \frac{a}{u_n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{n^2}.$$
   Puisque la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a}{n^2}$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \arctan(n+a) - \arctan n$ converge.

2. Il s'agit donc de calculer $\sum\limits_{n=0}^{N} \left(\arctan\left(n+\dfrac{1}{2}\right) - \arctan(n)\right)$ pour un N tel que
   $\left|\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \left(\arctan\left(n+\dfrac{1}{2}\right) - \arctan(n)\right)\right| < 0.001$
$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\arctan\left(n+\frac{1}{2}\right) - \arctan(n)\right)\right| &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\arctan\left(n+\frac{1}{2}\right) - \arctan(n)\right) \\ &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2(u_n^2+1)} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}\end{aligned}$$
   Par une comparaison série intégrale $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2n^2} \leqslant \dfrac{1}{2N}$.

   Il suffit donc de calculer S_{500}.

```
S=0;
for n=0:500
   S=S+atan(n+1/2)-atan(n);
   end;
disp(S)
```

SUJET S9

Exercice principal S9

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E.

1. **Question de cours :** énoncer le théorème de Pythagore.
2. Soit $(x, y) \in E^2$. Exprimer $\langle x, y \rangle$ à l'aide de $\|x + y\|^2$ et de $\|x - y\|^2$.
3. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$$

   On pose $U = X_1 v_1 + \cdots + X_n v_n$. Calculer l'espérance de $\|U\|^2$.
4. En déduire qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \leqslant \sqrt{n}$.
5. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est orthogonale si, et seulement si :

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n, \ \|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}.$$

6. Montrer que si $\mathcal{F}$ n'est pas orthogonale, il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| > \sqrt{n}$.

Solution :

1. Programme officiel ECS2 page 7.
2. Soit $(x, y) \in E^2$. Alors : $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 - \left(\|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2\right) = 4\langle x, y \rangle$.

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, \ \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right).}$$

3. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$\|U(\omega)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i(\omega) X_j(\omega) \langle v_i, v_j \rangle.$$

   Par linéarité de l'espérance puis indépendance des $X_1, \dots, X_n$, on trouve :

$$\mathbb{E}\left(\|U\|^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_i X_j) \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2) \|v_i\|^2 \boxed{= n.}$$

4. Supposons le contraire par l'absurde. On aurait alors : $\forall \omega \in \Omega, \ \|U(\omega)\|^2 > n$ et donc $\mathbb{E}\left(\|U(\omega)\|^2\right) > n$, ce qui est absurde. Il existe donc $\omega \in \Omega$ tel que $\|U(\omega)\|^2 \leqslant n$, i.e. :

   $\boxed{\text{il existe } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n \text{ tel que } \|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \leqslant \sqrt{n}.}$
5. Supposons la famille $\mathcal{F}$ orthogonale. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n$. La famille $(\varepsilon_1 v_1, \dots, \varepsilon_n v_n)$ reste orthogonale, donc le théorème de Pythagore assure que :

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k|^2 \|v_k\|^2 = n$$

   On a donc bien $\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}$.
   Supposons réciproquement que, pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n, \ \|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}$. La variable aléatoire $\|U\|^2$ est donc constante égale à n.

Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $(\varepsilon_j)_{j \neq i} \in \{-1; 1\}^{n-1}$. D'après une égalité de polarisation on a :

$$\left\langle v_i, \sum_{j \neq i} \varepsilon_j v_j \right\rangle = \frac{1}{4}\left(\left\| v_i + \sum_{j \neq i} \varepsilon_j v_j \right\|^2 - \left\| v_i - \sum_{j \neq i} \varepsilon_j v_j \right\|^2 \right) = \frac{1}{4}(n - n) = 0.$$

Pour $j \neq i$, on peut écrire :

$$v_j = \frac{1}{2}\left[\left(v_j + \sum_{k \neq i,j} v_k \right) - \left(-v_j + \sum_{k \neq i,j} v_k \right) \right]$$

Le vecteur v_j s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs orthogonaux à v_i, il est donc lui-même orthogonal à v_i. La famille $\mathcal{F}$ est donc orthogonale.

$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ est donc orthogonale si et seulement si } \forall(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n,\ \|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}.}$

6. Si $\mathcal{F}$ n'était pas orthogonale, il existerait $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \neq \sqrt{n}$. Supposons par l'absurde que, pour tout $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n$, $\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| < \sqrt{n}$. La variable aléatoire $\|U\|^2 - n$ serait alors une variable aléatoire finie, négative et d'espérance nulle, donc presque-sûrement nulle, ce qui est absurde pas hypothèse.

   On en déduit donc que :

   $\boxed{\text{il existe } (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n \text{ tel que } \|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| > \sqrt{n}.}$

Exercice sans préparation S9

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = |u_n - n|$.
À l'aide de Scilab, on calcule $(u_0, u_1, \ldots, u_{10})$ pour certaines valeurs de u_0. On obtient le tableau suivant :

u_0	Calcul de $(u_0, u_1, \ldots, u_{15})$ par Scilab															
-3	-3.	3.	2.	0.	3.	1.	4.	2.	5.	3.	6.	4.	7.	5.	8.	6.
4	4.	4.	3.	1.	2.	2.	3.	3.	4.	4.	5.	5.	6.	6.	7.	7.
6	6.	6.	5.	3.	0.	4.	1.	5.	2.	6.	3.	7.	4.	8.	5.	9.
9	9.	9.	8.	6.	3.	1.	4.	2.	5.	3.	6.	4.	7.	5.	8.	6.

Déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Solution :

Ce qu'il faut conjecturer, c'est qu'à partir d'un certain rang, on aurait : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n + 1$.
(Regarder une case sur deux, suivant les couleurs du tableau.

La suite (u_n) est clairement positive (à partir de u_1), et décroissante sur ses premiers termes (à partir de u_1 puisque :

$$u_1 = |u_0|, \quad u_2 = u_1 - 1, \quad u_3 = u_1 - 1 - 2, \qquad u_4 = u_1 - 1 - 2 - 3, \ldots$$

Plus précisément tant que $u_n < n$, on a $u_{n+1} - u_n = -n$ et la suite est

Si $u_1 \geqslant \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$, alors la suite finie $(u_1, \ldots, u_n)$ est strictement décroissante.

Il existe nécessairement au moins un rang n_0 où on aura $u_{n_0} - n_0 \leqslant 0$

Pour ce rang n_0, on a alors $u_{n_0+1} = |u_{n_0} - n_0| = n_0 - u_{n_0} \geqslant 0$.

Et donc $u_{n_0+1} \leqslant n_0 + 1$

Donc : $u_{n_0+2} = |u_{n_0+1} - (n_0+1)| = (n_0+1) - u_{n_0+1} = (n_0+1) - (n_0 - u_{n_0}) = u_{n_0} + 1$.

On a une relation de type arithmétique entre u_{n+2} et u_n ,à condition que $u_n \leqslant n$.

Par récurrence immédiate, pour $k \in \mathbb{N}$, "$u_{n_0+2k} = u_{n_0} + k \leqslant n_0 + 2k$ et $u_{n_0+2k+1} = u_{n_0+1} + k \leqslant n_0 + 2k + 1$"

A partir du rang n_0, suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont arithmétiques de raison 1. On a donc, pour $2r$ pair supérieur ou égal à n_0 :

$$u_{2k} = u_{2r} + (k - r) \underset{k \to +\infty}{\sim} k$$

et

$$u_{2k+1} = u_{2s+1} + (k - s) \underset{k \to +\infty}{\sim} k$$

Ainsi :

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{2}}$$

SUJET S10

Exercice principal S10

1. **Question de cours :** Somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes ?
2. Soit $\lambda > 0$. La variable aléatoire X suit une *loi de Cauchy* de paramètre λ, noté $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$ si X admet pour densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_\lambda : x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$$
On pose $Z = \ln|X|$.
Vérifier que Z est définie presque sûrement et en déterminer une densité.
3. On considère maintenant deux variables indépendantes X et Y suivant une loi de Cauchy de paramètre 1. Posons $U = \ln|XY|$.
   (a) Vérifier que U est définie presque sûrement et montrer qu'elle admet la fonction g comme densité où :
$$g : x \mapsto \frac{4}{\pi^2} \frac{x}{e^x - e^{-x}} \mathbb{1}_{x \in \mathbb{R}^*}$$
   On pourra remarquer, au cours du calcul à effectuer, que :
$$\text{Si } x \neq 0,\ \frac{1}{(y+1)(y+e^{2x})} = \frac{1}{e^{2x}-1}\left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+e^{2x}}\right)$$
   (b) Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.
4. (a) En utilisant le fait que g est une densité, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$.
5. (a) Montrer que, pour $t \in [0,1[$:
$$\frac{\ln t}{t^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} t^{2k} \ln t + r_n(t) \text{ où } r_n(t) = \frac{t \ln t}{t^2-1} t^{2n+1}.$$
   (b) Prouver que $\displaystyle\int_0^1 r_n(t)\,\mathrm{d}t \to 0$ quand $n \to +\infty$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ puis celle de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Solution :

1. Question de cours : programme ECS2 2014 p. 14.
2. La probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$ est nulle donc Z est définie presque sûrement. De plus, Z est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et

pour $x \in \mathbb{R}$, en notant F_Z la fonction de répartition de Z :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}(Z \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(\ln|X| \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(|X| \leqslant e^x) \text{ par croissance de l'exponentielle} \\ &= \mathbb{P}(-e^x \leqslant X \leqslant e^x) \\ &= \int_{-e^x}^{e^x} \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{e^x} \frac{\lambda}{\lambda^2+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ par parité} \\ &= \frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\left(\frac{e^x}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

En particulier F_Z est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que Z est une variable aléatoire à densité et une densité est la fonction :

$$\boxed{f_\lambda : t \mapsto \frac{2\lambda}{\pi}\frac{e^t}{\lambda^2+e^{2t}}}$$

3. (a) U est définie dès que $XY \neq 0$, or :

$$\mathbb{P}(XY=0) = \mathbb{P}(\{X=0\} \cup \{Y=0\}) \leqslant P(X=0)+P(Y=0) = 0$$

donc U est définie presque sûrement.
De plus, $U = \ln|X| + \ln|Y|$ et donc par indépendance de X et de Y, si on note respectivement f_1 et f_2 des densités de $\ln|X|$ et de $\ln|Y|$, la variable U admet comme densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(x-t)\,\mathrm{d}t$$

On va mener le calcul en utilisant le résultat de la question précédente. Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\frac{e^{x-t}}{1+e^{2(x-t)}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^{2t})(e^{2t}+e^{2x})}e^{2t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+y)(y+e^{2x})}\,\mathrm{d}y \text{ en posant } y = e^{2t} \text{ (bijection croissante } \mathcal{C}^1) \\ &= \frac{2e^x}{\pi^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}-1}\left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+e^{2x}}\right)\mathrm{d}y \text{ car } e^{2x} \neq 1 \text{ pour } x \neq 0 \\ &= \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{e^x+e^{-x}}\left[\ln\frac{y+1}{y+e^{2x}}\right]_0^{+\infty} \\ &= \boxed{\frac{4}{\pi^2}\frac{x}{e^x-e^{-x}}} \end{aligned}$$

(b) Il suffit de calculer la limite quand x tend vers 0 de l'expression trouvée ci-dessus. Or :

$$\frac{4}{\pi^2}\frac{x}{e^x-e^{-x}} \underset{0}{\sim} \frac{4}{\pi^2}\frac{x}{2x} = \frac{2}{\pi^2}$$

On en déduit donc que $\boxed{g \text{ n'est pas continue en } 0.}$

4. (a) Comme g est une densité définie sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1 \text{ donc } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{e^x-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$$

Or en effectuant le changement de variable $t = e^x$ – valide car défini par une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ – on obtient par ailleurs :

$$\boxed{\frac{\pi^2}{4} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{e^x-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t}$$

d'où le résultat demandé.

(b) Il suffit d'écrire par la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

et en effectuant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ dans la seconde intégrale – changement de variable là encore valide car toujours défini par une bijection décroissante et $\mathcal{C}^1$ – on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = -\int_1^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(\frac{1}{u}\right)^2-1}\,\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_0^1 \frac{\ln u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u$$

d'où $2\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}$ et donc finalement : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}}$.

5. (a) Pour $t \neq 1$, par la formule pour les sommes géométriques :

$$\sum_{k=0}^{n} t^{2k} = \frac{t^{2n+2}-1}{t^2-1}$$

d'où :

$$\frac{1}{t^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} t^{2k} + \frac{t^{2n+2}}{t^2-1}$$

puis finalement :

$$\boxed{\frac{\ln t}{t^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\ln t + \frac{t^{2n+2}\ln t}{t^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\ln t + r_n(t)}$$

avec $r_n(t) = \dfrac{t\ln t}{t^2-1}t^{2n+1}$.

(b) On pose $\varphi(t) = \dfrac{t\ln t}{t^2-1}$. Alors la fonction φ est continue sur $]0,1[$. De plus, par croissance comparée :

$$\lim_{x\to 0} \varphi(t) = 0$$

tandis qu'au voisinage de 1 :

$$\varphi(t) \underset{1}{\sim} \frac{t(t-1)}{t^2-1} = \frac{t}{t+1}$$

d'où : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \varphi(t) = \frac{1}{2}$ Ainsi la fonction φ se prolonge par continuité sur $[0,1]$ en posant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = \dfrac{1}{2}$. On continue de noter φ la fonction ainsi prolongée.
Alors, la fonction φ est continue sur le segment $[0,1]$ et elle y est donc bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0,1] \quad |\varphi(t)| \leqslant M.$$

Remarquons que la continuité de φ sur $[0,1]$ implique que la fonction r_n est bien intégrable sur $[0,1]$ et on peut donc parler de son intégrale sur ce segment.
Alors :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 r_n(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 |r_n(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant M\int_0^1 t^{2n+1}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{M}{2n+2}
\end{aligned}$$

Par théorème de comparaison, comme $\dfrac{M}{2n+2} \to 0$ quand $n \to +\infty$, on en déduit que :

$$\boxed{\int_0^1 r_n(t)\,\mathrm{d}t \to 0 \text{ quand } n \to +\infty}$$

(c) Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^{2k} \ln t$ est intégrable sur $[0,1]$. Cette fonction est en effet continue sur $]0,1]$ et, pour $k \geqslant 1$, se prolonge en continuité par 0 car, par croissance comparée, $\lim\limits_{t \to 0} t^{2k} \ln t = 0$.

Dans le cas où $k = 0$, $t \mapsto \ln t$ est bien intégrable au voisinage de 0, par exemple par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, ainsi $|\ln t| = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{t}}}\right)$ au voisinage de 0. On peut aussi calculer explicitement une primitive (c'est le calcul fait ci-dessous).

Cela remarqué, on peut intégrer terme à terme sur $]0,1[$ l'égalité obtenue à la question 5.(a), ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^{2k} \ln t\,\mathrm{d}t + \int_0^1 r_n(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^{2k} \ln t\,\mathrm{d}t$ pour $k \in \mathbb{N}$. En intégrant par parties, toutes les fonctions étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_k &= \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \ln t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2k}}{2k+1}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} + \int_0^1 r_n(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 r_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8} - \int_0^1 r_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Par la question précédente, on en déduit en passant à la limite que :

$$\boxed{\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

On remarque alors, en séparant les termes d'indice respectivement pair et impair, que :

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} + \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

d'où :

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3} \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Exercice sans préparation S10

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(\frac{x+1}{2}) = f(x).$$

Montrer que f est constante.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$.
Si $x \leqslant 1$ alors (u_n) majorée par 1 [récurrence] et croissante [signe de $f(x) - x$].
Si $x > 1$ (u_n), on montre de même que (u_n) est minorée par 1 et décroissante.

Ainsi dans tous les cas, (u_n) converge. Elle converge donc vers l'unique point fixe 1.

(on peut aussi calculer explicitement u_n en remarquant que c'est une suite arithmético-géométrique :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (x-1)$)
Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(x)$ par continuité et unicité de la limite $f(x) = f(1)$ et $\boxed{f \text{ est constante}}$.

SUJET S11

Exercice principal S11

Soit $n \geqslant 2$. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, défini par : $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$.

1. Soit $Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on note $H = Z\,{}^tZ$.
   (a) Montrer que H est diagonalisable et vérifier que $\operatorname{Ker}(H) = (\operatorname{Vect}(Z))^\perp$.
   (b) Montrer que Z est vecteur propre de H et préciser la valeur propre associée.

Dans la suite de l'exercice, on considère $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
On admet également la valeur suivante : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2. **Question de cours** Lois γ : densité et stabilité par une opération à expliciter.
3. Soit $i \in [\![1,n]\!]$
   (a) Donner la fonction de répartition de la variable $V_i = \dfrac{X_i^2}{2}$ en fonction de Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
   Justifier que V_i possède une densité et proposez-en une.
   Reconnaître alors une loi γ dont on précisera le paramètre.
   (b) Donner la loi suivie par $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V_i$.
4. On note encore $Z = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ le vecteur aléatoire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ obtenu et la matrice aléatoire $H = Z\,{}^tZ$.
   Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note p_F la projection orthogonale sur F.
   (a) Calculer la probabilité que Z soit le vecteur nul.
   (b) Déterminer la loi suivie par la valeur propre aléatoire $\|Z\|^2$ de la matrice H.
   (c) Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ un vecteur normé de F.
   Montrer que la variable aléatoire $\langle u, Z\rangle$ suit une loi normale dont on précisera les paramètres.
   (d) On admet que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, si $(v_1, \ldots, v_k)$ est une famille orthogonale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors les variables aléatoires $\langle v_1, Z\rangle$, $\langle v_2, Z\rangle, \ldots, \langle v_k, Z\rangle$ sont mutuellement indépendantes.
   Vérifier que les variables aléatoires $\|p_F(Z)\|^2$ et $\|Z - p_F(Z)\|^2$ sont indépendantes et déterminer leur loi.

Solution :

1. Programme officiel ECS2 pages 12 (définition) et 14 (stabilité par la somme)
2. (a) ${}^tH = {}^t(Z\,{}^tZ) = Z\,{}^tZ = H$, donc H est $\boxed{\text{symétrique réelle donc diagonalisable.}}$
   De plus, pour tout $T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$T \in \operatorname{Ker}(H) \Longleftrightarrow HT = 0 \Longleftrightarrow Z(\,{}^tZH) = 0 \Longleftrightarrow \langle Z, H\rangle Z = 0 \overset{Z\neq 0}{\Longleftrightarrow} \langle Z, H\rangle = 0 \Longleftrightarrow \boxed{T \in (\operatorname{Vect}(Z))^\perp}$$

(b) Le vecteur Z est bien non nul et : $HZ = Z\,{}^tZZ = Z(\langle Z, Z\rangle) = \|Z\|^2 Z$.
Ainsi, $\boxed{Z \text{ est vecteur propre de } H \text{ pour la valeur propre } \|Z\|^2 \neq 0.}$

3. (a) $X_i(\Omega) = \mathbb{R}$, donc $V_i(\Omega) = \mathbb{R}^+$.
- pour $x < 0$, $F_{V_i}(x) = 0$;
- pour $x \geqslant 0$,

$$F_{V_i}(x) = \mathbb{P}(V_i \leqslant x) = \mathbb{P}(X_i^2 \leqslant 2x) = \mathbb{P}(-\sqrt{2x} \leqslant X_i \leqslant \sqrt{2x}) = 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{V_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

La fonction Φ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\Phi(0) = 1/2$, on voit que F_{V_i} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ce qui suffit pour affirmer que V_i est une variable à densité.
Comme densité de V_i, on peut proposer :

$$f_{V_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}\Phi'(\sqrt{2x}) & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(1/2)}x^{1/2-1}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{On reconnaît donc une loi } \gamma \text{ de paramètre } 1/2.}$

(b) Les V_i étant mutuellement indépendantes de loi $\gamma(1/2)$, leur somme $W = \sum_{i=1}^{n} V_i$ suit donc une loi $\boxed{\gamma(n/2).}$

4. (a)

$$[Z = 0] = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 0] \subset [X_1 = 0]$$

Ainsi, $0 \leqslant \mathbb{P}(Z = 0) \leqslant \mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$, donc $\boxed{\mathbb{P}(Z = 0) = 0.}$

(b) On a $\|Z\|^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 2W$, avec W la variable aléatoire calculée à la question 2(b). On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(\|Z\|^2 \leqslant x) = \mathbb{P}\left(W \leqslant \frac{x}{2}\right) = F_W\left(\frac{x}{2}\right)$$

Par composition, $\|Z\|^2$ est donc encore une variable à densité, de loi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{f_{\|Z\|^2}(x) = \frac{1}{2}f_W\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{\frac{n}{2}-1}e^{-x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)}$$

(c) La variable aléatoire $\langle u, Z\rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k X_k$ est une combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes de loi normale, elle suit donc encore une loi normale. De plus,

$$\mathbb{E}[\langle u, Z\rangle] = \sum_{k=1}^{n} u_k \mathbb{E}[X_k] = 0$$

et

$$\mathbb{V}[\langle u, Z\rangle] = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 \mathbb{V}[X_k] = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 = \|u\|^2 = 1$$

Ainsi, $\boxed{\langle u, Z\rangle \text{ suit une loi normale centrée réduite.}}$

(d) Notons r la dimension de F.
Notons $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(v_1, \ldots, v_r)$ soit une base orthonormée de F (et $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ une base orthonormée de $F^\perp$).
Alors : $p_F(Z) = \sum_{k=1}^{r} \langle v_k, Z\rangle v_k$ et $Z - p_F(Z) = \sum_{k=r+1}^{n} \langle v_k, Z\rangle v_k$.

Par théorème de Pythagore, on a donc $\|p_F(Z)\|^2 = \sum_{k=1}^{r}(\langle v_k, Z\rangle)^2$ et $\|Z - p_F(Z)\|^2 = \sum_{k=r+1}^{n}(\langle v_k, Z\rangle)^2$

On sait d'après (a) que chaque $\langle v_k, Z\rangle$ suit une loi normale centrée réduite, et elles sont indépendantes. d'après le résultat qui a été admis.

Par le lemme des coalitions, on voit donc que $\|p_F(Z)\|^2$ et $\|Z - p_F(Z)\|^2$ sont indépendantes.

De plus, en adaptant la méthode du (2.b), on voit que $\boxed{\dfrac{\|p_F(Z)\|^2}{2} \text{ suit une loi gamma } \gamma(d/2)}$ et que

$\boxed{\dfrac{\|Z - p_F(Z)\|^2}{2} \text{ suit une loi gamma } \gamma((n-d)/2).}$

On en déduit ainsi la loi de $\|p_F(Z)\|^2$ et de $\|Z - p_F(Z)\|^2$ par transformation affine.

Exercice sans préparation S11

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - u_n^2) = 0$$

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

1. A t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$?
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

Solution :

1. $\boxed{\text{Non}}$ pour la question. Prendre $u_n = 0$ si n pair et 1 sinon
2. $\boxed{\text{Oui}}$ pour la question. Comme il existe $M > 0$ tel que pour n assez grand $-M \leq u_n - u_n^2$, soit $u_n^2 - u_n - M \leq 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se situe entre les 2 racines du polynôme $X^2 - X - M$ et est donc forcément bornée.

SUJET S12

Exercice principal S12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons P_n le polynôme $(X^2-1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$, sa dérivé n-ième.

1. **Question de cours :** énoncer le théorème d'intégration par parties.
2. À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} Q(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

3. On note x_1,...,x_p les (éventuelles) racines de L_n d'ordre de multiplicité impaire.
   On définit alors le polynôme Q par :

$$\left\{\begin{array}{ll} Q = (X-x_1)\cdots(X-x_p) & \text{si } P \text{ admet des racines d'ordre de multiplicité impair} \\ Q = 1 & \text{sinon} \end{array}\right.$$

   À l'aide du polynôme Q et de la question précédente, montrer que L_n admet n racines simples appartenant à l'intervalle $]-1,1[$.
4. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note

$$g_k : \begin{array}{lll} \mathbb{R}_{2n-1}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(x_k) \end{array} \quad \text{et} \quad f : \begin{array}{lll} \mathbb{R}_{2n-1}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

   Montrer que f est nulle sur $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} g_k$.
5. Montrer que la famille $(g_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{2n-1}[X],\mathbb{R})$.
6. On **admet** provisoirement que si $(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$ est une famille libre de m formes linéaires sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, il existe des vecteurs $u_1,\ldots,u_m$ tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!]$, $\varphi_i(u_i) = 1$ et $\varphi_i(u_j) = 0$ si $i \neq j$.

   Déduire des questions précédentes qu'il existe $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} Q(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q(x_i).$$

7. Montrer la propriété provisoirement admise par récurrence sur m.

Solution :

1. Programme officiel ECS1 page 12.
2. Par intégration par parties (les polynômes sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$), on trouve :

$$\int_{-1}^{1} Q(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = \left[P_n^{(n-1)}(x)Q(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q'(x)P_n^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Remarquons que 1 et -1 sont racines n-èmes de P_n, donc racines simples de $P_n^{(n-1)}$. On trouve alors :

$$\int_{-1}^{1} Q(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} Q'(x)P_n^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

En intégrant $n-1$ fois de plus par parties, on trouve :

$$\int_{-1}^{1} Q(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} Q'(x)P_n^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = (-1)^n \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x \boxed{=0}.$$

la dernière égalité étant obtenue puisque $Q^{(n)} = 0$.

3. Si $p \leqslant n-1$, le résultat de la question précédente assure que $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$, ce qui est absurde puis le polynôme QL_n est par construction de signe constant et ne s'annule que sur les racines de L_n, qui sont en nombre fini.
On en déduit que $p = n$, i.e. $\boxed{L_n \text{ admet } n \text{ racines dans }]-1,1[.}$
Puisque $\deg L_n = n$, toutes ces racines sont simples.

4. Soit $R \in \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} g_k$. On a alors $R(x_1) = \cdots = R(x_n) = 0$. Puisque les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont deux-à-deux distincts, le polynôme $(X-x_1)\ldots(X-x_n)$ divise R, donc L_n divise R. Il existe donc un polynôme $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $R = QL_n$. La première question assure alors que :

$$f(R) = \int_{-1}^{1} R(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} Q(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\boxed{f \text{ est nulle sur } \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} g_k.}$$

5. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \lambda_1 Q(x_1) + \cdots + \lambda_n Q(x_n) = 0.$$

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $R_k = \dfrac{\displaystyle\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (X-x_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (x_k-x_i)} \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On a $R_k(x_k) = 1$ et $R_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$.

L'évaluation en $Q = R_k$ assure alors que $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. $\boxed{\text{La famille } (g_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \text{ est bien libre.}}$

6. La question revient à montrer que $f \in \operatorname{Vect}(g_1, \ldots, g_n)$.
Supposons par l'absurde que $f \notin \operatorname{Vect}(g_1, \ldots, g_k)$. La famille $(g_1, \ldots, g_n, f)$ serait alors libre. Il existerait alors $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que $g_1(Q) = \cdots = g_n(Q) = 0$ et $f(Q) = 1$, ce qui est absurde puisque $Q \in \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} g_k$.

$$\boxed{\text{Il existe } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que : } \forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} Q(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q(x_i).}$$

7. Montrons le résultat par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$.
Pour $m = 1$: φ_1 est une forme linéaire non nulle (car elle forme une famille libre), donc il existe $x_1 \in E$ tel que $\varphi_1(x_1) = 1$. La propriété est donc initialisée.
Soit $m > 1$ et supposons une famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ déjà construite.
Puisque la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est libre, la forme linéaire $\psi = \varphi_m - \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \varphi_m(u_k)\varphi_k$ est non nulle. Il existe donc $y \in E$ tel que $\psi(y) = 1$.
* On pose $u'_m = y - \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \varphi_k(y)u_k$.
Comme $\psi(y) = 1$, $\varphi_m(y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \varphi_k(u_k)\varphi_k(y)$ et $\varphi_m(u'_m) = 1$
De plus, si $j < m$, $\varphi_j(u_m) = \varphi_j(y) - \varphi_j(y) = 0$ (seul le terme en $j = k$ est non nul dans la somme.)
* On pose $k \in [\![1, m-1]\!]$, $u'_k = u_k - \varphi_m(u_k)u'_m$
Si $j \in [\![1, m-1]\!]$, $\varphi_j(u'_k) = \varphi_j(u_k) = \delta_{k,j}$. Et $\varphi_m(u'_k) = \varphi_m(u_k) - \varphi_m(u_k) = 0$
La famille $(u'_1, \ldots, u'_m)$ convient donc.

Exercice sans préparation S12

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $]0,+\infty[$ et telles que $\ln X$ et $\ln Y$ suivent des lois normales $\mathcal{N}(0,1)$.

Calculer la densité de $Z = (X.Y)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Solution :

En passant au logarithme :

$$\ln Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ln X + \ln Y)$$

et donc $\ln Z$ est CL de deux variables normales indépendantes.

$$\mathbb{E}(\ln Z) = 0;\ \mathbb{V}(\ln Z) = 1,$$

et donc $\ln Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

On cherche maintenant une densité de $Z = \exp(\ln Z)$. Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale normalisée et F la f.r. de Z : Soit $z \in]0,+\infty[$.

$$F(z) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) \quad = \quad \mathbb{P}(\ln Z \leqslant \ln z) = \Phi(\ln z)$$

Pour $z \leqslant 0$, $F(z) = 0$.

La fonction F est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ (remarquer le bon recollement en 0 du fait que $\Phi(x) \to 0$ lorsque $\ln z = x \to -\infty$), $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est une densité de Z :

$$F'(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \boxed{\frac{1}{z}\Phi'(\ln z) = \frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\ln z)^2}} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

SUJET S13

Exercice principal S13

Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une ou de deux unités suivant la procédure suivante :

- au départ la puce est en O ;
- si, à un instant, la puce est au point d'abscisse k, à l'instant d'après elle sera soit au point d'abscisse $k+1$, avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, soit au point d'abscisse $k+2$, avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$;
- les sauts sont indépendants.

1. **Question de cours :** formule des probabilités totales.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts à deux unités effectués par la puce au cours des n premiers sauts.

   Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce après n sauts. Exprimer X_n en fonction de S_n. En déduire l'espérance et la variance de X_n.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre minimum de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser (au cas où on ne s'y arrêterait pas) la case d'abscisse n.

   On définit Y_0 comme la variable aléatoire certaine égale à 0.

   (a) Déterminer les valeurs prises par Y_n.

   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout entier $k \geqslant 1$:

   $$\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)$$

   (c) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

   $$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$$

   (d) Déterminer un réel a tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \mathbb{E}(Y_n) - na$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

   Déterminer alors u_n puis $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de n.

Solution :

1. Question de cours : programme ECS1 2013 p. 14.
2. On note Z_i, pour $i \in \mathbb{N}^*$ la variable de Bernoulli égale à 1 si le i-ème saut est de deux unités et à 0 s'il s'agit d'un saut d'une unité. On a donc $Z_i \sim \mathcal{B}(1/2)$.

   Alors $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Z_i$ et comme les Z_i sont indépendantes, puisque par hypothèse les sauts le sont, on en déduit que :

   $$\boxed{S_n \sim \mathcal{B}(n, 1/2)}$$

   En particulier :

   $$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{2} \text{ et } V(S_n) = \frac{n}{4}$$

3. De manière immédiate, comme S_n est le nombre de sauts de deux unités, et que les $n - S_n$ sauts restants sont de une unité, et que la puce est situé au point d'abscisse nulle au départ :

$$X_n = (n - S_n) + 2S_n \text{ soit } \boxed{X_n = n + S_n}$$

On en déduit par linéarité de l'espérance que :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = n + \mathbb{E}(S_n) = \frac{3n}{2}}$$

tandis que par les propriétés de la variance :

$$\boxed{V(X_n) = V(S_n) = \frac{n}{4}}$$

4. (a) La plus grande valeur prise par Y_n est n, dans le cas où l'on effectue que des sauts de une unité. L'autre cas extrême correspond à des sauts qui valent tous deux unités et en ce cas, on atteint, ou dépasse la case d'abscisse n en $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$ sauts (si $n = 2k$, $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor = k$ tandis que si $n = 2k+1$, $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor = k+1$). Ainsi : $Y_n(\Omega) \subset \left[\!\left[\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor, n \right]\!\right]$. Comme tous les cas intermédiaires sont possibles, l'inclusion réciproque est également vérifiée et l'on en déduit finalement : $\boxed{Y_n(\Omega) = \left[\!\left[\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor, n \right]\!\right]}$.

(b) On considère ce qui se passe au premier saut via la variable de Bernoulli Z_1 introduit à la question 1 : $Z_1 = 1$ si le premier saut fait deux unités et 0 sinon. Alors, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n = k) &= \mathbb{P}(Y_n = k|Z_1 = 0)\mathbb{P}(Z_1 = 0) + \mathbb{P}(Y_n = k|Z_1 = 1)\mathbb{P}(Z_1 = 1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_n = k|Z_1 = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_n = k|Z_1 = 1) \end{aligned}$$

De plus : $\mathbb{P}(Y_n = k|Z_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1)$ car une fois effectué un premier saut de une unité, il reste à parcourir une distance de $n-1$ à atteindre en $k-1$ sauts car au départ on voulait parcourir une distance de n unités en k sauts. C'est l'indépendance des sauts et l'invariance du problème par translation sur l'axe gradué qui assure la validité de ce raisonnement.
De même : $\mathbb{P}(Y_n = k|Z_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)$ puisque si le premier saut est de deux unités, il reste $n-2$ unités à parcourir en $k-1$ sauts.
Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)}$$

(c) Il suffit de calculer en revenant à la définition de l'espérance et en utilisant la relation établie à la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \sum_{k=\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}^{n} k\mathbb{P}(Y_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_n = k) \text{ car } \mathbb{P}(Y_n = k) = 0 \text{ pour } k \in \left[\!\left[1, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1 \right]\!\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(Y_{n-1} = k) + \frac{1}{2} \text{ car } Y_{n-1}(\Omega) \subset [\![0, n-1]\!] \\ &= \mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_{n-2}=k-1) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\mathbb{P}(Y_{n-2}=k-1)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(Y_{n-2}=k-1)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(Y_{n-2}=k)+\frac{1}{2} \text{ car } Y_{n-2}(\Omega)\subset [\![0,n-1]\!]\\
&= \mathbb{E}(Y_{n-2})+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit donc finalement :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n)=\frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1})+\frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2})+1}$$

(d) On cherche a tel que :

$$an=\frac{1}{2}a(n-1)+\frac{1}{2}a(n-2)+1$$

ce qui revient à $-\frac{3}{2}a+1=0$ soit $\boxed{a=\frac{2}{3}}$.

Alors, en posant $u_n=\mathbb{E}(Y_n)-\frac{2}{3}a$, on obtient pour $n\geqslant 2$:

$$u_n=\frac{1}{2}u_{n-1}+\frac{1}{2}u_{n-2}$$

Le trinôme caractéristique associé est $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ qui a deux racines distinctes, dont une évidente :

$$r_1=1 \quad \text{et} \quad r_2=-\frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout n :

$$u_n=A+B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

avec A et B des réels.

De plus, de manière immédiate, Y_0 et Y_1 sont des variables aléatoires certaines avec $Y_0=0$ et $Y_1=1$, d'où $\mathbb{E}(Y_0)=0$ et $\mathbb{E}(Y_1)=1$ et $u_0=0$ et $u_1=\frac{1}{3}$ et donc A et B sont déterminées par le système d'équations :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-\frac{1}{2}B=\frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{2}{9} \\ B=-\frac{2}{9} \end{cases}$$

Finalement :

$$u_n=\frac{2}{9}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

et donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \quad \mathbb{E}(Y_n)=\frac{2}{3}n+\frac{2}{9}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

Exercice sans préparation S13

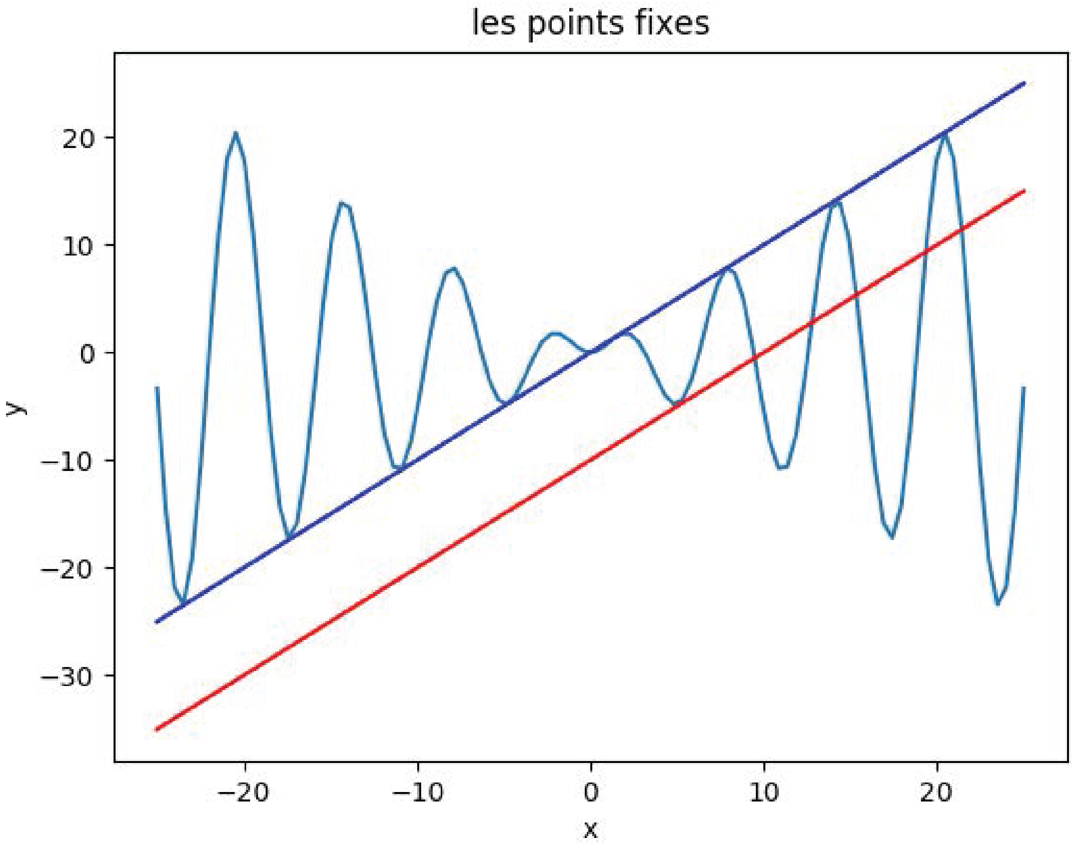
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On définit par récurrence la suite de fonctions f^n par $f^1 = f$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

Ainsi, $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$, où la fonction f apparaît n fois.

1. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f^n admette un point fixe. Montrer que f admet un point fixe.
2. Proposer une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui n'admette aucun point fixe.
3. Proposer une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admette une infinité de points fixes.

Solution :

1. Par l'absurde, on fait faire un dessin au candidat. (Comme f est continue, c'est en fait une conséquence du TVI, si f n'admet pas de point fixe, le graphe de f est au dessus ou au dessous de la première bissectrice)
   Supposons que le graphe de f soit au dessus de la première bissectrice alors
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) > x.$$
   Mais alors
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) > f^{n-1}(x) > f^{n-2}(x) > ... > x$$
   C'est absurde.
   $\boxed{f \text{ admet un point fixe.}}$
2. $\boxed{x \mapsto x - 1}$
3. $\boxed{x \mapsto x\sin(x)}$


les points fixes
20
10
0
−10
−20
−30
y
−20
−10
0
10
20
x

SUJET S14

Exercice principal S14

Soit λ un réel strictement positif.
On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant toutes les deux une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Question de cours : Rappeler la définition et les propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
2. Soit $\mu > 0$.
   (a) Montrer que la variable $Z = -\mu X$ est une variable aléatoire à densité, et en donner une densité.
   (b) On note S_μ la variable définie par $S_\mu = Y - \mu X$.
   Montrer que S_μ admet pour densité la fonction f_μ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1+\mu} \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{\lambda}{1+\mu} \exp\left(\dfrac{\lambda}{\mu} x\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. On considère le polynôme Q à coefficients aléatoires défini par :

$$\mathrm{P}ourtoutreelt, \quad Q(t) = t^2 + tX - Y.$$

   (a) Vérifier que le polynôme Q admet, avec probabilité 1, deux racines réelles (aléatoires) distinctes, notées S et T telles que :
$$S \leqslant 0 \leqslant T.$$
   (b) Justifier que, pour tout réel t positif, on a :
$$[T \leqslant t] = [Y - tX \leqslant t^2]$$
   (c) En déduire que la variable aléatoire T admet une densité, et en donner une.

Solution :

1. Programme officiel ECS1 page 20.
2. (a) On a $Z(\Omega) =]-\infty, 0]$ et pour $x < 0$, $P(Z \leqslant x) = P(-\mu X \leqslant x) = P\left(X \geqslant -\dfrac{x}{\mu}\right) = 1 - F_X\left(\dfrac{-x}{\mu}\right)$.

   On obtient alors que, pour tout réel x, on a : $F_Z(x) = \begin{cases} \exp\left(\lambda \dfrac{x}{\mu}\right) & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

   F_Z étant continue sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, Z admet une densité f_Z donnée par : $\boxed{f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu} e^{\frac{\lambda}{\mu} x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

   (b) Les variables aléatoires Y et $-\mu X$ étant indépendantes, à densité, la variable aléatoire S_μ admet bien une densité, donnée par le produit de convolution :

$$f_\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) f_Z(x-t) dt = \int_{\max(x,0)}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) e^{\frac{\lambda}{\mu}(x-t)} dt$$

- si $x < 0$, on a : $f_\mu(x) = \lambda e^{\frac{\lambda}{\mu}x} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\mu} e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1+\mu)t} dt = \lambda e^{\frac{\lambda}{\mu}x} \frac{1}{1+\mu} = \boxed{\frac{\lambda}{1+\mu} e^{\frac{\lambda}{\mu}x}}$
- si $x \geqslant 0$, on a : $f_\mu(x) = \lambda e^{\frac{\lambda}{\mu}x} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\lambda}{\mu} e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1+\mu)t} dt = \lambda e^{\frac{\lambda}{\mu}x} \frac{1}{1+\mu} e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1+\mu)x} \boxed{= \frac{\lambda}{1+\mu} e^{-\lambda x}}$.

3. (a) Ici, on a $\Delta = X^2 + 4Y \geqslant 0$
De plus, $P(\Delta = 0) = P(X^2 = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = 0$, donc presque-sûrement, $\Delta > 0$ et on a donc $\boxed{\text{deux racines réelles distinctes}}$ S et T. On note S la plus petite.
Puisque $ST = -Y \leqslant 0$, les deux racines sont de signes distincts, donc $\boxed{S \leqslant 0 \leqslant T.}$

(b) On sait que le polynôme Q est positif sur $]-\infty, S]$ et sur $[T, +\infty[$.
Donc en particulier, pour t positif, on a $Q(t) \leqslant 0$ si $t \in [0, T]$ et $Q(t) \geqslant 0$ si $t \in [T, +\infty[$. Ainsi :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \boxed{[T \leqslant t] = [Q(t) \geqslant 0] = [t^2 + tX - Y \geqslant 0] = [Y - tX \leqslant t^2]}$$

(c) Remarquons déjà que T étant positive, on a $T(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$.
- si $t \leqslant 0$, $P(T \leqslant t) = 0$.
- si $t > 0$, $P(T \leqslant t) = P(Y - tX \leqslant t^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t^2} f_t(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{1+t} e^{\frac{\lambda}{t}x} dx + \int_0^{t^2} \frac{\lambda}{1+t} e^{-\lambda x} dx$

$$= \frac{\lambda}{1+t}\left[\frac{t}{\lambda} e^{\frac{\lambda}{t}x}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{\lambda}{1+t}\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{t^2} = \frac{t}{1+t} + \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t} e^{-\lambda t^2} = 1 - \frac{1}{1+t} e^{-\lambda t^2}.$$

Ainsi on a pour tout réel t : $F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{1+t} e^{-\lambda t^2} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$.

F_T étant continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, T admet bien une densité, par exemple :
$$\boxed{t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1 + 2\lambda t + 2\lambda t^2}{(1+t)^2} e^{-\lambda t^2} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}$$

Exercice sans préparation S14

On rappelle que pour $i \in \mathbb{N}$, $f^{(i)}$ est la dérivée i-ème de f.
On définit pour chaque n entier naturel la propriété P_n suivante :

$$P_n : \text{"}\forall f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \ \exists a \in \mathbb{R} \text{ tel que } \prod_{i=0}^{n} f^{(i)}(a) \geqslant 0.\text{"}$$

1. Les propositions P_0 et P_1 sont-elles vraies ?
2. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f'(x)f''(x)f^{(3)}(x) < 0$.
   Montrer que f et f'' sont toutes les deux à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ ou toutes les deux à valeurs dans $\mathbb{R}^{-*}$.
3. En déduire que la proposition P_3 est vraie.

Solution :

1. $\boxed{P_0 \text{ et } P_1 \text{ sont fausses}}$: il suffit de choisir $f_0 : x \mapsto -e^x$ et $f_1 : x \mapsto \exp(-x)$.
2. Remarquons que f, f', f'' et f''' qui sont continues sur $\mathbb{R}$, sont de signe constant car sinon elle s'annulerait ce qui est contraire à l'hypothèse $ff'f''f''' < 0$.

   Si $f'' > 0$ alors f est convexe, donc sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

   En particulier au-dessus de la tangente en 0 , d'équation $y = f'(0)\,.\,x + f(0)$.
   Comme $f'(0)$ est non nul (f' ne s'annulant pas), y tend vers $+\infty$ quand x tend vers $\pm\infty$, selon le signe de $f'(0)$.
   Donc $f(x)$ est positif quand x tend vers $\pm\infty$, donc partout (f est de signe constant) : $f > 0$.

   $f'' < 0$ implique que f est concave, et un raisonnement analogue montre que : $f < 0$.

   Donc $\boxed{f \text{ et } f'' \text{ ont donc toujours le même signe, et ne s'annulent pas sur } \mathbb{R}.}$
3. Raisonnons par l'absurde : supposons que de même qu'en 2) que $f.f'.f''.f''' < 0$, alors les fonctions f' et f''' sont de même signe (même preuve avec f' et f''' au lieu de f et f''.)

   Il en résulte que : $f.f'.f''.f''' > 0$; donc contradiction ; par suite :

   $\boxed{\exists\, a \in \mathbb{R} \text{ tel que : } f(a)\ f'(a)\ f''(a)\ f'''(a) \geq 0,\ P_3 \text{ est vraie.}}$

SUJET S15

Exercice principal S15

1. **Question de cours :** Énoncer le théorème de Rolle
2. Montrer que, pour tout $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, il existe un unique polynôme $P_a \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_a(0) = a_1,\ P'_a(0) = a_2,\ P_a(1) = a_3$ et $P'_a(1) = a_4$.
3. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer P_{e_1}
   On pourrait montrer que $P_{e_2} = X(X-1)^2$, $P_{e_3} = (-2X+3)X^2$ et $P_{e_4} = X^2(X-1)$.

   Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$. On note $a(f) = (f(0), f'(0), f(1), f'(1))$
   On note alors $Q_f = P_{a(f)}$, l'unique polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant
   $$Q_f(0) = f(0),\ Q'_f(0) = f'(0),\ Q_f(1) = f(1) \text{ et } Q'_f(1) = f'(1).$$
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 Q_f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{12}f'(1)$.
5. Soit $x \in]0;1[$ fixé.
   Notons $C = 4!\dfrac{f(x) - Q_f(x)}{x^2(1-x)^2}$. En considérant la fonction $g : t \mapsto f(t) - Q_f(t) - \dfrac{C}{4!}t^2(1-t)^2$,
   montrer qu'il existe $\xi \in]0,1[$ tel que $f(x) - Q_f(x) = \dfrac{x^2(1-x)^2}{4!}f^{(4)}(\xi)$.
6. Montrer qu'il existe M une constante que l'on exprimera en fonction des propriétés de f telle que :
   $$\left|\int_0^1 f(t) - \left(-\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{12}f'(1)\,\mathrm{d}t\right)\right| \leqslant \frac{M}{720}.$$

Solution :

1. Programme officiel ECS1 page 12.
2. Considérons l'application ϕ, qui à tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe $(P(0), P'(0), P(1), P'(1)) \in \mathbb{R}^4$. C'est une application linéaire. Étudions son injectivité : un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ appartient au noyau de ϕ si, et seulement si 0 et 1 sont racines (au moins) double de P, i.e. si et seulement si P divisible par $X^2(X-1)^2$; puisque $\deg P \leqslant 3$, cela revient à affirmer que $P = 0$. L'application ϕ est injective. Puisque $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^4$ sont deux espaces vectoriels de même dimension, φ est un isomorphisme.
   On en déduit donc que pour tout $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$:
   $\boxed{\text{il existe un unique polynôme } P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P(0) = a_1,\ P'(0) = a_2,\ P(1) = a_3 \text{ et } P'(1) = a_4.}$
3. On cherche $P_1 \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_1(0) = 1$ et $P'_1(0) = P_1(1) = P'_1(1) = 0$.
   Il est donc de la forme $(X-1)^2(aX+b)$. Puisque $P_1(0) = 1$ et $P'_1(0) = 0$, il vient que $b = 1$ et $a = 2$, i.e. $\boxed{P_1 = (2X+1)(X-1)^2.}$
   On trouve de la même manière $\boxed{P_2 = X(X-1)^2,\ P_3 = (-2X+3)X^2 \text{ et } P_4 = X^2(X-1).}$
4. $Q_f = \phi^{-1}(a(f)) = f(0)\phi^{-1}(e_1) + f'(0)\phi^{-1}(e_2) + f(1)\phi^{-1}(e_3) + f'(1)\phi^{-1}(e_4)$ par linéarité de ϕ^{-1}.
   Ainsi $Q_f = f(0)P_1 + f'(0)P_2 + f(1)P_3 + f'(1)P_4$.
   On en déduit que, par linéarité de l'intégrale :
   $$\int_0^1 Q_f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)\int_0^1 P_1(t)\,\mathrm{d}t + f'(0)\int_0^1 P_2(t)\,\mathrm{d}t + f(1)\int_0^1 P_3(t)\,\mathrm{d}t + f'(1)\int_0^1 P_4(t)\,\mathrm{d}t$$
   $$\boxed{= -\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{12}f'(1).}$$

5. Remarquons que g est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$. Puisque $g(0)=g(1)=g(x)=0$, on peut appliquer le théorème de Rolle à g sur les intervalles $]0,x[$ et $]x,1[$: il existe $a\in]0,x[$ et $b\in]x,1[$ tel que $g'(a)=g'(b)=0$.
   On a de plus $g'(0)=g'(1)=0$.
   $\boxed{g' \text{ s'annule au moins 4 fois dans } [0;1]}$ En appliquant successivement le théorème de Rolle à g', g'' et $g^{(3)}$, on montre que g'' s'annule s'annule (au moins) trois fois sur $]0,1[$, puis $g^{(3)}$ s'annule au moins deux fois sur $]0,1[$, et enfin que $g^{(4)}=f^{(4)}-C$ s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.
   $\boxed{\text{Il existe donc } \xi\in]0,1[\text{ tel que } f^{(4)}(\xi)=C, \text{ i.e. } f(x)-Q_f(x)=\dfrac{x^2(1-x)^2}{4!}f^{(4)}(\xi).}$

6. Notons $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f^4(x)|$ (M existe par continuité de $f^{(4)}$ sur $[0,1]$). D'après la question 5.(b), on a :
   $$\forall x\in]0,1[,\ \ |f(x)-Q_f(x)|\leqslant\frac{x^2(1-x)^2}{4!}M.$$
   Par continuité de f et Q_f en 0 et 1, cette majoration est toujours valable en 0 et en 1. L'inégalité triangulaire assure alors que :
   $$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 Q_f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f(x)-Q_f(x)|\,\mathrm{d}x=M\int_0^1\frac{x^2(1-x)^2}{4!}\,\mathrm{d}x=\frac{M}{30\times 24}=\boxed{\frac{M}{720}}.$$

Exercice sans préparation S15

Donner la finalité du progamme suivant :

```
N=100000;S=0;
for i=1:N
    u=rand();
    S=S+4/N*1/(1+u^2);
end
disp(S)
```

Solution :

Le programme donne une moyenne empirique d'un échantillon de variables ayant la loi de $Y = \dfrac{4}{1+X^2}$ où X suit une loi uniforme sur [0,1].

Par la loi des grand nombre, ce programme approche $\mathbb{E}(Y) = 4\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Le programme permet donc $\boxed{\text{d'approcher } \pi \text{ en utilisant la loi des grands nombres. (méthode de Monté-Carlo)}}$

Question : subsidiaire : vaut-il mieux utiliser cette méthode ou une méthode des rectangles à 100 termes pour approcher π ?

SUJET S16

Exercice principal S16

1. **Question de cours :** Somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes.
2. Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une famille de variables indépendantes suivant chacune une même loi exponentielles de paramètre $\lambda > 0$.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer qu'une densité de S_n est la fonction f_n définie par :
   $$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n x^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}}{(n-1)!} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
3. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n la fonction de répartition de S_n. Montrer que, pour $t \geqslant 0$:
   $$F_n(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \ldots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$
4. Soit $t \geqslant 0$. On désigne par $N(t)$ le plus grand entier n tel que $S_n \leqslant t$.
   Si $S_1 > t$, on pose $N(t) = 0$.
   Déterminer la loi de $N(t)$.
5. On considère maintenant une variable aléatoire R de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
   On suppose que R est indépendante de chacune des variables X_k, $k \in \mathbb{N}^*$ et l'on pose $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{R} X_k$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de S.
   (b) En déduire la loi de S et montrer que $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(R)$.

Solution :

1. Question de cours : programme ECS2 2014 p. 14.
2. On va prouver le résultat par récurrence sur n.
   Pour $n = 1$, de manière immédiate :
   $$f_1(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
   et le résultat est vrai.
   Soit donc $n \geqslant 1$ tel que le résultat demandé soit vrai au rang n. Alors, par le lemme des coalitions S_n et X_{n+1} sont indépendantes, S_{n+1} est à densité, et :
   $$f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) f_1(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Compte-tenu du support des densités f_n et f, $f_{n+1}(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \int_0^x f_n(t) f_1(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{\lambda^n t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t}}{(n-1)!} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x-t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda^{n+1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda^{n+1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

et le résultat est vrai au rang $n+1$.

3. On démontre là encore le résultat par récurrence sur n.
   Pour $n = 1$ le résultat est vrai car $F_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ est bien la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ.
   Soit donc $n \geqslant$ tel que le résultat soit vrai au rang n. Alors, pour $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(t) &= \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant t) \\
&= \int_0^t f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \frac{\lambda^{n+1} x^n \mathrm{e}^{-\lambda x}}{n!}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\lambda^n e^{-\lambda x} \frac{x^n}{n!} \right]_0^t + \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}x \text{ par intégration par parties} \\
&= -\lambda^n e^{-\lambda t} \frac{t^n}{n!} + F_n(t) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \left(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \ldots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right)
\end{aligned}$$

   par hypothèse de récurrence.
   Le résultat est ainsi prouvé.
   On peut également dériver la fonction F_n dont l'expression est donnée dans l'énoncé et vérifier que $F_n' = f_n$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors : $\mathbb{P}(N(t) = n) = \mathbb{P}(S_n \leqslant t, S_{n+1} > t)$ car les variables X_k sont à valeurs positives.
   De même toujours par positivité des X_k :

$$\{S_{n+1} > t\} = \{S_n > t\} \cup \{S_n \leqslant t, S_{n+1} > t\}$$

   et l'union des deux événements dans le second membre est disjointe. On a donc :

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant t, S_{n+1} > t) = \mathbb{P}(S_{n+1} > t) - \mathbb{P}(S_n > t) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

   Finalement, compte-tenu de la question précédente :

$$\boxed{\mathbb{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

   On reconnaît une loi de Poisson de paramètre λt. En particulier, cela prouve que $N(t)$ est presque sûrement fini.

5. (a) Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S \leqslant x) &= \sum_{r \geqslant 1} \mathbb{P}_{R=r}(S \leqslant x)\mathbb{P}(R=r) \\
&= \sum_{r \geqslant 1} \mathbb{P}(S_r \leqslant x)\mathbb{P}(R=r) \\
&= \sum_{r \geqslant 1} \left(1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\right) q^{r-1} p \\
&= 1 - p e^{-\lambda x} \sum_{r \geqslant 1} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} q^{r-1} \\
&= 1 - p e^{-\lambda x} \sum_{k \geqslant 0} \sum_{r \geqslant k+1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} q^{r-1} \text{ en intervertissant l'ordre de sommation} \\
&= 1 - p e^{-\lambda x} \sum_{k \geqslant 0} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \frac{q^k}{1-q} \\
&= 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k \geqslant 0} \frac{(q\lambda x)^k}{k!} \text{ car } 1 - q = p \\
&= 1 - e^{-\lambda x} e^{q\lambda x} \\
&= \boxed{1 - e^{-\lambda p x}}
\end{aligned}$$

(b) On reconnaît la fonction de répartition $\boxed{\text{d'une loi exponentielle de paramètre } \lambda p}$.

En particulier $\boxed{\mathbb{E}(S) = \dfrac{1}{\lambda p} = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(R).}$

Exercice sans préparation S16

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On pose $B = A^3 + A + I_n$.
Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = Q(B)$.

Solution :

La fonction $f : x \mapsto x^3 + x + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective.
Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de A, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$. Il existe alors une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \ldots, \lambda_p I_{m_p}).$$

On a alors $B = f(A) = Pf(D)P^{-1} = P\Delta P^{-1}$ où :

$$\Delta = \mathrm{diag}(f(\lambda_1)I_{m_1}, \ldots, f(\lambda_p)I_{m_p}).$$

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, notons $\mu_i = f(\lambda_i)$.
Puisque f est injective, les réels $\mu_1, \ldots, \mu_p$ sont deux-à-deux distincts. Le polynôme $Q = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i L_i$, où

$$L_i = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} (X - \mu_k)}{\displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} (\mu_i - \mu_k)}$$

vérifie $Q(\mu_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. On a alors : $Q(B) = PQ(\Delta)P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

$\boxed{\text{il existe un polynôme } Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } A = Q(B).}$

On pourra demander aux plus rapides si la propriété est-elle toujours vraie lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Le résultat n'est plus vrai en toutes généralités si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: la fonction $f : z \mapsto z^3 + z + 1$ n'est pas injective sur $\mathbb{C}$. Il existe donc deux complexes distincts α et β tels que $f(\alpha) = f(\beta)\,(= \gamma)$. Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, alors $B = \begin{pmatrix} f(\alpha) & 0 \\ 0 & f(\beta) \end{pmatrix} = \gamma I_2$. La matrice B est donc scalaire alors que A ne l'est pas.

$\boxed{\text{La propriété est fausse lorsque l'on choisit } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{ sauf si } n = 1.}$

SUJET S17

Exercice principal S17

1. **Question de cours :** définition de la convergence absolue d'une série. Lien avec la convergence.
2. Soit x un réel. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{(n!)^2}$ converge.

   On note alors :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}.$$
3. Soient x et y deux réels positifs. Notons $z = \max(x, y)$. Montrer que :
$$|f(x) - f(y)| \leqslant e^z |x - y|$$
   En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) > 1$ et que : $f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
5. On pose pour tout $x > 0$,
$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t(f(t))^2}\mathrm{d}t.$$
   (a) Justifier que g est bien définie sur $]0, +\infty[$.

   (b) Montrer que :
$$g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$$

Solution :

1. Programme officiel ECS1 page 18.
2. Soit x un réel. Alors : $\forall n \geqslant 0,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{x^n}{(n!)^2}\right| = \dfrac{|x|^n}{(n!)^2} \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!}$.

   Comme la série exponentielle $\sum \dfrac{|x|^n}{n!}$ converge, on en déduit par critère de majoration de suites positives que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{(n!)^2} \text{ converge absolument, donc converge.}}$
3. Soient x et y deux réels positifs. On a (toutes les séries étant bien convergentes) :
$$|f(x) - f(y)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n - y^n}{(n!)^2}\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-y)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}}{(n!)^2}\right| \leqslant |x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^{n-1}}{(n!)^2} \leqslant |x-y| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \boxed{e^z|x-y|}$$
   (on peut aussi appliquer l'IAF à $t \mapsto t^n$ dans l'intervalle $[x; y]$ ou $[y; x]$)

   Comme à x fixé, $y \mapsto \max(x, y)$ est continue, on a bien : $\lim\limits_{y\to x} e^{\max(x,y)} |x - y| = 0$

   Pour tout réel x positif, on a donc : $\lim\limits_{y\to x} |f(x) - f(y)| = 0$ par encadrement.

   Autrement dit, $\boxed{f \text{ est continue en tout réel } x \text{ de } [0, +\infty[.}$

4. Soit $x > 0$. Remarquons que $f(x) = 1 + x + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \geqslant 1 + x > 1$.

De plus, pour x proche de 0, x non nul, on a :

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n!)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{((k+1)!)^2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!)^2}$$

Or,

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!)^2}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} = e^{|x|} - 1$$

Donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!)^2} = 0$, et on a bien :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1 \Longrightarrow \boxed{f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

5. (a) Soit $x > 0$. Alors la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(f(t))^2}$ est continue sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$) puisque f est continue et ne s'annule pas sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$). Ainsi, $\boxed{g(x) \text{ est bien défini pour tout réel } x > 0.}$

(b) Remarquons alors que :

$$g(x) - \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t(f(t))^2}\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1-(f(t))^2}{t(f(t))^2}\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{f(t)-1}{t}\frac{f(t)+1}{(f(t))^2}\mathrm{d}t$$

Or, remarquons que : $\dfrac{f(t)-1}{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ d'après 4, et $\dfrac{f(t)+1}{(f(t))^2} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 2$.

Ainsi, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)-1}{t}\dfrac{f(t)+1}{(f(t))^2}$ est prolongeable par continuité en 0.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)-1}{t}\frac{f(t)+1}{(f(t))^2}$ est donc convergente car faussement impropre. En notant I sa valeur, on a donc :

$$g(x) - \ln(x) = I + \underset{x\to 0}{o}(1) \Longrightarrow g(x) = \ln(x) + I + \underset{x\to 0}{o}(1) \Longrightarrow \boxed{g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)}$$

Exercice sans préparation S17

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un vecteur aléatoire défini sur Ω tel que :

— $(X, Y)(\Omega) = \{(0,0), (0,1), (1,1)\} \cup \{(n, 0) | n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty[\}$

— X suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

— Y suit une loi de Bernouilli de paramètre $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

1. Les deux variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer la loi du vecteur (X, Y).

2. Montrer que $\mathbb{P}(X \neq Y) \leqslant \dfrac{2}{3}$.

3. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$| \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A) | \leqslant \frac{2}{3}$$

Solution :

1. Les variables X et Y $\boxed{\text{ne sont pas indépendantes}}$ en effet $\mathbb{P}((X = 1 \cap Y = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0)$.

   Notons $p = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

   On a, par définition des lois marginales : $\boxed{\mathbb{P}((X, Y) = (1,1)) = P(X = 1) = pe^{-p}}$ et $\mathbb{P}((X, Y) = (0,1)) + \mathbb{P}((X, Y) = (1,1)) = P(Y = 1) = p$ d'où : $\boxed{\mathbb{P}((X, Y) = (0,1)) = p - pe^{-p}}$ $\mathbb{P}((X, Y) = (0,1)) + \mathbb{P}((X, Y) = (0,0)) = P(X = 0) = e^{-p}$ d'où $\boxed{\mathbb{P}((X, Y) = (0,0)) = pe^{-p} + e^{-p} - p}$ Enfin pour tout n supérieur ou égal à 2 on a : $\boxed{\mathbb{P}((X, Y) = (n, 0)) = p^n e^{-p}/n!}$.

   Mais attention : pour prouver que qu'une telle loi existe il faut vérifier que la somme des proba vaut 1 :

$$pe^{-p} + p - pe^{-p} + pe^{-p} - p + e^{-p} + \sum_{n=2}^{+\infty} p^n e^{-p}/n! = 1$$

2. On a :

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y) = 1 - \mathbb{P}((X, Y) = (1,1)) - \mathbb{P}((X, Y) = (0,0)) = 1 - (e^{-p} + pe^{-p} - p + pe^{-p})$$

   or, par convexité de la fonction $f(x) = e^{-x}$ on a : $e^{-p} \geqslant 1 - p$. D'où :

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = 1 + p - e^{-p}(2p + 1) \leqslant 1 + p - 2p(1 - p) = 2p^2 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

3. $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}([X \in A] \cap (Y \in A]) + \mathbb{P}([X \in A] \cap (Y \in \overline{A}])$ et de même

   $\mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}([X \in A] \cap (Y \in A]) + \mathbb{P}([Y \in A] \cap (X \in \overline{A}])$ d'où par soustraction

$$|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| = \left|\mathbb{P}([X \in A] \cap (Y \in \overline{A}]) - \mathbb{P}([Y \in A] \cap (X \in \overline{A}])\right| \leqslant \mathbb{P}([X \in A] \cap (Y \in \overline{A}]) + \mathbb{P}([Y \in A] \cap (X \in \overline{A}])$$

   or l'évènement $[X \in A] \cap (Y \in \overline{A}] \cap [Y \in A] \cap (X \in \overline{A}] \subset [X \neq Y]$ et donc :

$$\boxed{|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leqslant \mathbb{P}(X \neq Y) \leqslant \frac{2}{3}}$$

SUJET S19

Exercice principal S19

On considère l'équation :

$$1-5x=2x^2\ln x \tag{E}$$

1. **Question de cours :** énoncer l'inégalité des accroissements finis.
2. Soit φ définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{5}{x}-2\ln x$.

   En étudiant φ, montrer que l'équation (E) admet une unique solution α et justifier que $\alpha\in\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$.
3. Soit f définie pour $x\in]0,+\infty[$ par :
$$f(x)=\frac{1-x-2x^2\ln x}{4}$$
   (a) Montrer que l'on peut prolonger f par une fonction continue et dérivable sur $[0,+\infty[$. Préciser alors $f(0)$ et $f'(0)$.

   (b) On rappelle que $0.69<\ln(2)<0.7$. Étudier les variations de f' et de f sur $[0,1]$.
4. Le but de cette question est de déterminer une valeur approchée de α. Pour cela on définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par :
$$u_0=\frac{1}{5}\quad\text{et}\quad u_{n+1}=f(u_n)\text{ pour } n\geqslant 0$$
   (a) Justifier que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad |u_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{3}{4}|u_n-\alpha|$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

   (c) Comment utiliser cette suite (u_n) pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-5} près ?

   (d) Écrire un programme Scilab qui permette d'obtenir une telle valeur approchée à 10^{-5} près.

Solution :

1. Question de cours : programme ECS1 2013 p. 12.
2. La fonction φ est dérivable sur son ensemble de définition et, pour $x>0$:
$$\varphi'(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x}=-\frac{2x^2-5x+2}{x^3}=-\frac{(2x-1)(x-2)}{x^3}$$
   On a donc $\varphi'(x)=0$ si et seulement $x=2$ ou $x=\dfrac{1}{2}$. De plus $\varphi'(x)>0$ si et seulement si $x\in\left]\dfrac{1}{2},2\right[$.

   La fonction est donc strictement décroissante sur $]0,1/2]$, strictement croissante sur $[1/2,2]$ puis à nouveau strictement décroissante sur $[2,+\infty[$.

   On remarque que $\varphi(2)=-\dfrac{9}{4}-2\ln 2$ d'où, par l'étude des variations, le fait que, pour tout $x\geqslant\dfrac{1}{2}$, $\varphi(x)<0$.

   En particulier, φ ne s'annule pas sur $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

   Par ailleurs, φ est continue strictement décroissante sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$, elle induit donc une bijection de $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ sur $\left]\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right),+\infty\right[$ en vertu du théorème de la bijection.

   De plus $0\in\left]\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right),+\infty\right[$ car $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$. On en déduit donc qu'il existe un unique $\alpha\in\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ tel que $\varphi(\alpha)=0$. De plus c'est l'unique solution de l'équation $\varphi(x)=0$ sur $]0,+\infty[$ par ce qui précède.

Enfin, l'équation (E) est équivalente à l'équation $\varphi(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$.

On en déduit donc que $\underline{\text{l'équation } (E) \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et que } \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[}$.

3. (a) Par croissance comparée, $\lim_{x \to 0} x^2 \ln x = 0$ d'où $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{4}$. On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0) = \frac{1}{4}}$.

Le taux d'accroissement en 0 est alors :

$$\frac{f(x) - \frac{1}{4}}{x} = -\frac{1 + 2x \ln x}{4}$$

Encore par croissance comparée, on obtient $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \frac{1}{4}}{x} = -\frac{1}{4}$. Ainsi la fonction est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{4}$.

La dérivabilité sur $]0, +\infty[$ ne pose pas de problème et f est donc bien dérivable sur $[0, +\infty[$.

(b) $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = \frac{-1}{4} - x \ln(x) - \frac{x}{2}$.

La fonction f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$: $f''(x) = -\frac{3}{2} - \ln(x)$ Ainsi $f''(x) = 0$ si et seulement si $x = e^{-\frac{3}{2}} \in]0, 1]$. De plus $f''(x) < 0$ pour $x \in \left]e^{-\frac{3}{2}}, 1\right]$ et $f''(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]0, e^{-\frac{3}{2}}\right[$.

De plus, $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$, donc f' est continue en 0.

Ainsi f' est strictement croissante sur $\left[0, e^{-\frac{3}{2}}\right]$ puis strictement décroissante sur $\left[e^{-\frac{3}{2}}, 1\right]$.

La fonction f' admet donc un maximum en $x = e^{-\frac{3}{2}}$ et ce maximum est égal à $e^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}$. Ce nombre est négatif car $3 > 4 \ln(2)$. On a donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. De plus, comme $f'(0) = -\frac{1}{4}$ et $f'(1) = -\frac{3}{4}$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in [0,1] \quad |f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}}$$

Comme $f' < 0$ sur $[0, 1]$, f y est strictement décroissante et comme $f(0) = \frac{1}{4}$ tandis que $f(1) = 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in [0,1] \quad f(x) \in [0,1]}$$

4. (a) On commence par montrer par récurrence sur n que u_n est bien défini avec $u_n \in [0, 1]$ pour tout n.

Pour $n = 0$ le résultat est évident.

Soit $n \geqslant 0$ tel que u_n est bien défini avec $u_n \in [0, 1]$. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini car f est définie sur $[0, 1]$, et d'après la question 2.c), $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1]$. Cela prouve le résultat au rang $n + 1$.

On en déduit donc le résultat annoncé par récurrence. En particulier : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0,1]}$.

Alors d'après la question 2.c), $\forall x \in [0, 1] \quad |f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}$, donc par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$$

soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \alpha|}$$

(b) On montrer par récurrence, que, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Le résultat est trivial pour $n = 0$ car u_0 et α sont dans $[0, 1]$.

On suppose qu'il est vrai au rang $n \geqslant 0$. Alors, par la question précédente :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence.
On en déduit donc par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Alors, comme $0 < \frac{3}{4} < 1$, par théorème de comparaison, $\underline{(u_n) \text{ est convergente}}$ et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$.

(c) Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

il suffit de trouver n tel que $\left(\frac{3}{4}\right)^n < 10^{-5}$ pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-5} près. Cela revient à choisir n tel que $n > -5\frac{\ln(10)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$. Pour une telle valeur de n, u_n est une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

(d) Une possibilité est le code suivant, qui en plus de calculer la valeur approchée de α renvoie également la valeur de l'indice n du terme u_n étant l'approximation recherchée :

```
u=1/5
n=0
geo=1
while geo>10^(-5)
    u=(1-u-2*u^2*log(u))/4
    geo=geo*3/4
    n=n+1
end
disp(n,u)
```

Exercice sans préparation S19

Un joueur lance simultanément N dés équilibrés. Puis, il effectue un deuxième lancer en ne relançant que les dés qui n'ont pas donné 6. Il continue ainsi, en ne relançant à chaque tirage que les dés n'ayant jamais donné 6.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n le nombre de 6 obtenus lors des n premiers lancers.

1. Déterminer la loi de S_1 puis celle S_2.
2. Quelle est la loi de S_n ? son espérance ?
3. Montrer que $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n = N]) = 1$

Solution :

1. $\boxed{S_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(N, \frac{1}{6}),\ S_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1 - (\frac{5}{6})^2)}$
2. $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1 - (\frac{5}{6})^n)}$
3. Théorème de limite monotone p21 $ECS1$
   $([S_n = N])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements donc

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n = N]) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n = N]) = \lim_{n\to+\infty} (1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n)\boxed{= 1}$$

Interprétation : avec une infinité de lancers, presque sûrement tous les dés donneront un 6.

SUJET S20

Exercice principal S20

1. **Question de cours :** Théorème de d'Alembert-Gauss.
2. Soit $n \geqslant 1$ et soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ des réels positifs non tous nuls.

   On considère le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ défini par : $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

   (a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{P(x)}{x^n}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

   (b) En déduire que le polynôme P admet exactement une racine dans $\mathbb{R}_{+,*}$
   On note α cette racine par la suite.

   (c) Soit z une racine complexe de P.

      i. Si $z \neq 0$, déterminer le signe de $f(|z|)$.

      ii. En déduire que : $|z| \leqslant \alpha$.

   Soit $n \geqslant 1$, soient $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ des réels non tous nuls et soit b_n un réel non nul.

   On considère maintenant le polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ défini par : $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.

3. (a) Montrer que l'équation $\sum_{k=0}^{n-1} |b_k| x^k = |b_n| x^n$ admet une unique solution réelle strictement positive.
   On note cette solution β.

   (b) Soit z une racine complexe de Q.
   Montrer que $|z| \leqslant \beta$. Notons maintenant $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les n racines complexes (distinctes ou non) de Q avec :
$$|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \cdots \leqslant |z_n| \leqslant \beta$$

4. (a) On **admet** que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $\left|\dfrac{b_k}{b_n}\right| \leqslant \dbinom{n}{k} |z_n|^{n-k}$.

   En déduire que : $\beta^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \dbinom{n}{k} \beta^k |z_n|^{n-k}$.

   (b) Montrer finalement que : $(\sqrt[n]{2} - 1)\beta \leqslant |z_n|$.

5. On va prouver la formule admise

   (a) On note pour $k \in [\![0, n]\!]$, E_k l'ensemble des parties à k éléments de $[\![0, n]\!]$.

   Factoriser Q, et en déduire que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{b_k}{b_n} = \sum_{\{i_1, \ldots, i_{n-k}\} \in E_{n-k}} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_{n-k}}$

   (b) Prouver alors la formule admise.

Solution :

1. Programme officiel ECS1 page 7
2. (a) Pour tout $x > 0$, $f(x) = -1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n}$.

   La fonction f est donc la somme de fonctions décroissantes sur $]0, +\infty[$, dont au moins une (les a_k sont non tous nuls) est strictement décroissante.

   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement décroissante sur }]0, +\infty[.}$

(b) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, donc réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $f(]0,+\infty[=]\lim\limits_{+\infty} f, \lim\limits_{0^+} f[=]-1,+\infty[$ car il existe $k \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_k x^{k-n}$ avec $a_k > 0$. La fonction f s'annule donc une et une seule fois sur $]0,+\infty[$, et donc P aussi (car pour $x>0$, on a l'équivalence $f(x)=0 \iff P(x)=0$). P admet donc $\boxed{\text{une unique racine réelle strictement positive.}}$

(c) Soit z une racine complexe de P.

i. Supposons $z \neq 0$. On a alors : $P(|z|) = |z|^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k |z|^k$. Or $P(z)=0$, donc : $z^n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k z^k$.

Donc par inégalité triangulaire, on a $|z|^n = |z^n| = \left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k |z^k|$.

Ainsi, on a $P(|z|) \leqslant 0$ et donc $\boxed{f(|z|) \geqslant 0 = f(\alpha).}$

ii. Si $z \neq 0$, d'après la question précédente, on a $f(|z|) \geqslant f(\alpha)$, donc comme f décroissante, on a $\boxed{|z| \leqslant \alpha.}$

Et si $z=0$, c'est bien vrai puisque $0 \leqslant \alpha$.

3. (a) On note $P_0(X) = X^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|\dfrac{b_k}{b_n}\right| X^k$. Comme $b_n \neq 0$: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |b_k| x^k = |b_n| x^n \iff \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|\dfrac{b_k}{b_n}\right| x^k = x^n \iff P_0(x) = 0$.

P_0 vérifie les conditions de la question 2, donc P_0 admet une unique racine réelle strictement positive.

$$\boxed{\text{L'équation } \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| x^k = |b_n| x^n \text{ admet donc une unique solution réelle strictement positive notée } \beta.}$$

(b) En notant z une racine complexe de Q, alors $|b_n z^n| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n-1} |b_k||z|^k$ et donc $P_0(|z|) \leqslant 0$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} P_0(x) = +\infty$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires $\beta \in [|z|,+\infty[$ et donc

$$\boxed{|z| \leqslant \beta}$$

4. (a) On admet que pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$, on a : $\left|\dfrac{b_k}{b_n}\right| \leqslant \dbinom{n}{k} |z_n|^{n-k}$.

En multipliant par β^k, puis en sommant, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta^k \left|\frac{b_k}{b_n}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \beta^k |z_n|^{n-k}$$

Or par définition de β, on a $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |b_k| \beta^k = |b_n| \beta^n$, d'où : $\boxed{\beta^n \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{n}{k} \beta^k |z_n|^{n-k}}$.

(b) On en déduit que $\beta^n \leqslant (\beta + |z_n|)^n - \beta^n \iff 2\beta^n \leqslant (\beta+|z_n|)^n$.

On conclut par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ que : $\boxed{(\sqrt[n]{2}-1)\beta \leqslant |z_n|}$.

5. (a) Les relations coefficients/racines ne sont pas au programme.

On factorise : $Q(X) = b_n \prod\limits_{j=1}^{n} (X - z_j)$

On développe ce produit, on a somme de produit de "X" et de z_j. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on aura un terme de degré k quand le facteur "X" sera pris k fois et le facteur z_j $n-k$ fois.

Ainsi $b_k X^k = b_n \sum\limits_{\{i_1,\ldots,i_{n-k}\}\in E_{n-k}} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_{n-k}}$ et $\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \dfrac{b_k}{b_n} = \sum\limits_{\{i_1,\ldots,i_{n-k}\}\in E_{n-k}} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_{n-k}}}$

(b) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Par inégalité triangulaire

$\left|\dfrac{b_k}{b_n}\right| \leqslant \sum\limits_{\{i_1,\ldots,i_{n-k}\}\in E_{k-1}} |z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_{n-k}}| \leqslant \sum\limits_{\{i_1,\ldots,i_{n-k}\}\in E_{n-k}} |z_n|^{n-k}$

Or, il y a $\dbinom{n}{n-k} = \dbinom{n}{k}$ éléments dans E_{n-k}, donc $\dbinom{n}{k}$ termes dans la somme.

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \left|\frac{b_k}{b_n}\right| \leqslant \binom{n}{k} |z_n|^k}$$

Exercice sans préparation S20

On considère un circuit électronique avec 3 composants C_1, C_2 et C_3.
Ce circuit ne fonctionne qui si C_1 fonctionne ainsi que C_2 ou C_3.
Sachant que les durées de vie de chaque composant, supposées mutuellement indépendantes, suivent une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, déterminer la loi de la durée de vie du circuit complet.
Proposer un programme Scilab permettant de vérifier le résultat obtenu.

Solution :

En notant V_i les durées de vie de chaque composant, on doit ainsi calculer la loi de

$$V = \min(V_1, V_1')$$

avec $V_1' = \max(V_2, V_3)$. On a ainsi

$$\mathbb{P}(V_1' \leq t) = \mathbb{P}(V_2 \leq t)\mathbb{P}(V_3 \leq t) = (1 - \exp(-\lambda t))^2$$

puis

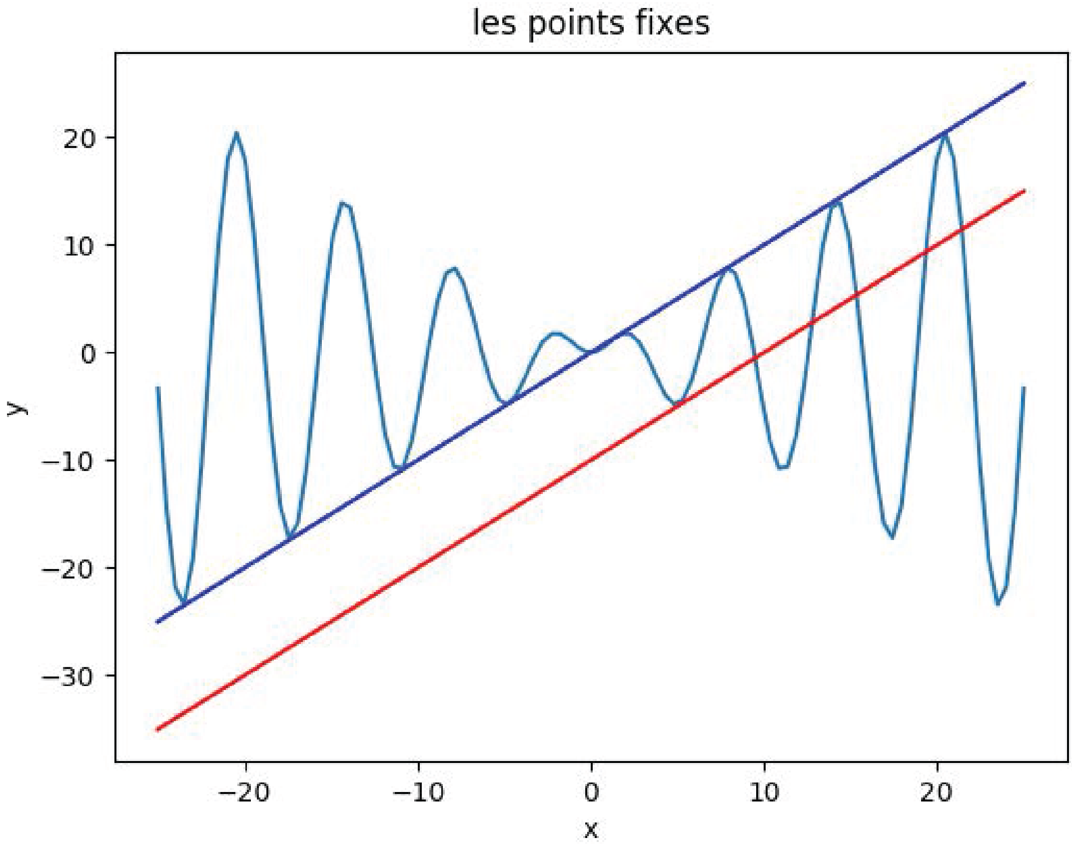
$$\mathbb{P}(V > t) = \mathbb{P}(V_1 > t)\mathbb{P}(V_1' > t) = \exp(-\lambda t)(1 - (1 - \exp(-\lambda t))^2) = \exp(-2\lambda t)(2 - \exp(-\lambda t))$$

et enfin (la fonction de répartition est bien continue sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$)

$$\boxed{f(t) = 4\lambda \exp(-2\lambda t) - 3\lambda \exp(-3\lambda t) = \lambda \exp(-2\lambda t)(4 - 3\exp(-\lambda t))}$$

On peut écrire le programme Scilab suivant pour vérifier ce résultat :

```
Ntest=100000;val=[];lambda=2;
for i=1:10000;
   T=grand(3,1,'exp',1/lambda);
   val=[val,min(T(1),max(T(2),T(3)))];
end
clf()
histplot(100,val)
x=0:0.01:(3*1/lambda)
y=lambda*exp(-2*lambda*x).*(4-3*exp(-lambda*x));
plot2d(x,y)
```


les points fixes
20
10
0
−10
−20
−30
y
−20
−10
0
10
20
x

SUJET S21

Exercice principal S21

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note :

$$\mathbb{A} = \left\{ M = (m_{i,j}) \ \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall i \in [\![1,n]\!], \ |m_{i,n-i+1}| \ > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n+1-i}}^{n} |m_{i,j}| \right\},$$

$$\mathbb{B} = \left\{ M = (m_{i,j}) \ \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall \ i \in [\![1,n]\!] : m_{i,i} \neq 0 \text{ et } \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \neq j}} \frac{m_{i,j}^2}{m_{i,i}^2} < 1 \right\}.$$

1. **Question de cours :** Formule du produit matriciel.
2. Est-ce que $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$? Est-ce que $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$?
3. On munit $M_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne canonique : si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $||X|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

   Soit une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que
   $$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|MX\|^2 \leqslant Tr(M^t M)\|X\|^2.$$
   (b) En déduire que si $Tr(M^tM) < 1$ alors $I_n + M$ est inversible.

   (c) Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathbb{B}$.
   On note D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à ceux de B.
   Déterminer une matrice $C \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B = DC$.

   (d) En déduire que $\mathbb{B} \subseteq GL_n(\mathbb{R})$.

4. (a) Soient $k, l \in [\![1,n]\!]$ et $E_{k,l}$ le vecteur de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé sur la k-ième ligne et la l-ième colonne qui vaut 1.
   Vérifier que $\forall a \in [0,1[\ I_n + aE_{k,l} \in \mathbb{B}$.

   (b) Caractériser le sous-espace vectoriel F engendré par l'ensemble des matrices de $\mathbb{B}$.

Solution :

1. Programme officiel ECS1 page 8.
2. $M = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ est dans $\mathbb{A}$ (le coefficient "antidiagonal" domine la ligne i) mais pas dans $\mathbb{B}$ (les coefficients diagonaux sont nuls).

I_n est dans $\mathbb{B}$ (les coefficients diagonaux sont non nuls et $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n\\i\neq j}} \frac{m_{i,j}^2}{m_{i,i}^2} = 0 < 1$) mais pas dans $\mathbb{A}$.

$\boxed{\text{On n'a ni } \mathbb{A} \subset \mathbb{B} \text{ ni } \mathbb{B} \subset \mathbb{A}}$

3. (a) On a par la formule du produit matriciel :

La i-ième coordonnée de MX vaut $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j$ et $M^tM = (\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Ainsi $Tr(M^tM) = \displaystyle\sum_{(i,j)} m_{i,j}^2$ et $||M.X||^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j)^2$.

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 \,.\, \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = (\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2).\,\|X\|^2$.

$\|M.X\|^2 \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left((\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2)\,.\,\|X\|^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2.\,\|X\|^2 = Tr(M^tM).\|X\|^2$, d'où :

$$\boxed{\|M.X\|^2 \leq Tr(M^tM).\|X\|^2}$$

(b) On suppose que $Tr(M^tM) < 1$. Montrons par l'absurde que $I_n + M$ inversible.
Sinon, il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})) - \{0\}$, tel que $(I+M).X = 0$, c'est-à-dire tel que : $-X = M.X$.
Mais alors $\|X\| = \|M.X\|$ d'où, d'après a), $\|X\|^2 \leq (Tr(M^tM)).\|X\|^2$
Comme $||X|| \neq 0$, on obtient $1 \leq Tr(M^tM)$: ce qui contredit $Tr(M^tM) < 1$.
Donc $\boxed{\text{la matrice } I + M \text{ est inversible.}}$

(c) On a : $B = DC$ où $\boxed{C = \begin{pmatrix} \frac{b_{1,1}}{b_{1,1}} & \frac{b_{1,2}}{b_{1,1}} & \dots & \frac{b_{1,n}}{b_{1,1}} \\ \frac{b_{2,1}}{b_{2,2}} & \frac{b_{2,2}}{b_{2,2}} & \dots & \frac{b_{2,n}}{b_{2,2}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{b_{n,1}}{b_{n,n}} & \frac{b_{n,2}}{b_{n,n}} & \dots & \frac{b_{n,n}}{b_{n,n}} \end{pmatrix}}$.

(d) Montrons que B est le produit de deux matrices inversibles.
La matrice D est inversible car ses coefficients non non nuls
On note $T = C - I_n$. On calcule $\mathrm{Tr}(T^tT) = \displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n\\i\neq j}} \frac{b_{i,j}^2}{b_{i,i}^2} < 1$, puisque B est dans $\mathbb{B}$.

Donc $I_n + T = C$ est inversible
$\boxed{\text{Donc la matrice } B \text{ est inversible.}}$

4. (a) si $k = l$, la matrice $aE_{k,l} + I_n$ est diagonale et $\displaystyle\sum_{i\neq j} \frac{m_{i,j}^2}{m_{i,i}^2} = 0 < 1$ est vérifié.
si $k \neq l$, la matrice $E_{k,l} + I_n$ a des 1 sur la diagonale et un seul terme non nul hors de la diagonale, valant a. Alors :

$$\sum_{i\neq j} \frac{m_{i,j}^2}{m_{i,i}^2} = \frac{a^2}{1^2} < 1$$

$\boxed{\text{Dans tous les cas } aE_{k,l} + I_n \in \mathbb{B}}$

(b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\mathbb{B}$.
D'après (a), il contient $I_n + aE_{k,l}$ pour $a \in]0,1[$.
Mais il contient aussi $I_n \in \mathbb{B}$, donc, il contient tous les vecteurs de la base canonique.
Ainsi, l'ensemble F contient tous les vecteurs de la base canonique, et donc l'espace $M_n(\mathbb{R})$ tout entier.
$\boxed{F = M_n(\mathbb{R})}$

Exercice sans préparation S21

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ admettant une espérance.
Montrer que $\dfrac{1}{X}$ admet une espérance puis montrer que $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) \geqslant 1$. Étudier le cas d'égalité.

Solution :

Étudions la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}\mathbb{P}(X=n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n}\mathbb{P}(X=n) \leqslant n\mathbb{P}(X=n)$

$\boxed{\text{La variable } \dfrac{1}{X} \text{ admet donc une espérance}}$ en vertu du théorème de comparaison de séries à termes positifs.

On peut aussi dire que la variable $\dfrac{1}{X}$ est bornée.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Considérons la variable aléatoire $Y_t = \left(t\dfrac{1}{\sqrt{X}} + \sqrt{X}\right)^2 = \dfrac{t^2}{X} + 2t + X$. Puisque X et $\dfrac{1}{X}$ admettent une espérance, Y_t admet une espérance par linéarité. On en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) t^2 + 2t + \mathbb{E}(X) \geqslant 0.$$

Puisque $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) > 0$ ($X \in \mathbb{N}^*$ presque-sûrement), on a trinôme du second degré de signe constant. Son discriminant est donc négatif ou nul, i.e. $4 - 4\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$, i.e. $\boxed{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) \geqslant 1.}$

D'après le raisonnement précédent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = 1 &\Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) t_0^2 + 2t_0 + \mathbb{E}(X) \\
&\Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left[\left(t_0\frac{1}{\sqrt{X}} + \sqrt{X}\right)^2\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R},\ t_0\frac{1}{\sqrt{X}} + \sqrt{X} = 0 \ \ p.s. \\
&\Leftrightarrow \boxed{X \text{ est constante presque-sûrement.}}
\end{aligned}$$

SUJET S22

Exercice principal S22

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et, pour P et Q dans E, on pose :

$$\langle P;\ Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

1. **Question de cours :** que peut-on dire des sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien ?
2. Justifier que l'intégrale ci-dessus est bien définie puis prouver que $(P, Q) \mapsto \langle P;\ Q\rangle$ est un produit scalaire sur E.
3. Soit φ définie sur E par $\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$.
   Justifier que φ est un endomorphisme de E.
   On admet pour l'instant qu'en outre, φ est un endomorphisme *symétrique* de E. Ce point sera prouvé à la dernière question de l'exercice.
4. (a) Déterminer les valeurs propres de φ.
   (b) On note $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de φ ordonnées par ordre croissant. Soit P_k un vecteur propre associé à λ_k pour $k \in [\![0, n]\!]$.
   Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est orthogonale et déterminer le degré de P_k pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
5. Soit $k \geqslant 1$.
   (a) Montrer que P_k possède au moins une racine d'ordre impair dans $]-1, 1[$.
   (b) On note $a_1, \ldots, a_r$ les racines d'ordre impair de P_k sur $]-1, 1[$ et soit $S = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - a_i)$. En considérant la quantité $\langle S;\ P_k\rangle$, montrer que P_k a k racines distinctes dans $]-1, 1[$.
6. On prouve dans cette question que l'endomorphisme φ est symétrique.
   Soient P et Q dans E. Montrer, en intégrant par parties, que :
   $$\int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P''(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}(2t+1)P'(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$$
   et en déduire le résultat demandé.

Solution :

1. Question de cours : programme ECS2 2013 p. 17.
2. Le seul problème pour la définition de l'intégrale est en -1, or :
   $$P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \underset{-1}{\sim} P(-1)Q(-1)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+t}}$$
   qui est intégrable par comparaison à une intégrale de Riemann convergente $(1/2 < 1)$.
   L'application $(P, Q) \mapsto \langle P;\ Q\rangle$ est clairement symétrique et bilinéaire par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale.
   Pour $P \in E$:
   $$\langle P;\ P\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale et :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P(t)^2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \forall t \in]-1,1[\quad P(t)^2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = 0 \text{ par continuité et positivité}\\ &\Longrightarrow \quad \forall t \in]-1,1[\quad P(t) = 0\\ &\Longrightarrow \quad P = 0 \text{ car } P \text{ a une infinité de racines}\end{aligned}$$

L'application $\boxed{(P,Q) \mapsto \langle P;\ Q\rangle \text{ est donc bien un produit scalaire.}}$

3. La linéarité de φ est immédiate par linéarité de la dérivation et de la multiplication. De plus, φ est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ et si $P \in E$, $\deg(X^2-1)P'' = \deg(2X+1)P' = \deg P$ donc $\deg \varphi(P) \leqslant \deg P$ et donc $\varphi(P) \in E$.

   Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

4. (a) On remarque que $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 2X+1$ et pour $2 \leqslant k \leqslant n$:

   $$\varphi(X^k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$$

   La matrice de φ dans la base canonique est donc triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les $n+1$ nombres $\boxed{k(k+1) \text{ avec } 0 \leqslant k \leqslant n.}$ Ce sont donc les valeurs propres de φ.

   (b) Avec les notations de l'énoncé on a donc $\lambda_k = k(k+1)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Comme φ a $n+1$ valeurs propres distinctes, $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base de E. De plus comme φ est symétrique, les sous-espaces propres de E sont orthogonaux deux à deux et $\boxed{\text{la famille } (P_0,\ldots,P_n) \text{ est donc orthogonale.}}$

   Montrons que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$.

   On le prouve par récurrence sur n. On sait déjà que le résultat est vrai pour $n = 0$ car $\varphi(a) = 0$ pour a un polynôme constant.

   On suppose le résultat vrai au rang $n-1$ pour $n \geqslant 1$. Comme la matrice $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est triangulaire, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est stable par φ et la restriction de φ à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui admet pour valeurs propres $\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1}$ comme on le voit en écrivant les matrices de φ et de sa restriction dans la base canonique – c'est le calcul effectué à la question précédente. En fait, en considérant la restriction de φ à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on se retrouve dans la même situation une dimension en dessous. Autrement dit, en notant $\varphi = \varphi_n$ pour $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_{n|\mathbb{R}_{n-1}[X]} = \varphi_{n-1}$.

   Ainsi $(P_0,\ldots,P_{n-1})$ est une famille de vecteurs propres associée aux valeurs propres $(\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1})$ et par l'hypothèse de récurrence $\deg P_k = k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

   Comme $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base de E, on a nécessairement $\boxed{\deg P_n = n}$ ce qui achève la récurrence.

5. (a) Si P_k n'a que des racines d'ordre pair sur $]-1,1[$, il ne change jamais de signe lorsqu'il s'annule sur cet intervalle et donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il est de signe constant. Quitte à remplacer P_k par $-P_k$, on peut supposer $P_k \geqslant 0$ sur $]-1,1[$. Alors, par continuité et positivité de l'intégrale :

   $$\langle 1;\ P_k\rangle = \int_{-1}^{1} P_k(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t > 0$$

   Mais 1 est dans le sous-espace propre associé à $\lambda_0 = 0$ d'où $\langle 1;\ P_k\rangle = 0$. Contradiction.

   (b) Par le même raisonnement, on suppose que le nombre r de racines d'ordre impair de P_k vérifie $r < k$. Alors $S \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \mathrm{Vect}(P_0,\ldots,P_{k-1})$ et donc $\langle S;\ P_k\rangle = 0$.

   Mais dans le même temps SP_k n'a que des racines d'ordre pair dans $]-1,1[$ donc ne change pas de signe sur $]-1,1[$ par le même raisonnement que précédemment et, quitte à remplacer P_k par $-P_k$, on peut supposer que $SP_k \geqslant 0$ sur $]-1,1[$ d'où comme avant $\langle S;\ P_k\rangle > 0$.

   C'est une contradiction donc $r = k$ et donc $\boxed{P_k \text{ admet } k \text{ racines distinctes}}$ dans $]-1,1[$. Ces racines sont alors toutes simples.

6. On pose $f(t) = (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q(t)$. Cette fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et pour tout $t \in]0,1[$:

$$\begin{aligned}f'(t) &= -\frac{3}{2}(1-t)^{1/2}(1+t)^{1/2}Q(t) + \frac{1}{2}(1-t)^{3/2}(1+t)^{-1/2}Q(t) + (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q'(t)\\ &= -\frac{3}{2}(1+t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \frac{1}{2}(1-t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q'(t)\\ &= -(2t+1)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q'(t)\end{aligned}$$

En intégrant par parties – valide car P' est également de classe $\mathcal{C}^1$ – on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P''(t)Q(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1} f(t)P''(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[\ f(t)P'(t)\ \Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(t)P'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-1}^{1} f'(t)P'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1}(2t+1)P'(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On trouve bien le résultat annoncé. En faisant passer la première intégrale du second membre dans le premier membre, l'égalité obtenue nous dit alors exactement que :

$$\langle \varphi(P);\ Q\rangle = \int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$$

L'expression dans le membre de droite est symétrique en P et Q donc on a automatiquement

$\boxed{\langle \varphi(P);\ Q\rangle = \langle P;\ \varphi(Q)\rangle \text{ et } \varphi \text{ est bien symétrique.}}$

Exercice sans préparation S22

```
function Y=smul1(n,p)
X=grand(1,n,'geom',p);
disp(X)
Z=max(X)
T=zeros(1,Z)
for k=1:n
   if T(X(k))==0 then
       T(X(k))=1
    end
end
Y=sum(T)

endfunction

function m=smul2(n,p)
X=grand(10000,n,'geom',p);
Y=zeros(10000,1)
for j=1:10000
Z=max(X(j,:))
T=zeros(1,Z)
for k=1:n
   if T(X(j,k))==0 then
       T(X(j,k))=1
    end
end
Y(j)=sum(T)
end
m=mean(Y)
endfunction
```

1. Commenter la fonction **smul1**. Quelles sont les valeurs possibles de sortie ? Donner la loi de la VA **smul1**$(2, 0.75)$
2. Le résultat de **smul2**$(2, 0.75)$ est 1.3971. Commentez ce résultat.

Solution :

1. **suml1** simule la VA Y_n qui est égale au nombre de valeurs distinctes prises par n variables $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ indépendantes suivant des lois géométriques de paramètre p. $Y_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$
   $Y_2(\Omega) = \{1, 2\}$
$$\mathbb{P}(Y_2 = 1) = P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2((1-p)^2)^{k-1} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \boxed{\frac{p}{2-p} = \frac{3}{5}}$$
$$P(Y_2 = 2) = 1 - P(Y_2 = 1)\boxed{= \frac{2(1-p)}{2-p} = \frac{2}{5}}$$
2. **smul2** donne la moyenne empirique d'un échantillon de 10000 variables de même loi que Y_n
   Elle approche donc l'espérance de Y_n.
$$\mathbb{E}(Y_2) = \frac{4-3p}{2-p}$$
   pour $p = \dfrac{3}{4}$ on a $\boxed{\mathbb{E}(Y_2) = \dfrac{7}{5} = \dfrac{14}{10}}$. Le résultat de **smul2** est bien cohérent