HEC
PARIS

ORAL HEC Paris 2019

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option scientifique

Concours HEC 2019

Sujet S 293

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : loi d'un couple de variables aléatoires discrètes, caractérisation de leur indépendance.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour tout entier n strictement supérieur à 2, on note

$$N_1^{(n)} = \text{Card}\{i \in [\![1,n]\!]\,;\ X_i \in [1-\frac{1}{n},1]\,\}$$

$$N_2^{(n)} = \text{Card}\{i \in [\![1,n]\!]\,;\ X_i \in [1-\frac{2}{n},1-\frac{1}{n}[\,\}$$

2. Soit n un entier strictement supérieur à 2.
   a) Reconnaître la loi de chacune des deux variables aléatoires $N_1^{(n)}$ et $N_2^{(n)}$.
   b) Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
   c) Écrire une fonction *Scilab* permettant d'effectuer une simulation du couple $(N_1^{(n)}, N_2^{(n)})$.
3. Établir, pour tout $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$ et pour tout entier $n \geq \max\{3, k+\ell\}$, l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} P([N_1^{(n)} = k] \cap [N_2^{(n)}] = \ell]) = \frac{n!}{k!\,\ell!\,(n-k-\ell)!}\,\frac{(n-2)^{n-k-\ell}}{n^n}\ .$$

4. Démontrer que la suite $\left(N_1^{(n)} + N_2^{(n)}\right)_{n\geq 3}$ converge en loi vers une variable suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$.
5. Soit $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$.
   a) Calculer, pour tout entier $n \geq 3$, l'espérance de la variable aléatoire $s_1^{N_1^{(n)}} s_2^{N_2^{(n)}}$.
   b) Vérifier l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} E\big(s_1^{N_1^{(n)}} s_2^{N_2^{(n)}}\big) = \mathrm{e}^{s_1+s_2-2}\ .$$

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver le rang de M.

2. Justifier qu'il existe une matrice semblable à M possédant deux colonnes égales.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.
2. a) Chacune des deux variables aléatoires $N_1^{(n)}$ et $N_2^{(n)}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/n)$.

   b) Non, puisque par exemple

$$P([N_1^{(n)} = n] \cap [N_1^{(n)} = n]) = 0 \neq P([N_1^{(n)} = n]) \times P([N_1^{(n)} = n]) \ .$$

   c)

```
function [N1,N2]=ggrand(n)
   X=rand(n,1);
   N1=length(find(X>=1-1/n));
   N2=length(find((X>=1-2/n))-N1;
endfunction
```

3.

$$\begin{aligned} P([N_1^{(n)} = k] \cap [N_2^{(n)]} = \ell]) &= \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}(\frac{1}{n})^k(\frac{1}{n})^{n-k}(1-\frac{2}{n})^{n-k-\ell} \\ &= \frac{n!}{k!\,\ell!\,(n-k-\ell)!}\frac{(n-2)^{n-k-\ell}}{n^n} \ . \end{aligned}$$

4. La voie la plus courte pour parvenir au résultat est d'observer que $N_1^{(n)} + N_2^{(n)}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 2/n)$ et d'utiliser le résultat du cours sur la convergence de lois binomiales vers la loi de Poisson.

   On peut aussi utiliser le résultat de la question précédente, car lorsque n tend vers l'infini

   - $\dfrac{n!}{k!\,\ell!\,(n-k-\ell)!} \sim \dfrac{n^{k+\ell}}{k!\,\ell!}$
   - $(1-\dfrac{2}{n})^{n-k-\ell} \to \mathrm{e}^{-2}$.

   Il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} P([N_1^{(n)} = k] \cap [N_2^{(n)]} = \ell]) = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{k!\,\ell!} \qquad (1)$$

   Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on déduit du résultat précédent que :

$$\lim_{n\to+\infty} P([N_1^{(n)} + N_2^{(n)} = m]) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\mathrm{e}^{-2}}{k!\,(m-k)!} = \frac{2^m}{m!}\mathrm{e}^{-2} \ .$$

   Ceci confirme que la suite $\left(N_1^{(n)} + N_2^{(n)}\right)_{n\geq 3}$ converge en loi vers une variable suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$.

5. a) p

$$E\big(s_1^{N_1^{(n)}} s_2^{N_2^{(n)}}\big) = \sum_{k\geq 0, \ell\geq 0, k+\ell\leq n} \frac{n!}{k!\,\ell!\,(n-k-\ell)!}\big(\frac{s_1}{n}\big)^k\big(\frac{s_2}{n}\big)^\ell\,\big(1-\frac{2}{n}\big)^{n-k\ell} = \big(1+\frac{s_1+s_2-2}{n}\big)^n$$

b)

$$\lim_{n\to+\infty}\big(1+\frac{s_1+s_2-2}{n}\big)^n = \mathrm{e}^{s_1+s_2-2} \tag{2}$$

Sujet S 293

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. On a par exemple $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

$$\mathrm{rg}(M) = 2 .$$

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique.
Soit x est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui n'appartient pas au noyau de f et y la somme de x et d'un vecteur non nul du noyau de f.
Les deux vecteurs x et y sont linéairement indépendants et il est possible de choisir un vecteur z de $\mathbb{R}^3$ pour lequel (x, y, z) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Comme $f(x) = f(y)$, les deux premières colonnes de la matrice de f dans cette base sont égales et cette matrice est semblable à M puisque les deux matrices représentent le même endomorphisme.

Concours HEC 2019

Sujet S 295

Exercice principal

1. a) Question de cours : minorant et minimum d'une partie non vide de $\mathbb{R}$.

   b) Pour tout réel x, justifier que l'ensemble $\{|x-n|\,;\, n\in\mathbb{Z}\}$ admet un minimum.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\mathrm{Min}\{|x-n|\,;\, n\in\mathbb{Z}\} \tag{1}$$

2. a) Calculer $f(x)$ lorsque x est compris entre $-1/2$ et $+1/2$.

   b) Donner une représentation graphique de la fonction f et écrire un script *Scilab* permettant de la tracer.

3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

   a) Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a :

$$f(x)\le|y-n|+|x-y|\ .$$

   b) Établir l'inégalité :

$$|f(y)-f(x)|\ \le\ |y-x|\ .$$

4. a) Justifier, pour tout réel x, la convergence de la série $\sum\limits_{n\ge 0}2^{-n}f(2^n\,x)$.

On note b l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad b(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n}f(2^n\,x) \tag{2}$$

   b) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Justifier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, les inégalités :

$$|b(y)-b(x)|\ \le\Big(\sum_{k=0}^{n-1}2^{-k}\,|f(2^k\,y)-f(2^k\,x)|\Big)+2^{-n}\le n\,|y-x|+2^{-n}$$

   c) En déduire que la fonction b est continue.

   d) Démontrer que la fonction b n'est pas dérivable à droite en 0.

Exercice sans préparation

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (où $n \geq 2$).
Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant chacune la loi normale d'espérance μ et d'écart-type $\sigma > 0$.

Quelle est la probabilité pour que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ appartienne à E ?

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

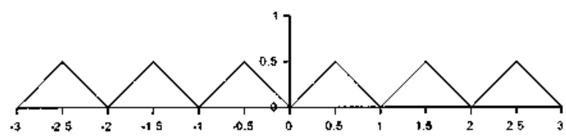
1. a) Question de cours.

b) $\{|x-n|\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ admet un minimum parce que son intersection avec le segment $[0, 1/2]$ est un singleton ou un doubleton.

2.
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{Min}\{|x-n|\,;\, n \in \mathbb{Z}\} \tag{3}$$

a)
$$\forall\, x \in [-1/2, +1/2], \quad f(x) = |x|\ .$$

b) La fonction f étant 1-périodique , son graphe est celui d'une « onde triangulaire » .



Pour le tracer sous *Scilab*, sans utiliser la fonction **round** qui n'est pas explicitement au programme, on peut par exemple observer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left|x - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor\right|$$

ce qui permet d'utiliser le script suivant

```
--> deff('y=f(x)','y=abs(x-floor(x+.5))');
--> x=linspace(-3, 3,13); // comme f est affine par morceaux, on peut faire des économies
--> y=feval(x,f);
--> plot(x,y)
```

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) $f(y) \leq |y-n| = |y-x+x-n| \leq |x-n| + |y-x|$.

b) En choisissant n tel que $f(x) = |x-n|$, on obtient l'inégalité

$$f(y) - f(x) \ \leq\ |y-x|\ .$$

Par symétrie des rôles de x et y, on en déduit l'inégalité demandée.

4. a) Comme la fonction f ne prend que des valeurs comprises entre 0 et 1/2 la série $\sum_{n\geq 0} 2^{-n} f(2^n x)$ est convergente, par domination.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} f(2^n x) \tag{4}$$

b)

$$\begin{aligned}
|b(y) - b(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} \left|f(2^k y) - f(2^k x)\right| + \sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-k} \left|f(2^k y) - f(2^k x)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} \left|2^k y - 2^k x\right| + \sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-k} \frac{1}{2} \\
&= n\,|y - x| + 2^{-n} .
\end{aligned}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
On choisit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{-n} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Dès lors, pour tout y tel que $|y - x| \leq \dfrac{\varepsilon}{2n}$, on a :

$$|b(y) - b(x)| \leq \varepsilon .$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$f(2^k\, 2^{-n}) = \begin{cases} 2^{k-n} & \text{si } k < n \\ 0 & \text{si } k \geq n \end{cases} .$$

Par conséquent :

$$b(2^{-n}) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k}\, 2^{k-n} = \boxed{n\, 2^{-n}} .$$

Il en résulte que le taux d'accroissement $\dfrac{\beta(2^{-n}) - \beta(0)}{2^{-n}} = n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, c'est-à-dire quand le point 2^{-n} tend vers 0.
La fonction b n'est donc pas dérivable à droite en 0.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Hormis le cas où $E = \mathbb{R}^n$ (pour lequel la probabilité demandée est égale à 1), on a toujours

$$P\big[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in E\big] = 0$$

puisque toute combinaison linéaire non nulle des variables aléatoires X_k admet une densité, ce qui entraîne que la probabilité que la probabilité que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ appartienne à un hyperplan est nulle.

Concours HEC 2019

Sujet S 296

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

2. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ admettant une racine complexe z dont l'ordre de multiplicité est supérieur ou égal à 2.

   a) Vérifier que le conjugué $\bar{z}$ de z est aussi une racine de P.

   b) Démontrer que, si z n'est pas un nombre réel, alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$P = \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)\,X + |z|^2\right)^2 Q \,.$$

   c) En déduire que z est racine du polynôme dérivé P' de P.

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on note P_n le polynôme $X^{2n} - 2nX + 1$ de $\mathbb{R}[X]$.

   a) Déterminer les racines complexes du polynôme dérivé P_n'.

   b) Combien le polynôme P_n admet-il de racines complexes ?

Pour tout entier $n \geq 2$, on note f_n la fonction réelle définie par :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^{2n} - 2nx + 1 \,.$$

3. Combien l'équation $f_n(x) = 0$ admet-elle de solutions réelles ?

4. On note u_n la plus grande des solutions réelles de l'équation précédente.

   a) Soit $\varepsilon > 0$. Que peut-on dire du signe de $f_n(1+\varepsilon)$? En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers 1.

   b) Justifier le développement asymptotique, quand n tend vers l'infini :
$$u_n = 1 + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \cdot$$

Exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire réelle.

Justifier qu'il existe une suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs ou nuls pour laquelle la série terme général $P([X \geq x_n])$ est convergente.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.
2. a) Comme les coefficients de P sont réels, $P(\bar{z})$ est nul puisque c'est le conjugué de $P(z)$, lui-même nul.

   b) Comme z est une racine multiple de P, il existe un polynôme $M \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X-z)^2\, M$. En effectuant dans $\mathbb{C}[X]$ la division euclidienne de M par $(X-\bar{z})^2$, on peut écrire $P = (X-z)^2\Big((X-\bar{z})^2\, Q + R\Big)$ où le degré du polynôme R est au plus égal à 1.

   Le reste R est en fait nécessairement nul puisque la factorisation (dans $\mathbb{C}[X]$) $P = (X-\bar{z})^2\,\overline{M}$ prouve que R est divisible par $(X-\bar{z})^2$. Il en résulte que $P = (X-z)^2(X-\bar{z})^2\ , Q = \big(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)\,X + |z|^2\big)^2\, Q$ et cette mise en facteur d'un polynôme à coefficients réels prouve que le polynôme Q appartient à $\mathbb{R}[X]$.

   c)

   • Si $z \in \mathbb{R}$, alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-z)^2\, Q$ de sorte que $P'(z) = 0$ (ce qui est un résultat de cours, dans $\mathbb{R}[X]$, pas dans $\mathbb{C}[X]$).

   • Si $z \notin \mathbb{R}$, on utilise la factorisation trouvée en 2.b pour dériver le polynôme P

$$P' = (X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)\,X + |z|^2)\,\Big(2\big(X - \mathrm{Re}(z)\big)\,Q + (X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)\,X + |z|^2)\,Q'\Big)$$

   et constater qu'il s'annule bien en z.

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on note P_n le polynôme $X^{2n} - 2nX + 1$ de $\mathbb{R}[X]$.

   a) Le polynôme dérivé de P_n est $P_n' = 2nX^{2n-1} - 2n$.

   Par conséquent :

$$P_n'(z) = 0 \Longleftrightarrow z^{2n-1} = 1$$

   Les racines complexes du polynôme P_n sont donc les racines $(2n-1)$-ièmes de l'unité, c'est-à-dire les $2n-1$ nombres complexes

$$z_k = \exp(\frac{2ik\pi}{2n-1}) \quad \text{où } k \in [\![0, 2n-2]\!]\,.$$

   b) D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le nombre de racines complexe de P_n est compris entre 1 et $2n$.

   Si P_n admettait une racine complexe multiple z, celle-ci annulerait simultanément, comme vu en 1.b, P_n et son polynôme dérivé

$$P_n' = 2n(X^{2n-1} - 1)\,.$$

   On aurait donc $z^{2n-1} = 1$ et par conséquent

$$P_n(z) = z^{2n} - 2nz + 1 = (1-2n)z + 1 = 0$$

   ce qui est impossible puisque $\dfrac{1}{2n-1}$ n'est pas une racine $(2n-1)$-ième de l'unité (puisque $n \geq 2$).

   Le polynôme P_n admet donc <u>$2n$ racines complexes</u> (distinctes).

4. Une étude de la fonction f_n montre que celle-ci est décroissante sur $]-\infty, 1[$ puis croissante sur $]1, +\infty[$ avec $f_n(1) = 2(1-n) < 0$ L'équation $f_n(x) = 0$ admet donc deux solutions, l'une < 1 et l'autre > 1.
5. a) Comme $f_n(0) = 1 > 0$, $f_n(1) = 2(1-n) < 0$ et $f_n(2) = 4^n - 4n + 1 > 0$, la plus petite des deux solutions de l'équation (??) est comprise entre 0 et 1, et la plus grande entre 1 et 2.

$$\forall n \geq 2, \quad 1 < u_n < 2 .$$

b)

$$f_n(1+\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{2n} - 2n(1+\varepsilon) + 1 \sim (1+\varepsilon)^{2n}$$

quand n tend vers l'infini, ce qui entraîne que $f_n(1+\varepsilon) > 0$ pour n assez grand.
Il en résulte que, pour tout $\varepsilon > 0$, u_n est compris entre 1 et $1+\varepsilon$ pour tout n suffisamment grand.
Par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

c) On écrit $u_n = 1 + \varepsilon_n$ puis on exprime la relation $f_n(u_n) = 0$. Il vient après un DL de $\ln(1+x)$ en 0 :

$$e^{2n\varepsilon_n + o(n\varepsilon_n)} = 2n - 1 + 2n\varepsilon_n$$

puis

$$2n\varepsilon_n + o(n\varepsilon_n) = \ln(2n) + \ln(1 - \frac{1}{2n} + \varepsilon_n) = \ln(n) + O(1)$$

ce qui implique en prenant les équivalents à gauche et à droite $2n\varepsilon_n \sim \ln n$ et

$$u_n = 1 + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \cdot$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} P([X \geq x]) = 0$, on peut définir par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} \geq x_n \\ P([X \geq x_n + 1]) \leq 2^{-n} \end{cases}$$

Concours HEC 2019

Sujet S 298

EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours : définition et propriétés des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

   b) Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| > A \Longrightarrow \varphi(x) > M\ .$$

   i) Justifier que l'ensemble $K = \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \varphi(x) \leq \varphi(0)\}$ est non vide, fermé et borné.

   ii) En déduire que la fonction φ admet un minimum global.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

2. a) En quels points la fonction f admet-elle un extremum local ?

   b) Justifier, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité : $\ f(x,y) \geq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2 - 4(x^2+y^2)$.

   c) La fonction f admet-elle un extremum global ?

3. On rappelle que, pour tout réel c, la ligne de niveau c d'une fonction de deux variables est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ en lesquels la fonction prend la valeur c.
   La figure suivante, obtenue à l'aide de *Scilab* représente les lignes de niveaux -6 et -7 de la fonction f.

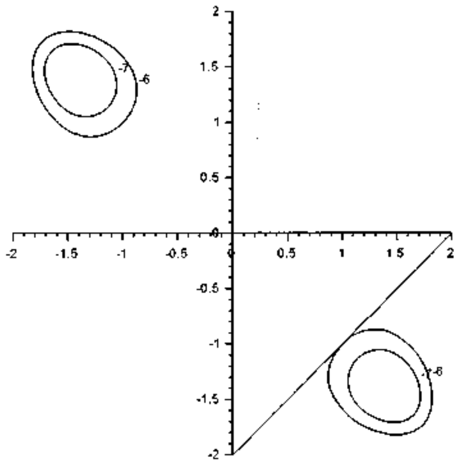


FIGURE 1 – *Lignes de niveau*

a) Quelle symétrie des lignes de niveau de la fonction f la figure 1 suggère-t-elle ? En donner une justification mathématique.

b) Trouver l'équation de la tangente au point $(-1,+1)$ à la ligne de niveau -6.

c) En quels autres points les tangentes à cette ligne de niveau sont-elles parallèles à la tangente trouvée en b ?

Exercice sans préparation

Soit un entier naturel n non nul. Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$.

On tire successivement $n+1$ boules de cette urne, *sans* remise.

Quelle est la loi de la variable aléatoire X égale au rang du *dernier* numéro impair sorti ?

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours.

b) i)

- K est non vide puisque $0 \in K$.
- K est fermé d'après la première propriété rappelée en question de cours.
- K est borné parce qu'il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| > A \Longrightarrow \varphi(x) > \varphi(0)$$

ce qui entraîne que K est inclus dans la boule fermée de centre 0 et de rayon A.

ii) D'après la seconde propriété des fonctions continues rappelée en question de cours, la fonction φ admet un minimum global m sur K.
Comme $\varphi(x) > \varphi(0) \geq m$ pour tout $x \notin K$, m est en fait un minimum global de φ sur $\mathbb{R}^n$.

2. a) Les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f sont données par :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 4x^3 - 4(x-y) = 4(x^3 - x + y) \\ \partial_2(f)(x,y) = 4y^3 + 4(x-y) = 4(y^3 + x - y) \end{cases}$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f sont données par :

$$\begin{cases} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 4(3x^2 - 1) \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 4 \\ \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 4(3y^2 - 1) \end{cases}$$

La fonction f possède trois points critiques $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

- f admet un minimum local en chacun des deux points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ parce que les deux valeurs propres, 24 et 16 de la matrice hessienne de f en ces deux points

$$\nabla^2(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \nabla^2(f)(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

sont strictement positives.

- f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$ et $(0,0)$ est un point col (ou point selle) de f parce que $f(x,x) = 2x^4$ et $f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2$ sont de signes contraires au voisinage de $x = 0$.

b) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les inégalités $x^2 + y^2 - 2\,|xy| \geq 0$ et $x^4 + y^4 - 2x^2y^2 \geq 0$ entraînent

$$\begin{cases} (x-y)^2 \leq x^2 + y^2 + 2\,|xy| \leq 2(x^2 + y^2) \\ (x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \leq 2(x^4 + y^4) \end{cases}$$

et par conséquent :

$$f(x,y) \geq x^4 + y^4 - 4(x^2 + y^2) \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) \ .$$

c) Il résulte de l'inégalité précédente que $f(x,y)$ tend vers $+\infty$ quand $x^2 + y^2$ tend vers $+\infty$, ce qui entraîne que f n'est pas majorée et qu'elle admet un minimum global, d'après le résultat de la question 1.b.

3. a) Chaque ligne de niveau (composée de deux courbes pour les niveaux -7 et -6 de la figure 1) de la fonction f présente une symétrie par rapport à l'origine parce que :

$$\forall c \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = c \Longleftrightarrow f(-x,-y) = c\ .$$

b) L'équation de la tangente à la ligne de niveau -6 au point $(1,-1)$ est $y = x + 2$.
Par symétrie, de la tangente à la ligne de niveau -6 au point $(-1,1)$ est $y = x - 2$.

c) Les vecteurs directeurs des tangentes aux lignes de niveau sont orthogonaux aux gradients de f aux points correspondants.
Lorsque les gradients sont colinéaires, Deux tangentes en des points réguliers d'une ligne de niveau sont donc parallèles si, et seulement si, les gradients de f en ces deux points sont colinéaires.

$$\nabla(f)(-1,+1) = \big(\partial_1(f)(-1,1), \partial_2(f)(-1,1)\big) = (4,-4)$$

Pour que la tangente à la courbe de niveau -6 en un point (x,y) soit parallèle à sa tangente au point $(1,-1)$, il faut et il suffit que

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 = -6 \\ 4(x^3 - x + y) = -4(y^3 + x - y) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

On trouve ainsi les deux autres points où le gradient est proportionnel au vecteur $(-1,1)$, les deux points $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ et $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, c'est-à-dire où les tangentes à la ligne de niveau -6 sont parallèles à la tangente trouvée en b.
Les équations des quatre tangentes parallèles trouvées, représentées sur la figure ??, sont donc

$$y = x \pm 2 \quad \text{et} \quad y = x \pm 2\sqrt{3}\ .$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

Comme toute $(n+1)$-liste d'éléments de $[\![1, 2n]\!]$ contient au plus n nombres pairs donc au moins un nombre impair, l'ensemble des valeurs possibles de X est inclus dans $[\![1, n+1]\!]$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'événement $[X \leq k]$ est constitué des $(n+1)$-listes d'éléments de $[\![1, 2n]\!]$ dont les $(n+1-k)$ derniers termes (correspondants aux tirages de rangs $k+1$ à $n+1$) sont pairs.
On trouve ainsi :

$$\mathbf{P}([X \leq k]) = \frac{\dbinom{n+k-1}{n}}{\dbinom{2n}{n}}.$$

Cette relation restant valable pour $k = 0$ et $k = n+1$, on conclut que, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$:

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X \leq k) - \mathbf{P}(X \leq k-1) = \frac{\dbinom{n+k-2}{n-1}}{\dbinom{2n}{n}}.$$

Concours HEC 2019

Sujet S 299

Exercice principal

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace probabilisé.

1. a) Question de cours : rappeler la définition d'une tribu de parties de Ω.

   b) Donner trois exemples de tribus de parties de $\mathbb{N}$.

2. On note C l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0$.

   a) Justifier l'égalité :

$$C = \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\geq k} \left[|X_n| < \frac{1}{p}\right].$$

   b) En déduire que C est un élément de la tribu $\mathcal{A}$.

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 si la probabilité de l'événement C est égale à 1.

3. a) Comparer, pour tout $\varepsilon > 0$, les deux événements $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup\limits_{n\geq k} \left[|X_n| \geq \varepsilon\right]$ et $\overline{C}$.

   b) En déduire que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

4. Dans cette question, α désigne un réel strictement positif. On suppose que les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

   a) Justifier que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

   b) Soit p et k deux entiers strictement positifs.

   Calculer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la probabilité p_N de l'événement $\bigcap\limits_{n=k}^{k+N} \left[|X_n| < \dfrac{1}{p}\right]$ et étudier la convergence de la suite $(p_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

   c) Pour quelles valeurs de α la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle presque sûrement vers 0 ?

Sujet S 299

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit L_1 et L_2 deux matrices triangulaires inférieures, dont les termes sur la diagonale sont égaux à 1, et U_1 et U_2 deux matrices triangulaires supérieures inversibles. On suppose que

$$L_1 U_1 = L_2 U_2.$$

1. Montrer que L_1 et L_2 sont inversibles.
2. Montrer que $L_2^{-1} L_1$ est une matrice triangulaire inférieure.
3. Montrer que $L_1 = L_2$.

Voie S
référence : S 299

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace probabilisé.

1. a) Question de cours.
   b) $\{\emptyset, \mathbb{N}\}$, $\{\emptyset, \{0\}, \mathbb{N}^*, \mathbb{N}\}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
2. a) Soit $\omega \in \Omega$. Par définition d'une limite :

$$\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq k,\ |X_n(\omega)| < \varepsilon$$

ce qui équivaut à $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \exists k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq k,\ |X_n(\omega)| < \dfrac{1}{p}$, c'est-à-dire à $\omega \in C$.

b) Tous les ensembles $\left[|X_n| < \frac{1}{p}\right]$ étant des éléments de $\mathcal{A}$ puisque les X_n sont des variables aléatoires sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, C est un élément de $\mathcal{A}$, par stabilité de cette tribu par réunions et intersections dénombrables.

3. a) Soit $\varepsilon > 0$. Si ω est un élément de C, on a, par définition d'une limite,

$$\exists k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq k,\ |X_n(\omega)| < \varepsilon$$

ce qui signifie que ω appartient à $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}\Big(\bigcap_{n\geq k}\Big[|X_n| < \epsilon\Big]\Big)$.

On a donc l'inclusion $C \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}\Big(\bigcap_{n\geq k}\Big[|X_n| < \epsilon\Big]\Big)$ qui fournit, par passage aux événements contraires : $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{n\geq k}\Big[|X_n| \geq \varepsilon\Big] \subset \overline{C}$.

b) On suppose que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 (i.e. $P(\overline{C}) = 0$).
Soit $\varepsilon > 0$.
De l'inclusion de 3.a, on déduit que la probabilité de l'événement $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{n\geq k}\Big[|X_n| \geq \varepsilon\Big]$ est nulle.
Comme les événements $A_k = \displaystyle\bigcup_{n\geq k}\Big[|X_n| \geq \varepsilon\Big]$ forment une suite décroissante, la propriété de limite monotone permet d'en déduire que : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} P(A_k) = P\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\Big) = 0$.
Des inclusions $\Big[|X_k| \geq \varepsilon\Big] \subset A_k$, on en déduit ensuite que : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} P\Big(\Big[|X_k| \geq \varepsilon\Big]\Big) = 0$.
La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc bien en probabilité vers 0.

4. a) $P\Big(\Big[|X_n| \geq \varepsilon\Big]\Big) \leq P\Big(\Big[|X_n| \geq \min\{\varepsilon, 1\}\Big]\Big) = P([X_n = 1]) = \dfrac{1}{n^\alpha}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

b) $p_N = P\Big(\bigcap_{n=k}^{k+N} [|X_n| < \frac{1}{p}]\Big) = \prod_{n=k}^{k+N} (1 - \frac{1}{n^\alpha})$.

• Si $\alpha = 1$

$$p_N = \prod_{n=k}^{k+N} (\frac{n-1}{n}) = \frac{k-1}{k+N}$$

qui tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

• Si $\alpha < 1$, les inégalités $\prod_{n=k}^{k+N} (1 - \frac{1}{n^\alpha}) \leq \prod_{n=k}^{k+N} (1 - \frac{1}{n})$ prouvent que p_N tend aussi vers 0 quand N tend vers l'infini.

• Si $\alpha > 1$, la série de terme général $\ln\big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\big)$ est convergente (par comparaison à la série de Riemann $1/n^\alpha$).

Finalement : $\lim\limits_{N\to+\infty} p_N = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \exp\Big(\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \ln\big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\big)\Big) & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$.

c)

• Si $\alpha \leq 1$, $P\Big(\bigcap_{n=k}^{+\infty} [|X_n| < \frac{1}{p}]\Big) = \lim\limits_{N\to+\infty} P\Big(\bigcap_{n=k}^{k+N} [|X_n| < \frac{1}{p}]\Big) = 0$.

Par limite monotone, on en déduit $P\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n=k}^{+\infty} [|X_n| < \frac{1}{p}]\Big) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, puis

$$P(C) = 0$$

ce qui prouve que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas presque sûrement vers 0.

• Si $\alpha > 1$, le reste $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \ln\big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\big)$, de la série convergente de terme général $\ln\big(1 - \frac{1}{n^\alpha}\big)$, tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

Par limites monotones, on en déduit $P\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n=k}^{+\infty} [|X_n| < \frac{1}{p}]\Big) = 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, puis

$$P(C) = 1$$

ce qui prouve que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. L_1 et L_2 sont inversibles puisqu'elles sont triangulaires et que leurs coefficients diagonaux sont tous non nuls.
2. Le produit de deux matrices triangulaires inférieures l'est aussi. L'inverse l'est également.
3. On a donc $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$ est triangulaire inférieure mais aussi supérieure donc est diagonale. De plus, ses termes sur la diagonale sont les produits des termes diagonaux de L_2^{-1} et L_1, donc 1. Ainsi $L_2^{-1}L_1 = I$ puis $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$.

Concours HEC 2019

Sujet S 301

EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours : fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité.

   b) Quelle propriété spécifique la fonction de répartition F d'une variable aléatoire possède-t-elle lorsque cette variable aléatoire possède une densité paire ? Que dire alors du graphe de F ?

Dans toute la suite de l'exercice, X désigne une variable aléatoire à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_X la fonction de répartition de X.

2. Dans cette question, on suppose que X admet une espérance $E(X)$ et qu'elle possède une densité continue sur $]0, +\infty[$ et nulle sur $]-\infty, 0]$.

   a) Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, P([X \geq x]) = 0$.

   b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P([X \geq t])\, \mathrm{d}t$ est convergente et que :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P([X \geq t])\, \mathrm{d}t\ .$$

3. Soit $r > 0$.

   a) Justifier, pour tout $t \geq 0$, l'existence de $H(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} u^{r-1}\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u$.

   b) Montrer que H est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour quelles valeurs de r est-elle de classe C^1 ?

   c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} H(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente et préciser sa valeur.

4. Dans cette question, on suppose que X possède une densité continue sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que si X admet une espérance, alors : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t) - F_X(-t)\big)\, \mathrm{d}t$.

5. a) Justifier l'existence d'une unique constante réelle c pour laquelle la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{c}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$ est une densité de probabilité.

   On suppose désormais que X admet f pour densité (pour la valeur convenable de c).

   b) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t) - F_X(-t)\big)\, \mathrm{d}t$ est-elle convergente ? La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

   c) Justifier que $x\, P([X \geq x])$ tend vers c quand x tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation

On considère deux nombres **complexes** u et v et on pose :

$$z = u + iv \ .$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le nombre complexe $u\,\bar{v}$ pour que le module de z soit égal à $\sqrt{|u|^2 + |v|^2}$.
2. Proposer une interprétation géométrique du résultat trouvé.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours.

b) Lorsqu'une variable aléatoire possède une densité paire, sa fonction de répartition F vérifie la propriété de symétrie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F(-x) = 1 - F(x).$$

Le graphe de F est alors symétrique par rapport au point d'abscisse 0 et d'ordonnée $\frac{1}{2}$.

2. a) $0 \leq x\, P([X \geq x]) \leq \displaystyle\int_x^{+\infty} t\, f_X(t)\, \mathrm{d}t$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

b) On prouve la convergence et l'égalité demandées par passage à la limite (quand $\epsilon \to 0$ puis $A \to +\infty$) à partir de l'égalité :

$$\int_\epsilon^A t\, f_X(t)\, \mathrm{d}t = \Big[-t\, P([X \geq t]) \Big]_\epsilon^A + \int_\epsilon^A P([X \geq t])\, \mathrm{d}t \ .$$

3. Soit $r > 0$.

a) La question de cours permet d'éviter une preuve par domination.

b) H est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que primitive de $u \longmapsto -u^{r-1}\, \mathrm{e}^{-u}$ et en 0 par définition d'une intégrale convergente.
Elle est de classe C^1 pour $r \geq 1$.

c) On applique le résultat de 2° à une variable aléatoire X suivant la loi $\gamma(r)$.

$$\int_0^{+\infty} H(t)\, \mathrm{d}t = \Gamma(r) \int_0^{+\infty} P([X \geq t])\, \mathrm{d}t = \Gamma(r) E(X) = r\Gamma(r) = \Gamma(r+1) \ .$$

4.

$$|1 - F_X(t) - F_X(-t)| \leq 1 - F_X(t) + F_X(-t) = P([|X| \geq t])$$

dont l'intégrale est convergente puisque $|X|$ admet une espérance.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t) - F_X(-t)\big)\, \mathrm{d}t$ est donc (absolument) convergente.

Comme précédemment, par intégrations par parties et passages à la limite, on obtient :

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t\, f_X(t)\, \mathrm{d}t$

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(- F_X(-t)\big)\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^0 F_X(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^0 u\, f_X(u)\,\mathrm{d}u$

On en conclut, par la formule de Chasles, que

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F(t) - F(-t)\big)\,\mathrm{d}t\ .$$

5. a) Il s'agit d'une conséquence directe de la positivité et de l'intégrabilité de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$.

b) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t) - F_X(-t)\big)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et elle est nulle (par parité de f).

La variable aléatoire X n'admet pas d'espérance, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

c) Comme $t^2 \leq \sqrt{1+t^2+t^4} \leq 1+t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient par intégration

$$\int_x^{+\infty} \frac{c}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{+\infty} \frac{c}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$c\,\mathrm{Arctan}\big(\frac{1}{x}\big) = c\big(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x)\big) \leq \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{c}{x}\ .$$

Quand x tend vers $+\infty$, on en déduit l'équivalence :

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \ \sim \int_x^{+\infty} \frac{c}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{c}{x}$$

d'où le résultat.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. On pose $u = a + ib$ et $v = c + id$ (avec a, b, c, d réels).

$$\begin{aligned} |z|^2 = |u|^2 + |v|^2 &\iff (a-d)^2 + (b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ &\iff ad - bc = 0 \iff \end{aligned}$$

Comme $u\,\bar{v} = (a+ib)(c-id) = (ac+bd) + i(bc-ad)$, on a l'équivalence :

$$|z| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2} \iff u\,\bar{v} \in \mathbb{R}\ .$$

2. On peut observer que le module de z est égal à $\sqrt{|u|^2+|v|^2}$ si, et seulement si, les deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (a,b) et $(-d,c)$ (associé à $iv = -d + ic$) sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel.

Concours HEC 2019

Sujet S 302

EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire réelle, qui est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suit la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Question de cours : définition et propriétés de la fonction Γ.

2. a) Justifier que la variable X admet des moments de n'importe quel ordre et établir, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, l'égalité :
$$\frac{V(X^n)}{n^2\, E(X^{2n-2})} = \frac{2(2n-1)}{n} - \frac{1}{\binom{2n-2}{n-1}} .$$
b) En déduire la limite de $\dfrac{V(X^n)}{n^2\, E(X^{2n-2})}$ quand n tend vers l'infini.

On note L l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbf{R}_+$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(x)\big)^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

3. a) Justifier que L est un $\mathbf{R}$ espace vectoriel.
b) Justifier que l'application $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur L.

4. Soit g une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ telle que g et sa dérivée g' appartiennent à L.
a) Justifier l'égalité :
$$\int_0^{+\infty} \big(g(x) - g(0)\big)^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \big(g(x) - g(0)\big) g'(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x .$$
b) En déduire l'inégalité :
$$V\big(g(X)\big) \leq 4\,E\Big(\big(g'(X)\big)^2\Big) .$$
c) Existe-t-il une constante $c < 4$ telle que
$$V\big(h(X)\big) \leq c\,E\Big(\big(h'(X)\big)^2\Big) .$$
pour toutes les fonctions h de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ pour lesquelles les variables aléatoires $h(X)$ et $h'(X)$ admettent un moment d'ordre 2 ?

Sujet S 302

Exercice sans préparation

Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que $f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)}$ et $\operatorname{rg} f = 2$.

Déterminer le spectre de f et les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ qui sont stables par f.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours.

2. a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

Par la formule de transfert, la variable aléatoire X^n admet une espérance parce que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$ est (absolument) convergente (cf question de cours).

$$E(X^n) = \Gamma(n+1) = n! \ .$$

On a donc $E(X^{2n}) = (2n)\,! = 2n(2n-1)\,(2n-2)\,! = 2n(2n-1)\,E(X^{2n-2})$ et par conséquent :

$$\frac{V(X^n)}{n^2\,E(X^{2n-2})} = \frac{E(X^{2n}) - \big(E(X^n)\big)^2}{n^2\ E(X^{2n-2})} = \frac{2(2n-1)}{n} - \frac{(n\,!)^2}{n^2\,(2n-2)!} = \frac{2(2n-1)}{n} - \frac{1}{\dbinom{2n-2}{n-1}} \ .$$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{V(X^n)}{n^2\ E(X^{2n-2})} = 4$.

3. a) On démontre que L est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbf{R}_+$ (à valeurs réelles) en constatant que L contient la fonction nulle, est stable par multiplication par un scalaire (immédiat) et par addition (seul point consistant de la preuve). En effet, si f et g sont deux éléments de L, la majoration

$$(f+g)^2 \leq 2(f^2+g^2)$$

prouve la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(x)+g(x)\big)^2 \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et par suite l'appartenance de la fonction continue $f+g$ à L.

b) On vérifie aisément que l'application considérée est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur L (en n'omettant pas de signaler le rôle décisif de la continuité des éléments de L dans le caractère « défini » de l'application).

4. Soit g une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ telle que g et sa dérivée g' appartiennent à L.

a) Pour tout $A > 0$, une intégration par parties permet d'écrire :

$$\int_0^A \big(g(x)-g(0)\big)^2 \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\big(g(x)-g(0)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^A + \int_0^A 2\big(g(x)-g(0)\big)g'(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (1)$$

Comme les fonctions $g-g(0)$ et g' appartiennent à L, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)g'(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ sont convergentes, ce qui entraîne que $\big(g(A)-g(0)\big)^2\,\mathrm{e}^{-A}$ admet une limite finie quand A tend vers $+\infty$.

Cette limite ne peut qu'être nulle puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)^2 \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente, et on obtient donc par passage à la limite dans l'équation (1), l'égalité demandée :

$$\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)^2 \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)g'(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \ .$$

b) Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire défini en 3.b), on obtient à partir du résultat précédent l'inégalité

$$\Big(\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)^2 \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\Big)^2 \le 4\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)^2 \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \times \int_0^{+\infty} \big(g'(x)\big)^2 \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

qui entraîne :

$$\int_0^{+\infty} \big(g(x)-g(0)\big)^2 \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \le 4\int_0^{+\infty} \big(g'(x)\big)^2 \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \ .$$

Par la formule de transfert, il ne reste plus qu'à traduire l'inégalité précédente pour obtenir l'inégalité demandée.

c) Il n'existe pas une telle constante.
Cela provient du résultat trouvé en 2b, puisque pour $h := x \longmapsto x^n$, on a :

$$E\Big(\big(h'(X)\big)^2\Big) = n^2 E(X^{2n-2}) \ .$$

Le quotient $\dfrac{V\big(h(X)\big)}{E\Big(\big(h'(X)\big)^2\Big)} = \dfrac{V(X^n)}{n^2\,E(X^{2n-2})}$ peut donc être arbitrairement proche de 4.

Corrigé de l'exercice sans préparation

• Comme $\operatorname{rg} f = 2$, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ et 0 est valeur propre de f. C'est la seule, puisque toute valeur propre de f est racine du polynôme (annulant f) $X^3 + X = X(X^2+1)$.

• Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ stable par f (autre que $\{(0,0,0)\}$ et $\mathbf{R}^3$) .

◇ Si S est une droite, S est dirigée par un vecteur propre de f, donc $S = \operatorname{Ker} f$, seule droite propre de f.

◇ Si S est un plan, le sous-espace vectoriel $S \cap \operatorname{Im} f$, stable par f, est soit une droite, soit un plan . Si c'était une droite , on aurait $S \cap \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$, ce qui est absurde parce que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.[1] Il en résulte que $S \cap \operatorname{Im} f$ est un plan et par conséquent que S est égal à $\operatorname{Im} f$.

Il en résulte que les sous-espace de $\mathbf{R}^3$ stables par f sont $\{(0,0,0)\}$, $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ et $\mathbf{R}^3$.

1. Si $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$, on dispose d'un vecteur $t \in \mathbf{R}^3$ tel que $x = f(t)$. Il vient que $f^2(t) = f(x) = 0_{\mathbf{R}^3}$, donc que $f^3(t) = 0_E$, et $f(t) = 0_E$; ainsi, $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$, et, d'après le théorème du rang, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

Concours HEC 2019

Sujet S 303

Exercice principal

Dans tout l'énoncé, r et n sont deux nombres entiers vérifiant les inégalités : $1 \leq r < n$.

1. Question de cours : définition et caractérisation des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien.

2. On note $D = ((d_{i,j}))$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf les r premiers coefficients de la diagonale, qui valent 1 :
$$d_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i = j \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$
Compléter le code *Scilab* de la fonction suivante d'arguments r et n pour qu'elle fournisse en sortie la matrice D.
```
function D=drn(r,n)
    D=zeros(n,n);
    ????
endfunction
```

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont le rang est égal à r, et M sa matrice dans la base canonique. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel, qui fait de la base canonique une base orthonormale.

3. Justifier que f est un projecteur orthogonal si, et seulement si, il existe une matrice orthogonale R telle que :
$${}^tR\,M\,R = D\ .$$

4. a) Justifier l'existence d'une base de $\mathbb{R}^n$ dont les $n - r$ derniers vecteurs constituent une base du noyau de f.

   b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une telle base et H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les r vecteurs $e_1, \ldots, e_r$.
   Soit g l'application de H dans l'image de f définie par
   $$\forall x \in H,\ g(x) = f(x)\ .$$
   Démontrer que g est un isomorphisme.

   c) Justifier l'existence d'une base $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ pour laquelle la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ est D.

   d) En déduire qu'il existe deux matrices inversibles P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
   $${}^tQ\,M\,P = D\ .$$

5. On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.
Démontrer que la matrice M appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe une matrice inversible P telle que :
$${}^tP\,M\,P = D\ .$$

Exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance m et une variance v.

On note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X.

On dit que la loi de X est *stable* lorsque, pour tout entier n non nul, il existe $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que les variables aléatoires $X_1 + \cdots + X_n$ et $a_n X + b_n$ suivent la même loi.

1. Démontrer que, si la variance v est nulle, alors la loi de X est stable.
2. On suppose désormais que la variance v est strictement positive.
   Trouver la loi de X.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours
2. Code complet

```
function D=drn(r,n)
    D=zeros(n,n);
    D(1:r,1:r)=eye(r,r);
endfunction
```

3. • Si f est un projecteur orthogonal, c'est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$. Il existe donc une matrice orthogonale R telle que la matrice ${}^tR\,M\,R$ est diagonale. Comme le rang de f est r, les sous-espaces propres $E_1(f)$ et $E-0(f)$ sont de dimensions respectives r et $n-r$, on peut choisir R de telle manière que :

$$ {}^tR\,M\,R = D\ . $$

• Réciproquement, s'il existe une matrice orthogonale R telle que ${}^tR\,M\,R = D$, la matrice M de f dans la base canonique (orthonormale) de $\mathbb{R}^n$ est symétrique et vérifie $M^2 = M$. Il en résulte que f est un projecteur orthogonal.

4. a) La dimension du noyau de f est égale à $n-r$.
On peut donc choisir $n-r$ vecteurs $e_{r+1},\dots,e_n$ formant une base de $\mathrm{Ker}(f)$, puis compléter cette famille libre à l'aide de r vecteurs $e_1,\dots,e_r$, pour constituer une base $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

b) L'application g est linéaire (par linéarité de f) et les deux espaces vectoriels H et $f(\mathbb{R}^n)$ sont de même dimension r.
Il suffit donc de prouver que g est injectif, en observant que son noyau est réduit au vecteur nul :

$$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f) \cap H = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

puisque $H = \mathrm{Vect}\{e_1,\dots,e_r\}$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\{e_{r+1},\dots,e_n\}$.

L'application linéaire g est donc bien un isomorphisme de H sur $f(\mathbb{R}^n)$.

c) Comme g est injective, les vecteurs $f_1 := g(e_1),\dots,f_r := g(e_r)$ sont linéairement indépendants et on peut les compléter pour former base $\mathcal{C} = (f_1,f_2,\dots,f_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Comme $f(e_i) = \begin{cases} f_i & \text{si } i \leq r \\ 0_{\mathbb{R}^n} & \text{sinon} \end{cases}$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ (base de l'espace de départ) et $\mathcal{C}$ (base de l'espace d'arrivée) est la matrice D :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = D\ .$$

d) On note P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ et Q la transposée de la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base canonique :

$$\begin{cases} P = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \\ \\ Q = {}^tP_{\mathcal{C},\mathcal{B}_0} = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}_0}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \end{cases}$$

D'après le résultat précédent :

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}_0}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) = {}^tQ\,M\,P$$

5. • S'il existe une matrice inversible P telle que ${}^tP\,M\,P = D$, alors l'égalité

$$M = {}^t(P^{-1})\,D\,P^{-1}$$

entraîne que M est symétrique et que

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad {}^tX\,M\,X \geq 0$$

donc que M appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

• Si la matrice M appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale R telle que ${}^tR\,M\,R$ est une matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_r,0,\dots,0)$, avec $\lambda_1 > 0,\dots,\lambda_r > 0$.
La matrice inversible $S = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_r},1,\dots,1)$ vérifie alors

$${}^tR\,M\,R = {}^tS\,D\,S$$

et on a donc ${}^tP\,M\,P = D$ pour la matrice inversible $P = RS^{-1}$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance m et une variance v.
On note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X.

1. Si la variance de X est nulle, on a :

$$\begin{cases} P([X = m]) = 1 \\ P([X_1 + \cdots + X_n = n\,m]) = 1 \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit donc de choisir $a_n > 0$ et de poser

$$b_n = n\,m - a_n\,m$$

pour que $a_nX + b_n$ suive la même loi que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$.

2. Par identification de l'espérance et de la variance des deux variables aléatoires $X_1 + \cdots + X_n$ et $a_nX + b_n$, on obtient :

$$a_n = \sqrt{n} \quad \text{et} \quad b_n = (n - \sqrt{n})m$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - nm}{\sqrt{n\,v}} \quad \text{suit la même loi que} \quad \frac{X - m}{\sqrt{v}}$$

D'après le théorème central limite, $\frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et par conséquent : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$

Concours HEC 2019

Sujet S 307

Exercice principal

On considère un paramètre θ décrivant un intervalle Θ de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, et une famille de probabilité $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

On note $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telles que, pour tout $\theta \in \Theta$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

- les variables $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n$ sont P_θ-indépendantes
- chaque variable U_n suit, sous la probabilité P_θ, la loi uniforme sur $[0, 1]$
- chaque variable V_n suit, sous la probabilité P_θ, la loi uniforme sur $[\theta, \theta + 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$, on note :

$$X_n(\omega) = \max\{U_n(\omega), V_n(\omega)\} \text{ et } M_n(\omega) = \min\{X_k(\omega)\,;\, k \in [\![1, n]\!]\} .$$

On cherche à estimer le paramètre θ à partir des valeurs observées pour les variables $X_1, \ldots, X_n, \ldots$

1. Question de cours : rappeler, dans le contexte précisé ci-dessus, la définition d'un estimateur convergent du paramètre θ.

2. Dans cette question, l'intervalle Θ est le segment $[-1, 0]$.

   a) Démontrer que, pour tout $\theta \in \Theta$, la variable aléatoire X_1 possède une densité que l'on déterminera.

   b) Vérifier que, sous la probabilité P_θ, l'espérance de X_1 est :

$$E_\theta(X) = \frac{1}{6}\big((\theta + 1)^3 + 3\big) .$$

   c) En déduire que $T_n = \Big(\big(\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\big) - 3\Big)^{1/3} - 1$ est un estimateur convergent de θ.

3. Dans cette question, l'intervalle Θ est inclus dans $[0, +\infty[$.

   a) Justifier que, pour $\varepsilon > 0$, la probabilité $P_\theta([X_1 > \theta + \varepsilon])$ est strictement inférieure à 1.

   b) En déduire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs de θ.

   c) Démontrer que M_n n'est pas un estimateur sans biais de θ et indiquer le signe de son biais.

4. a) Peut-on trouver un estimateur convergent de θ lorsque Θ est inclus dans $]-\infty, -1[$?

   b) Proposer une méthode pour trouver un estimateur convergent de θ lorsque $\Theta = [-1, +\infty[$.

Sujet S 307

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in E$ *non constante* et n un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note f^k l'élément de E tel que pour tout réel x :

$$f^k(x) = (f(x))^k \ .$$

Étudier la liberté de la famille $(f^1, f^2, \ldots, f^n)$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours.
2. a) Lorsque $\theta \in [-1, 0]$, « $X_1(\Omega) = [0, 1]$ » et la fonction de répartition $F_\theta := x \longmapsto P_\theta([X_1 \le x])$ de X_1 est donnée par :

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x(x-\theta) & \text{si } 0 \le x < \theta + 1 \\ x & \text{si } \theta + 1 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases} .$$

Cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé des points $0, \theta + 1$ et 1, la variable aléatoire X_1 admet une densité.
Toute fonction f_θ à valeurs positives, qui ne diffère de F'_θ qu'en un nombre fini de points, est alors une densité de X_1.
Une densité de X_1 est donc donnée par :

$$f_\theta(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - \theta & \text{si } 0 \le x < \theta + 1 \\ 1 & \text{si } \theta + 1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } x > 01 \end{cases} .$$

b) La variable X_1 n'est pas sans espérance puisque X_1 est bornée et on a :

$$\begin{aligned} E_\theta(X) &= \int_0^1 x\, f_\theta(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\theta+1} x(2x-\theta)\,\mathrm{d}x + \int_{\theta+1}^1 x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}(\theta+1)^3 - \frac{1}{2}\theta(\theta+1)^2 - \frac{1}{2}(\theta^2 + 2\theta) \\ &= \frac{1}{6}(\theta^3 + 3\theta^2 + 3\theta + 4) \\ &= \frac{1}{6}\big((\theta+1)^3 + 3\big) . \end{aligned}$$

c) Par la loi faible des grands nombres, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ converge en probabilité vers $E_\theta(X)$.

Comme la fonction $\varphi := x \longmapsto \sqrt[3]{6x-3} - 1$ est continue dur $\mathbb{R}$, la suite $(T_n)_{n\ge1}$ converge en probabilité vers

$$\varphi\big(E_\theta(X_1)\big) = \varphi\big(\frac{1}{6}\big((\theta+1)^3 + 3\big) = \theta .$$

Par conséquent, T_n est un estimateur convergent de θ.

3. a)

$$P_\theta([X_1 > \theta + \varepsilon]) = 1 - P_\theta([U_1 \leq \theta + \varepsilon])P_\theta([V_1 \leq \theta + \varepsilon]) < 1$$

puisque les probabilités $P_\theta([U_1 \leq \theta + \varepsilon])$ et $P_\theta([V_1 \leq \theta + \varepsilon])$ sont strictement positives.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P_\theta([\,|M_n - \theta| > \varepsilon]) = P_\theta([\,M_n > \theta + \varepsilon]) = \Big(P_\theta([\,X_1 > \theta + \varepsilon])\Big)^n$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, d'après le résultat précédent.
Par conséquent, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers θ.

c) Soit $\theta \geq 0$.
Comme $P_\theta([M_n \geq \theta]) = 1$ (puisque par exemple $M_n \geq V_1$), le biais $E_\theta(M_n) - \theta$ de l'estimateur M_n est positif ou nul.
Comme de plus on n'a pas $P_\theta([M_n = \theta]) = 1$, ce biais ne peut pas être nul.

4. a) Lorsque $\theta \leq -1$, X_n est égale à U_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il en résulte que la loi d'un estimateur T_n de θ ne dépend pas de θ, et que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut converger en probabilité vers θ pour P_θ que pour au plus une valeur de θ.
Par conséquent, il n'existe aucun estimateur convergent de θ lorsque l'intervalle Θ (non réduit à un point par hypothèse) est inclus dans $]-\infty, -1[$.

b) En s'inspirant de la méthode utilisée en question 2, on peut exploiter le fait que l'espérance des variables aléatoires X_n sous la probabilité P_θ est une fonction strictement croissante et continue de θ (conjecture plausible) pour construire un estimateur convergent de θ en appliquant à la moyenne empirique la bijection réciproque de cette fonction.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i f^i = 0_E$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i f^i(x) = 0$.

Le polynôme P tel que $P(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i X^i$ s'annule donc sur $f(\mathbb{R})$.

Comme f n'est pas constante $f(\mathbb{R})$ est, par continuité de f, un intervalle non réduit à un point et P s'annule donc une infinité de fois.

Il en résulte que $P = 0$ et que la famille $(f, f^2, \ldots, f^n)$ est libre.

Concours HEC 2019

Sujet S 308

Exercice principal

Dans cet exercice, p est un entier naturel non nul et on note $U_p[X]$ l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré p, c'est-à-dire des polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ dont le coefficient de X^p est égal à 1.

1. a) Question de cours : formules d'Euler et de Moivre.
   b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

On admet qu'il existe un unique polynôme $T_p \in U_p[X]$ vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(p\theta) = 2^{p-1} T_p\big(\cos(\theta)\big) .$$

2. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\| P \| = \max_{[-1,+1]} |P| .$$

   a) Justifier, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, l'existence de la quantité $\| P \|$.
   b) Calculer $\| T_p \|$.

Pour tout entier $k \in [\![0, p]\!]$, on pose : $\begin{cases} \theta_k = \dfrac{k\pi}{p} \\ a_k = \cos(\theta_k) \end{cases}$.

3. a) Justifier que les réels $a_0, a_1, \ldots, a_p$ sont deux à deux distincts et vérifient :

$$\forall k \in [\![0, p]\!], \quad |T_p(a_k)| = \| T_p \| .$$

   b) On suppose qu'un polynôme $P \in U_p[X]$ vérifie l'inégalité stricte $\| P \| < \dfrac{1}{2^{p-1}}$.
   Montrer que le polynôme $\Delta = T_p - P$ satisfait à

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \ \Delta(a_{k-1})\Delta(a_k) < 0$$

   et en déduire une contradiction.

4. a) Soit $\lambda \in]0, 1[$ et $P \in U_p[X]$ tel que : $\| P \| = \dfrac{1}{2^{p-1}}$.
   Justifier que le polynôme $T_p - \lambda P$ a au moins p zéros distincts dans le segment $[-1, +1]$ et en déduire l'inégalité :

$$|T_p(x) - \lambda P(x)| \leq 2^p(1 - \lambda) .$$

   b) Démontrer que T_p est l'unique polynôme P de $U_p[X]$ vérifiant :

$$\| P \| = \min_{Q \in U_p[X]} \| Q \| .$$

Exercice sans préparation

Le script *Scilab* suivant permet de simuler une épreuve aléatoire consistant à effectuer des tirages successives dans une urne dont le contenu est lui-même aléatoire.

```
--> p=rand();
--> U=[1]; // contenu initial de l'urne
--> N=1;
--> while rand()>p; U=[U,0]; N=N+1; end;
--> C=U(grand(1,1,'uin',1,N)) // couleur de la boule tirée
```

1. Détailler l'épreuve simulée.
2. Quelles sont les lois des variables aléatoires simulées par N et C ?

Corrigé de l'exercice principal

1. a) Question de cours.

b) $\begin{cases} \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 \\ \cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \end{cases}$

2. a) L'image du segment $[-1,+1]$ par la fonction continue $x \longmapsto -P-(x)$ étant un segment, cette fonction est majorée sur ce segment et y atteint sa borne supérieure, ce qui justifie l'existence de la quantité
$$\| P \| = \max_{[-1,+1]} |P| \, .$$

b) Des égalités $T_p\big(\cos(\theta)\big) = \dfrac{\cos(p\theta)}{2^{p-1}}$, on déduit $\| T_p \| = \dfrac{1}{2^{p-1}}$, puisque $|\cos(p\theta)| \leq 1$ pour tout θ et $|T_p(1)| = T_p\big(\cos(0)\big) = \dfrac{\cos(0)}{2^{p-1}} = \dfrac{1}{2^{p-1}}$.

3. a) Comme la fonction cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$, on a : $a_0 > a_1 > \cdots > a_p$. De plus, pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, on a :
$$|T_p(a_k)| = \frac{|\cos(p\,\theta_k)|}{2^{p-1}} = \frac{|\cos(k\pi)|}{2^{p-1}} = \frac{1}{2^{p-1}} = \| T_p \| \, .$$

b) Soit $k \in [\![1,p]\!]$.
Comme $\Delta(a_k) = \dfrac{(-1)^k}{2^{p-1}} - P(a_k)$ et $|P(a_k)| < \dfrac{1}{2^{p-1}}$, $\Delta(a_k)$ est strictement positif si k est pair, strictement négatif si k est impair.
Par conséquent, quelle que soit la parité de k, on a bien : $\Delta(a_{k-1})\Delta(a_k) < 0$.
Il en résulte, par le théorème des valeurs intermédiaires, que le polynôme Δ possède p racines distinctes (une dans chacun des intervalles ouverts $]a_0, a_1[,]a_1, a-2[, \ldots,]a_{p-1}, a_p[$).
Comme P et T_p sont unitaires, le degré de Δ est inférieur ou égal à $p-1$, et il ne peut être que le polynôme nul s'il possède p racines distinctes.
On a dès lors $P = T_p$, ce qui est impossible puisque $\| T_p \| = \dfrac{1}{2^{p-1}}$.

4. a) En appliquant à $T_p - \lambda P$ le résultat appliqué précédemment au polynôme P, on démontre que ce polynôme admet p racines distinctes $c_1, c_2, \ldots, c_p$ situées dans $[-1,+1]$.
Par conséquent,
$$T_p - \lambda P = (1-\lambda)\prod_{k=1}^{p}(X - c_k)$$
ce qui entraîne que, pour tout $x \in [-1,+1]$, on a :
$$|T_p(x) - \lambda P(x)| \leq 2^p(1-\lambda)$$
puisque $|x - c_k| \leq 2$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$.

b)

• En raisonnant par l'absurde, on a démontré en 3.b :

$$\forall Q \in U_p[X], \quad \| T_p \| \leq \| Q \|$$

ce qui prouve l'égalité :

$$\| T_p \| = \min_{Q \in U_p[X]} \| Q \| \ .$$

• D'après a, si un polynôme $P \in U_p[X]$ vérifie

$$\| P \| = \min_{Q \in U_p[X]} \| Q \|$$

alors :

$$\forall x \in [-1,+1], \forall \lambda \in]0,1[, \quad | T_p(x) - \lambda P(x) | \leq 2^p(1-\lambda)$$

ce qui entraîne, en faisant tendre λ vers 1, que le polynôme $T_p - P$ s'annule en tout point x du segment $[-1,+1]$, donc que P est égal à T_p.
Finalement, T_p est bien l'unique polynôme P de $U_p[X]$ vérifiant :

$$\| P \| = \min_{Q \in U_p[X]} \| Q \| \ .$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Une urne contient initialement une seule boule, rouge par exemple.
   On tire à pile ou face avec une pièce équilibrée : pour pile, on ajoute une boule d'une couleur différente, noire par exemple, et on rejoue. Pour face, on tire une boule au hasard dans l'urne et le jeu s'arrête.
   La boule tirée est rouge si $C = 1$, noire si $C = 0$.

2. • N est une simulation de la loi géométrique de paramètre $p = 0,5$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P([N = k] = (1-p)^{k-1} p \frac{1}{2^k} \ .$$

• C est une simulation d'une loi de Bernoulli de paramètre égal à la probabilité que la boule tirée soit rouge, c'est-à-dire :

$$P([C=1]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([N=k]] \, P_{[N=k]}([C=1]) = \sum_{k=1}^{+\infty} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\,2^k} \ .$$

Concours HEC 2019

Sujet S 310

EXERCICE PRINCIPAL

Dans l'exercice $(E, \langle \mid \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Question de cours : énoncer le théorème de réduction des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.

2. Soit f l'application de E dans E telle que pour tout x de E, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle \, e_k$.

   a) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

   b) Montrer que toutes les valeurs propres de f sont strictement positives et en déduire que f est bijectif.

3. Soit p un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_p$ des nombres réels deux à deux distincts.

   Montrer que l'application θ de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par

   $$\forall\, P \in \mathbb{R}_{p-1}[X], \quad \theta(P) = \big(P(x_1), \ldots, P(x_p)\big)$$

   est bijective.

4. a) Calculer, pour j, k entiers compris entre 1 et n, le produit scalaire $\langle e_k \mid f^{-1}(e_j) \rangle$.

   b) Justifier l'existence d'un polynôme P tel que $g = P(f)$ vérifie $g \circ g = f^{-1}$.

   c) Pour un tel endomorphisme g, montrer que $(g(e_1), \ldots, g(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire à densité qui est à valeurs dans $]0,+\infty[$ et telle que X et $\dfrac{1}{X}$ ont même loi.

1. Quelle est la valeur de $P(X \leq 1)$?

2. On suppose que X admet une densité f qui est continue sur $]0,+\infty[$ et qui est constante sur $]0,1]$.

   Déterminer la valeur de $f(x)$ pour tout $x > 0$ et vérifier la cohérence du résultat obtenu.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.

2. a) L'application f est linéaire par linéarité à droite du produit scalaire.

De plus, si $x, y \in E$, $\langle f(x) \,|\, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \,|\, x \rangle \langle e_k \,|\, y \rangle$.

On constate que dans l'expression qu'on vient d'obtenir pour $\langle f(x) \,|\, y \rangle$, x et y jouent des rôles symétriques donc $\langle f(x) \,|\, y \rangle = \langle f(y) \,|\, x \rangle$ ce qui prouve que f est sympétrique.

b) Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé.

Alors $\langle f(x) \,|\, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \,|\, x \rangle^2 > 0$ car x étant non nul, l'un au moins des $\langle e_k \,|\, x \rangle$ est non nul.

D'autre part, $\langle f(x) \,|\, x \rangle = \lambda \|x\|^2$. Donc $\lambda = \frac{\langle f(x) \,|\, x \rangle}{\|x\|^2} > 0$.

En particulier, 0 n'est pas valeur propre de f donc f est bijectif.

3. L'application θ est clairement linéaire. Son noyau est réduit au polynôme nul car un polynôme de degré inférieur ou égal à $p-1$ admettant p racines distinctes est nécessairement nul. De plus, $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ et $\mathbb{R}^p$ sont deux espaces vectoriels de même dimension finie égale à p donc l'application θ est un isomorphisme.

4. a) On a d'une part, $f\big(f^{-1}(e_j)\big) = e_j$ et, par définition de f, $f\big(f^{-1}(e_j)\big) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \,|\, f^{-1}(e_j) \rangle e_k$.

Par unicité de la décomposition de e_j dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\langle e_k \,|\, f^{-1}(e_j) \rangle = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

b) Notons p le nombre de valeurs propres distinctes de f. D'après 3., il existe un (unique) polynôme P de degré au plus $p-1$ tel que pour toute valeur propre λ de f, on ait $P(\lambda) = \sqrt{\lambda^{-1}}$.

On a alors pour tout vecteur propre x de f de valeur propre associée λ, $P(f)^2(x) = P(\lambda)^2 x = \lambda^{-1} x = f^{-1}(x)$ donc $P(f)^2 = f^{-1}$ puisqu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

c) Remarquons que f étant symétrique, toutes les puissances de f le sont également donc $g = P(f)$ est un endomorphisme symétrique de E.

On a donc pour tout $(k, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\langle g(e_k) \,|\, g(e_j) \rangle = \langle e_k \,|\, g^2(e_j) \rangle = \langle e_k \,|\, f^{-1}(e_j) \rangle = \delta_{k,j}$ donc la famille $\big(g(e_1), \dots, g(e_n)\big)$ est orthonormale, et étant de cardinal $n = \dim E$, c'est une base orthonormée de E.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. Puisque X et $\dfrac{1}{X}$ ont même loi, $P(X \leq 1) = P\big(\frac{1}{X} \leq 1\big) = P(X \geq 1)$.

   Comme X est à densité, $P(X \geq 1) = P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$.

   On a donc $P(X \leq 1) = \frac{1}{2}\cdot$

2. On sait que f est constante sur $]0,1]$ et que $P(X \leq 1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot$

   On a donc pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\cdot$

   De plus, pour tout $x \in]0,1]$, $P(X \leq x) = P\big(X \geq \frac{1}{x}\big)$ soit $\dfrac{x}{2} = \displaystyle\int_{1/x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   L'application f étant continue sur $]0,+\infty[$, les deux membres de la dernière égalité sont dérivables et on obtient en dérivant :

   $\forall x \in]0,1]$, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x^2} f\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ ou, de manière équivalente $\forall x \geq 1$, $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}\cdot$

   Réciproquement notons f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

   Alors f est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$, à valeurs positives et d'intégrale convergente égale à 1 donc f est une densité de probabilité et elle est constante sur $]0,1]$.

   De plus, on a pour tout $x \leq 0$, $P(X \leq x) = P(\frac{1}{X} \leq x) = 0$ et pour tout $x \in]0,1]$, $P(X \leq x) = \frac{x}{2}$ et $P(\frac{1}{X} \leq x) = P(X \geq \frac{1}{x}) = \int_{1/x}^{+\infty} \frac{1}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2}$ donc $\forall x \in]0,1]$, $P(X \leq x) = P(\frac{1}{X} \leq x)$.

   Enfin, si $x > 1$, on a d'après ce qu'on vient de montrer $P(X \leq \frac{1}{x}) = P(\frac{1}{X} \leq \frac{1}{x})$ soit $P(\frac{1}{X} \geq x) = P(X \geq x)$ ou encore, en passant aux événements contraires,

   $$P(X < x) = P(\frac{1}{X} < x)$$

   et finalement, compte-tenu du fait que X est à densité,

   $$P(X \leq x) = P(\frac{1}{X} \leq x).$$

   X et $\dfrac{1}{X}$ ont donc même fonction de répartition et par conséquent même loi.

Concours HEC 2019

Sujet S 313

Exercice principal

1. Question de cours : énoncer le théorème du rang.
2. Soit E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que :
$$u \circ v \circ u = u \quad \text{et} \quad v \circ u \circ v = v$$
   a) Vérifier que $v \circ u$ est un projecteur sur E.
   b) Montrer que $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(v \circ u)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$.
   c) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

   On note E_1 et F_1 des sous espaces vectoriels de E et F tels que :
$$E = \mathrm{Ker}(u) \oplus E_1 \quad \text{et} \quad F = \mathrm{Im}(u) \oplus F_1 \ .$$
   On définit ensuite l'application linéaire $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E_1, \mathrm{Im}(u))$, comme la restriction de u à E_1.

   a) Montrer que $\tilde{u}$ est une application linéaire bijective.

   En utilisant l'isomorphisme réciproque $\tilde{u}^{-1}$ de $\tilde{u}$, on note alors v l'unique application linéaire de F dans E telle que
$$v(y) = \begin{cases} \tilde{u}^{-1}(y) & \text{si } y \in \mathrm{Im}(u) \\ 0 & \text{si } y \in F_1 \end{cases}$$
   b) Montrer que $\mathrm{Ker}(v) = F_1$ et $\mathrm{Im}(v) = E_1$.
   c) Montrer que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.
2. a) On a bien $v \circ u \circ v \circ u = v \circ u$.

b) L'inclusion $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$ est toujours vraie. Réciproquement

$$\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(v \circ u \circ v) \subset \mathrm{Im}(v \circ u) \ .$$

De même, l'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v \circ u)$ est toujours vraie. Réciproquement

$$\mathrm{Ker}(v \circ u) \subset \mathrm{Ker}(u \circ v \circ u) = \mathrm{Ker}(u) \ .$$

c) Comme $v \circ u$ est un projecteur, on a bien $E = \mathrm{Ker}(v \circ u) \oplus \mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$.

3. a) On montre tout d'abord que $\tilde{u}$ est injectif : en effet si $x \in E_1$ est tel que $u(x) = 0$, alors $x \in E_1 \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$. D'autre part

$$\dim(E_1) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Im}(u)) \ .$$

et $\tilde{u}$ est bien bijectif.

b) Ceci vient de la définition de v (dont on pourra demander de justifier l'unicité) et du fait que $\tilde{u}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(u), E_1)$ est bijectif.

c) Pour $u \circ v \circ u = u$, cette égalité est évidemment vraie sur $\mathrm{Ker}(u)$. Sur E_1, elle l'est aussi car

$$u \circ v \circ u(x) = u \circ v(y) = u \circ \tilde{u}^{-1}(y) = y = u(x) \ .$$

Pour $v \circ u \circ v = v$, cette égalité est évidemment vraie sur F_1. Sur $\mathrm{Im}(u)$,

$$v \circ u \circ v(y) = v \circ u(\tilde{u}^{-1}(y)) = v(y) \ .$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

Comme g doit être monotone, on distingue les deux cas envisageables :

- g croissante

On veut : $\forall\, x \in]-1,+1[,\quad P[g(X) \leq g(x)] = 1 - \mathrm{e}^{-g(x)} = P[X \leq x] = \dfrac{x+1}{2}$, d'où :

$$g(x) = -\ln\left(\frac{1-x}{2}\right) \cdot$$

g est alors une bijection croissante de $]-1,+1[$ sur $]0,+\infty[$.

- g décroissante

On veut : $\forall\, x \in]-1,+1[,\quad P[g(X) \leq g(x)] = 1 - \mathrm{e}^{-g(x)} = P[X \geq x] = \dfrac{1-x}{2}$, d'où :

$$g(x) = -\ln\left(\frac{1+x}{2}\right) \cdot$$

g est alors une bijection décroissante de $]-1,+1[$ sur $]0,+\infty[$.

Concours HEC 2019

Sujet S 316

Exercice principal

On considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$; on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ constitué des matrices symétriques (resp. des matrices antisymétriques).

Le but de l'exercice est d'étudier l'équation (E) d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$^tM + M^2 = I_n$$

1. Question de cours : sous-espaces supplémentaires : définition et caractérisations.

2. Montrer que toute solution de (E) dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ possède un polynôme annulateur de degré 4. Qu'en déduit-on pour les valeurs propres d'une solution de (E) ?

3. Soit M une solution de (E) dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

   a) Montrer que M et ^tM commutent.

   b) Justifier l'existence et l'unicité de $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ tel que $M = S + A$.

   c) Avec les notations précédentes, montrer que :

$$\begin{cases} AS = SA, \\ S + S^2 + A^2 = I_n, \\ -A + 2AS = 0. \end{cases}$$

   d) Justifier l'existence d'une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}SP$ soit diagonale et $A' = P^{-1}AP$ soit antisymétrique.

   e) Indiquer les relations entre D et A' résultant de c).

   f) En déduire que $A' = 0$ et préciser les valeurs possibles pour les coefficients diagonaux de D.

4. Déterminer la forme des solutions de (E) dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours.

2. Si M est solution de (E), $M = {}^t({}^tM) = {}^t(I_n - M^2) = I_n - \left({}^tM\right)^2 = I_n - (I_n - M^2)^2 = 2M^2 - M^4$.

   On en déduit que $P = X^4 - 2X^2 + X = X(X-1)(X^2 + X - 1)$ est un polynôme annulateur de M.

   Par conséquent, si M est solution de (E), $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, 1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$

3. a) Comme M est solution de (E), ${}^tM = I_n - M^2$ donc ${}^tM.M = M - M^3 = M.{}^tM$.

   b) Par analyse-synthèse, on trouve l'unique décomposition cherchée :

$$M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)\ .$$

   c) D'après 3.b), $S = \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right)$ et $A = \frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$ donc, vu que M et ${}^tM$ commutent, S et A commutent.

   On peut donc appliquer la formule du binôme donc ${}^tM + M^2 = S - A + S^2 + 2AS + A^2$.

   On remarque que S^2 et A^2 sont symétriques car ${}^tS^2 = \left({}^tS\right)^2 = S^2$ et ${}^tA^2 = \left({}^tA\right)^2 = (-A)^2 = A^2$. De même, AS est antisymétrique car ${}^t(AS) = {}^tS{}^tA = -SA = -AS$.

   Par unicité de la décomposition d'une matrice en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, l'égalité $\underbrace{S + S^2 + A^2}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})} + \underbrace{(-A + 2AS)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})} = I_n$ donne :

$$S + S^2 + A^2 = I_n \text{ et } -A + 2AS = 0\ .$$

   d) Le théorème de réduction des matrices symétriques réelles donne l'existence d'une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}SP = D$ soit diagonale. Si l'on pose $A' = P^{-1}AP$, la matrice A' est antisymétrique car $A' = {}^tPAP$ donc ${}^tA' = {}^tP{}^tA{}^t({}^tP) = {}^tP(-A)P = -{}^tPAP = -A'$.

   e) $\begin{cases} A'D = DA', \\ D + D^2 + A'^2 = I_n, \\ -A' + 2A'D = 0. \end{cases}$

   f) Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $A' = (a'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
Alors le terme général de $A'D - DA'$ vaut $a'_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i)$, celui de $-A' + 2A'D$ vaut $a'_{i,j}(-1 + 2\lambda_j)$ et le i-ème coefficient diagonal de $D + D^2 + A'^2$ vaut $\lambda_i + \lambda_i^2 + \sum_{k=1}^{n} a'_{i,k}a'_{k,i} = \lambda_i + \lambda_i^2 - \sum_{k=1}^{n} a'^2_{i,k}$.

   On a donc pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$,

$$\begin{cases} a'_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i) = 0 \\ a'_{i,j}(-1 + 2\lambda_j) = 0 \\ \lambda_i + \lambda_i^2 - \sum_{k=1}^{n} a'^2_{i,k} = 1. \end{cases}$$

Si l'un des $a'_{i,j}$ était non nul, on aurait $\lambda_i = \lambda_j = \dfrac{1}{2}$ mais alors $\lambda_i + \lambda_i^2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a'^2_{i,k} \leq \dfrac{3}{4} < 1$ ce qui contredit la dernière relation ci-dessus.

On a donc $A' = 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i + \lambda_i^2 - 1 = 0$ soit $\lambda_i \in \left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

4. D'après la question précédente, si M est solution de (E), il existe P matrice orthogonale et D matrice diagonale à coefficients diagonaux appartenant à $\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ tels que $M = PDP^{-1}$.

   Réciproquement soit M une matrice de la forme précédente. Alors M est symétrique car $P^{-1} = {}^tP$ et que ${}^tD = D$. On en déduit que ${}^tM + M^2 = M + M^2 = P(D + D^2)P^{-1} = I_n$: en effet $D + D^2 = I_n$ étant donné que tous les coefficients diagonaux de D vérifient $\lambda + \lambda^2 = 1$. La matrice M est donc solution de (E).

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. Soit f la densité continue de X.
   D'après le théorème de transfert, l'existence de $E(|X-d|)$ équivaut à l'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x-d| f(x)\,\mathrm{d}x$, et celle-ci est assurée par le fait que pour tout x réel,

$$0 \leq |x-d| f(x) \leq |x| f(x) + |d| f(x).$$

   Donc $E(|X-d|)$ existe et

$$\begin{aligned} E(|X-d|) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x-d| f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{d} (d-x) f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d}^{+\infty} (x-d) f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= d\int_{-\infty}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{d} x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x - d\int_{d}^{+\infty} f(x)\mathrm{x} \end{aligned}$$

2. D'après l'expression précédente l'application $g : d \mapsto E(|X-d|)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} g'(d) &= \int_{-\infty}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x + df(d) - df(d) - df(d) - \int_{d}^{+\infty} f(x)\mathrm{x} + df(d) \\ &= \int_{-\infty}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{d}^{+\infty} f(x)\mathrm{x} \\ &= -1 + 2\int_{-\infty}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x = -1 + 2F_X(d) \end{aligned}$$

   Comme la fonction de répartition de X est continue et croissante sur $\mathbf{R}$ et tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$, elle prend la valeur $\dfrac{1}{2}$ sur un intervalle fermé $[a, b]$ (éventuellement réduit à un point). La fonction g est décroissante sur $]-\infty, a]$, constante sur $[a, b]$ et croissante sur $[b, +\infty[$. Donc g est minimale en tout point de $[a, b]$: ces points sont les médianes de X.

Exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Quelle est sa dimension ?

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

2. a) La négligeabilité $n^r\dfrac{x^n}{n!}=o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$, quand n tend vers l'infini, entraîne la convergence de la série $\sum n^r\dfrac{x^n}{n!}$ et l'existence de $S_r(x)$.

b) $(Z_x)^r=f(Y_x)$ avec $f(t)=\dfrac{t^r}{x^r}$.

D'après a), $f(n)P(Y_x=n)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^r}n^r\dfrac{x^n}{n!}$ est le terme général d'une série positive convergente, donc d'après le théorème de transfert, $(Z_x)^r$ admet une espérance et

$$E\big((Z_x)^r\big)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^r}\sum_{n=0}^{+\infty}n^r\frac{x^n}{n!}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^r}S_r(x)\,.$$

3. a) $E(Z_x)=\dfrac{E(Y_x)}{x}=1$ et $V(Z_x)=\dfrac{V(Y_x)}{x^2}=\dfrac{1}{x}$; donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P\big(|Z_x-1|\geq x^{-1/3}\big)\leq\frac{1/x}{x^{-2/3}}=\frac{1}{x^{1/3}}$$

On a donc, par encadrement, $P\big(|Z_x-1|\geq x^{-1/3}\big)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ ou encore, en passant à l'événement contraire, $P\big(|Z_x-1|<x^{-1/3}\big)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$.

En outre, l'événement $\big(|Z_x-1|<x^{-1/3}\big)=\big(-x^{-1/3}<Z_x-1<x^{-1/3}\big)$ est inclus dans l'événement $\big(Z_x\geq 1-x^{-1/3}\big)$ donc on a également $P\big(Z_x\geq 1-x^{-1/3}\big)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$.

b) Pour $a>0$, on a d'après l'inégalité de Markov, $P\big(Z_x\geq a\big)=P\big((Z_x)^r\geq a^r\big)\leq\frac{E\left((Z_x)^r\right)}{a^r}$ soit $a^rP\big((Z_x)^r\geq a^r\big)\leq E\big((Z_x)^r\big)$ ce dernier résultat restant vrai pour $a=0$. On a donc l'inégalité souhaitée puisque si $x\geq 1$, $a=1-x^{-1/3}\geq 0$.

4. a) La variable $T_{x,k}$ est une fonction de Y_x donc, en vertu du théorème de transfert, l'existence de $E\big(T_{x,k}\big)$ équivaut à l'absolue convergence de la série de terme général

$$u_n=n(n-1)\dots(n-k+1)P(Y_x=n)=\mathrm{e}^{-x}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!}x^n\,.$$

Pour $n\in[\![0,k-1]\!]$, $u_n=0$ et pour $n\geq k$, $u_n=\mathrm{e}^{-x}x^k\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$ donc la série positive $\sum u_n$ est bien convergente de somme $\mathrm{e}^{-x}x^k\,\mathrm{e}^x=x^k$.

La variable aléatoire $T_{x,k}$ admet donc une espérance égale à x^k.

b) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, H_k est de degré k donc $(H_0,H_1,\dots,H_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$. Par conséquent, il existe un unique $(a_0,\dots,a_N)\in\mathbb{R}^{N+1}$ tel que $X^N=\sum\limits_{k=0}^{N}a_kH_k$.

En considérant la valeur en 0 des deux membres, on obtient $a_0=0$ et en égalant leurs coefficients dominants, on obtient $a_N=1$.

c) Le résultat est évident si $N=0$. Si $N \in \mathbb{N}^*$, $Y_x^N = \sum\limits_{k=1}^{N} H_k(Y_x) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k T_{x,k}$ puis, en prenant l'espérance $E\big((Y_x)^N\big) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k x^k$ ou encore

$$E\big((Z_x)^N\big) = \frac{1}{x^N} \sum_{k=1}^{N} a_k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{x^{N-k}}$$

Pour $k \in [\![1, N-1]\!]$, $\frac{1}{x^{N-k}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $E\big((Z_x)^N\big) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

d) Le réel s appartient à $[0,1[$ donc l'application $h : t \mapsto t^s$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$: en effet, elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h''(t) = s(s-1)t^{s-2} \leq 0$. On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $h(t) \leq h'(1)(t-1) + h(1)$ soit $t^s \leq s(t-1)+1$.

On a donc $Z_x^s = Z_x^{r-N} \leq s(Z_x - 1) + 1 = (1-s) + sZ_x$ et, vu que Z_x est à valeurs strictement positives, $(Z_x)^r \leq (1-s)(Z_x)^N + s(Z_x)^{N+1}$.

Par linéarité et croissance de l'espérance, on a donc :

$$E\big((Z_x)^r\big) \leq (1-s)E\big((Z_x)^N\big) + sE\big((Z_x)^{N+1}\big).$$

5. En posant $N = \lfloor r \rfloor$ et $s = r - N$, on a d'après les questions 3.b) et 4.d), pour tout $x > 0$;

$$(1 - x^{-1/3})^r P(Z_x \geq 1 - x^{-1/3}) \leq E\big((Z_x)^r\big) \leq (1-s)E\big((Z_x)^N\big) + sE\big((Z_x)^{N+1}\big)$$

Or, d'après 3.a), $(1-x^{-1/3})^r P(Z_x \geq 1-x^{-1/3}) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1.1 = 1$ et d'après 4.c), $(1-s)E\big((Z_x)^N\big) + sE\big((Z_x)^{N+1}\big) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} (1-s)+1 = 1$ donc, par encadrement, $E\big((Z_x)^r\big) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ ce qui, compte-tenu de 2.b) prouve que $S_r(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^r\,\mathrm{e}^x$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On sait que, muni de l'addition matricielle et de la multiplication externe des matrices par les scalaires complexes, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. En se restreignant à des scalaires réels, on conserve les propriétés qui définissent la structure d'espace vectoriel.

2. $$\dim_{\mathbb{R}} E = 2n^2\ .$$

puisque les matrices $E_{k,\ell}$ et $iE_{k,\ell}$ (pour $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$) constituent une famille libre et génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.