



**ORAL HEC Paris 2018**

---

**MATHÉMATIQUES**

---

**EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES**

---

**Option scientifique**

## EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice,  $X$  désigne une variable aléatoire à densité, possédant une espérance  $E(X)$  et une variance  $V(X)$ . Les autres variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  que  $X$ .

1. a) Question de cours : inégalité de Markov.

b) Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ .

i) Pour tout réel strictement positif  $b$ , justifier l'inégalité :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E((X - E(X) + b)^2)}{(a + b)^2}.$$

ii) En appliquant le résultat précédent à  $b = V(X)/a$ , établir l'inégalité :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

2. On appelle *médiane* de  $X$  tout nombre réel  $m$  tel que  $P([X \leq m]) = \frac{1}{2}$ .

a) Justifier que  $X$  admet au moins une médiane et que l'ensemble des médianes de  $X$  est un segment de  $\mathbb{R}$ .

b) Dans cette question, on note  $m$  une médiane de  $X$  et on suppose que  $m$  est supérieure ou égale à  $E(X)$ . On note  $\sigma(X)$  l'écart-type de  $X$ .

Déduire de l'inégalité prouvée en 1.b.ii, appliquée à  $a = m - E(X)$ , que  $m - E(X)$  est inférieur ou égal à  $\sigma(X)$ .

c) Justifier que toute médiane  $m$  de  $X$  vérifie l'inégalité :  $\frac{|m - E(X)|}{\sigma(X)} \leq 1$ .

3. Pour tout entier  $n \geq 2$ , on note  $X_n$  une variable aléatoire admettant pour densité la fonction  $f_n$  définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/n \\ n/2 & \text{si } -1/n \leq x < 0 \\ 1/(2(n-1)) & \text{si } 0 \leq x < 1 - 1/n \\ (n-1)/2 & \text{si } 1 - 1/n \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

a) Trouver l'unique médiane de  $X_n$ .

b) Justifier la convergence en loi de la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

c) Quelle propriété du majorant trouvé en 2.c peut-on déduire des limites de  $E(X_n)$  et  $V(X_n)$  quand  $n$  tend vers l'infini ?

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $n$  un nombre entier supérieur ou égal à 2.

On dit qu'une matrice carrée  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est *nilpotente* s'il existe un entier  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $M^k$  est la matrice nulle.

1.
  - a) Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
  - b) Démontrer que la seule matrice nilpotente et diagonalisable de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est la matrice nulle.
2. On appelle *indice de nilpotence* d'une matrice nilpotente  $M$  le plus petit entier strictement positif  $k$  tel que  $M^k$  est la matrice nulle.

La fonction *Scilab* suivante, dont le code est incomplet, permet de calculer l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.

```
function k=indnilp(A,n)// n=nombre de lignes et de colonnes de A
    k=1;
    B=A;
    while sum(abs(B))>0
        k=?;
        B=?;
    end;
endfunction
```

- a) Expliquer en détail la ligne de code « `while sum(abs(B))>0` » .
- b) Compléter le code de la fonction « `indnilp` » .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice,  $X$  désigne une variable aléatoire à densité, possédant une espérance  $E(X)$  et une variance  $V(X)$ . Les autres variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  que  $X$ .

1. a) Question de cours : inégalité de Markov.

Si  $X$  est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout réel  $c$  strictement positif :

$$P([X \geq c]) \leq \frac{E(X)}{c}.$$

- b) Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ .

- i) Pour tout réel strictement positif  $b$ , justifier l'inégalité :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E((X - E(X) + b)^2)}{(a + b)^2}.$$

Soit  $b > 0$ .

$$P([X \geq E(X) + a]) = P([X - E(X) + b \geq a + b]) \leq P([(X - E(X) + b)^2 \geq (a + b)^2])$$

d'où, grâce à l'inégalité de Markov :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E((X - E(X) + b)^2)}{(a + b)^2}.$$

- ii) En appliquant le résultat précédent à  $b = V(X)/a$ , établir l'inégalité :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

Pour  $b = V(X)/a$ , on obtient :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E((X - E(X) + V(X)/a)^2)}{(a + V(X)/a)^2} = \frac{V(X) + (V(X))^2/a^2}{a^2(1 + V(X)/a^2)^2} = \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

2. On appelle *médiane* de  $X$  tout nombre réel  $m$  tel que  $P([X \leq m]) = \frac{1}{2}$ .

- a) Justifier que  $X$  admet au moins une médiane et que l'ensemble des médianes de  $X$  est un segment de  $\mathbb{R}$ .

La fonction de répartition  $F : x \mapsto P([X \leq x])$  étant continue sur  $\mathbb{R}$  (puisque  $X$  est une variable aléatoire à densité), de limite 0 en  $-\infty$  et 1 en  $+\infty$ , le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que, pour tout réel  $y$  strictement compris entre 0 et 1, il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = y$ .

En particulier, il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $P([X \leq m]) = \frac{1}{2}$ .

Soit  $I$  l'ensemble (non vide) des réels  $x$  tels que  $F(x) = \frac{1}{2}$ .

- $I$  est un *intervalle*, parce que, quels que soient  $(a, b) \in I^2$ , tous les réels  $x$  compris entre  $a$  et  $b$  appartiennent à  $I$  (puisque la fonction croissante  $F$  prend la même valeur en  $a$  et en  $b$ ).
  - $I = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) = 1/2\}$  est une partie *fermée* de  $\mathbb{R}$ , puisque  $F$  est continue.
  - $I$  est une partie *bornée* de  $\mathbb{R}$ , puisque, par exemple, pour  $q_1$  et  $q_3$  choisis tels que  $F(q_1) = 1/4$  et  $F(q_3) = 3/4$ , l'intervalle  $I$  est inclus dans  $]q_1, q_3[$ , donc borné.
- Par conséquent,  $I$  est un *segment* (intervalle fermé borné) de  $\mathbb{R}$ .

b) Dans cette question, on note  $m$  une médiane de  $X$  et on suppose que  $m$  est supérieure ou égale à  $E(X)$ . On note  $\sigma(X)$  l'écart-type de  $X$ .

Déduire de l'inégalité prouvée en 1.b.ii, appliquée à  $a = m - E(X)$ , que  $m - E(X)$  est inférieur ou égal à  $\sigma(X)$ .

Par application de l'inégalité 1.b.ii, appliquée à  $a = m - E(X)$ , on obtient

$$\frac{1}{2} = P([X \geq m]) \leq \frac{V(X)}{V(X) + (m - E(X))^2}$$

d'où  $V(X) + (m - E(X))^2 \leq 2V(X)$ , puis :  $m - E(X) \leq \sigma(X)$ .

c) Justifier que toute médiane  $m$  de  $X$  vérifie l'inégalité :  $\frac{|m - E(X)|}{\sigma(X)} \leq 1$ .

D'après ce qui précède, l'inégalité demandée est vraie lorsque  $m \geq E(X)$  ( $\sigma(X)$  est strictement positif, puisque la variable aléatoire  $X$  possède une densité).

Dans le cas où  $m \leq E(X)$ , il suffit d'appliquer le résultat précédent à la variable aléatoire  $-X$ , dont  $-m$  est une médiane, pour obtenir l'inégalité demandée.

3. Pour tout entier  $n \geq 2$ , on note  $X_n$  une variable aléatoire admettant pour densité la fonction  $f_n$  définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/n \\ n/2 & \text{si } -1/n \leq x < 0 \\ 1/(2(n-1)) & \text{si } 0 \leq x < 1 - 1/n \\ (n-1)/2 & \text{si } 1 - 1/n \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

a) Trouver l'unique médiane de  $X_n$ .

La fonction de répartition  $F_n$  de  $X_n$  est donnée par :<sup>1</sup>

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/n \\ (nx+1)/2 & \text{si } -1/n \leq x < 0 \\ 1/2 + x/(2(n-1)) & \text{si } 0 \leq x < 1 - 1/n \\ 1 + (n-1)(x-1)/2 & \text{si } 1 - 1/n \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

L'unique médiane  $m_n$  de  $X_n$  est 0.

b) Justifier la convergence en loi de la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

---

1. Un dessin sera apprécié.

- Pour tout  $x < 0$ ,  $F_n(x)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, puisque, pour  $n$  assez grand, on a  $x < -1/n$  (d'où  $F_n(x) = 0$ ).
- Pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $F_n(x)$  tend vers  $1/2$  quand  $n$  tend vers l'infini, puisque, pour  $n$  assez grand, on a  $0 \leq x < -1/n$  (d'où  $F_n(x) = 1/2 + x/(2(n-1))$ ), qui tend vers  $1/2$  quand  $n$  tend vers l'infini).
- Pour tout  $x \geq 1$ ,  $F_n(x) = 1$ .

En résumé, quand  $n$  tend vers l'infini,  $F_n(x) \rightarrow G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ .

La suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge donc en loi vers une (toute) variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(1/2)$ .<sup>2</sup>

c) Quelle propriété du majorant trouvé en 2.c peut-on déduire des limites de  $E(X_n)$  et  $V(X_n)$  quand  $n$  tend vers l'infini ?

La limite en loi de la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  permet de faire la conjecture que  $E(X_n)$  et  $V(X_n)$  tendent respectivement vers  $1/2$  et  $1/4$  quand  $n$  tend vers l'infini. Une fois établies ces convergences, on pourra affirmer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|m_n - E(X_n)|}{\sigma(X_n)} = 1$$

ce qui prouvera que le majorant trouvé en 2.c est optimal.

Pour déterminer effectivement les limites des moments des  $X_n$ , une méthode efficace consiste à écrire la densité  $f_n$  comme la moyenne pondérée de trois densités de lois uniformes, dont l'espérance et la variance sont connues :

$$f_n = \frac{1}{2} g_n + \frac{1}{2n} h_n + \frac{(n-1)}{2n} k_n$$

où  $g_n$ ,  $h_n$  et  $k_n$  sont des densités respectives des lois uniformes sur  $[-1/n, 0]$ ,  $[0, 1 - 1/n]$  et  $[1 - 1/n, 1]$ .

On déduit de cette décomposition les expressions de  $E(X_n)$  et  $E(X_n^2)$ , et leurs limites.

$$E(X_n) = \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{2n} \right) + \frac{1}{2n} \left( \frac{n-1}{2n} \right) + \frac{(n-1)}{2n} \left( \frac{2n-1}{2n} \right)$$

tend vers  $1/2$  quand  $n$  tend vers l'infini.

De même, comme les espérances des carrés des trois lois uniformes de la décomposition tendent respectivement vers 0,  $1/3$  et 1, leur moyenne pondérée par les coefficients  $1/2$ ,  $1/(2n)$  et  $(n-1)/(2n)$ , qui est égale à  $E(X_n^2)$ , tend vers  $1/2$  quand  $n$  tend vers l'infini. On a donc bien :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(X_n) = \sqrt{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Finalement, la borne supérieure des quotients  $\frac{|m - E(X)|}{\sigma(X)}$  pour les variables aléatoires  $X$  à densité possédant un moment d'ordre deux est bien égale à 1. Il n'existe pas de majorant strictement plus petit de tous ces quotients.

2. L'étude de la convergence de la suite  $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  pour  $x = 0$  et  $x = 1$  était en fait inutile puisque 0 et 1 sont les points de discontinuité de la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{B}(1/2)$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. a) Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Démontrer que la seule matrice nilpotente et diagonalisable de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est la matrice nulle.

Soit  $A$  une matrice nilpotente et diagonalisable de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Comme  $A$  est nilpotente, il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $X^k$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Dès lors, la seule valeur propre possible de  $A$  est 0.

Comme  $A$  est diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle, donc nulle.

2. On appelle *indice de nilpotence* d'une matrice nilpotente  $M$  le plus petit entier strictement positif  $k$  tel que  $M^k$  est la matrice nulle.

La fonction *Scilab* suivante, dont le code est incomplet, permet de calculer l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.

```
function k=indnilp(A,n)// n=nombre de lignes et de colonnes de A
    k=1;
    B=A;
    while sum(abs(B))>0
        k=?;
        B=?;
    end;
endfunction
```

- a) Expliquer en détail la ligne de code « `while sum(abs(B))>0` » .

« `abs(B)` » est une matrice dont chaque coefficient est égal à la valeur absolue du coefficient correspondant de la matrice  $B$ .

La condition d'arrêt de la boucle « `while` » est donc que  $B$  soit la matrice nulle.

- b) Compléter le code de la fonction « `indnilp` » .

```
function k=indnilp(A,n)// n=nombre de lignes et de colonnes de A
    k=1;
    B=A;
    while sum(abs(B))>0
        k=k+1;
        B=A*B;
    end;
endfunction
```

L'incréméntation du compteur  $k$  cessera dès que la matrice  $B = A^k$  est nulle, et la valeur finale de  $k$ , en sortie de boucle, sera égale à l'indice de nilpotence de  $A$ .

## EXERCICE PRINCIPAL

## 1. Question de cours.

Formule de Taylor avec reste intégral et cas particulier d'une fonction polynomiale.

Soit  $n$  un nombre entier supérieur ou égal à 2.

On considère un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , ainsi qu'une famille  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  d'événements attachés à cet espace.

On note  $I$  l'ensemble des indices  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  pour lesquels l'événement  $A_i$  est réalisé et on désigne par  $N$  le nombre, aléatoire, d'éléments de  $I$ .

Pour chaque  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on pose :

$$s_p = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_p})$$

et l'on convient de poser  $s_0 = 1$ .

Pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $1_{A_i}$  la variable indicatrice de l'événement  $A_i$ , c'est-à-dire l'application définie sur  $\Omega$  par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad 1_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Exprimer  $N$  à l'aide des variables indicatrices  $1_{A_i}$  et en déduire que  $N$  est une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .3. Soit  $p$  un nombre entier compris entre 1 et  $n$ .

a) Justifier l'égalité :

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} 1_{A_{i_1}} 1_{A_{i_2}} \dots 1_{A_{i_p}} = \frac{N(N-1) \dots (N-p+1)}{p!}.$$

b) En déduire que :  $s_p = \frac{E(N(N-1) \dots (N-p+1))}{p!}.$

## 4. En utilisant une formule de Taylor, justifier l'égalité :

$$\sum_{k=0}^n P([N = k]) X^k = \sum_{p=0}^n s_p (X-1)^p.$$

5. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

a) Trouver une expression de  $P([N = k])$  en fonction de  $s_k, \dots, s_n$ .

b) Démontrer l'égalité :

$$P([N \geq k]) = \sum_{p=k}^n (-1)^{p-k} \binom{p-1}{k-1} s_p.$$

c) Quelle expression en déduit-on pour la probabilité de la réunion des événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ?

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Comparer leurs spectres, leurs traces, leurs rangs, ainsi que les dimensions de leurs sous-espaces propres.
2. Sont-elles semblables ?

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

## 1. Question de cours.

Formule de Taylor avec reste intégral et cas particulier d'une fonction polynomiale.

Si une fonction  $f$  est de classe  $C^{n+1}$  sur un intervalle  $I$ , alors, pour tout couple  $(a, x)$  de points distincts de  $I$ , on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt .$$

Pour un polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n$ , le reste intégral disparaît et on obtient l'égalité :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k .$$

On considère un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , ainsi qu'une famille  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  d'événements attachés à cet espace.

On note  $I$  l'ensemble des indices  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  pour lesquels l'événement  $A_i$  est réalisé et on désigne par  $N$  le nombre, aléatoire, d'éléments de  $I$ .

Pour chaque  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on pose :

$$s_p = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_p})$$

et l'on convient de poser  $s_0 = 1$ .

Pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $1_{A_i}$  la variable indicatrice de l'événement  $A_i$ , c'est-à-dire l'application définie sur  $\Omega$  par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad 1_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

2. Exprimer  $N$  à l'aide des variables indicatrices  $1_{A_i}$  et en déduire que  $N$  est une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

$$N = \sum_{i=1}^n 1_{A_i} .$$

Comme les  $A_i$  sont des éléments de la tribu  $\mathcal{A}$ , les  $1_{A_i}$  sont des variables aléatoires réelles sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et il en est de même de leur somme.

3. Soit  $p$  un nombre entier compris entre 1 et  $n$ .

a) Justifier l'égalité :

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} 1_{A_{i_1}} 1_{A_{i_2}} \dots 1_{A_{i_p}} = \frac{N(N-1) \dots (N-p+1)}{p!} .$$

Soit  $\omega \in \Omega$ .

Comme  $1_{A_{i_1}}(\omega) \dots 1_{A_{i_p}}(\omega)$  est égal à 1 si, et seulement si,  $\omega$  appartient à chacun des événements  $A_{i_1}, \dots, A_{i_p}$ , c'est-à-dire si, et seulement si,  $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$  est une partie à  $p$  éléments de l'ensemble  $I(\omega)$ , la somme

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} 1_{A_{i_1}}(\omega) \dots 1_{A_{i_p}}(\omega)$$

est donc égale au nombre de parties à  $p$  éléments de l'ensemble  $I(\omega)$ , c'est-à-dire à :

$$\binom{N(\omega)}{p} = \frac{N(\omega)(N(\omega)-1) \dots (N(\omega)-p+1)}{p!} .$$

Par conséquent :

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} 1_{A_{i_1}} 1_{A_{i_2}} \dots 1_{A_{i_p}} = \frac{N(N-1) \dots (N-p+1)}{p!} .$$

b) En déduire que :  $s_p = \frac{E(N(N-1) \dots (N-p+1))}{p!} .$

Comme  $E(1_{A_{i_1}} 1_{A_{i_2}} \dots 1_{A_{i_p}}) = P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_p})$ , on obtient, par linéarité de l'espérance :

$$\frac{E(N(N-1) \dots (N-p+1))}{p!} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_p}) = s_p .$$

En utilisant une formule de Taylor, justifier l'égalité :

4. 
$$\sum_{k=0}^n P([N = k]) X^k = \sum_{p=0}^n s_p (X-1)^p .$$

La formule de Taylor (voir question de cours), appliquée au polynôme  $G = \sum_{k=0}^n P([N = k]) X^k$  (au point 1 et à l'ordre  $n$ ), s'écrit :

$$G = \sum_{p=0}^n \frac{G^{(p)}(1)}{p!} (X-1)^p .$$

Comme  $G_N^{(0)}(1) = G_N(1) = 1 = s_0$  et comme, pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$G_N^{(p)}(1) = \sum_{k=0}^n P([N = k]) k(k-1) \dots (k-p+1) 1^{k-p} = E(N(N-1) \dots (N-p+1)) ,$$

l'égalité demandée en résulte directement.

5. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

a) Trouver une expression de  $P([N = k])$  en fonction de  $s_k, \dots, s_n$ .

Du résultat précédent, on déduit par la formule du binôme et par interversion des symboles de sommation, les égalités

$$G_N = \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} s_p X^k = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{p=k}^n (-1)^{p-k} \binom{p}{k} s_p \right) X^k$$

puis par identification du coefficient de  $X^k$  dans le polynôme  $G$

$$P([N = k]) = \sum_{p=k}^n (-1)^{p-k} \binom{p}{k} s_p.$$

b) Démontrer l'égalité :  $P([N \geq k]) = \sum_{p=k}^n (-1)^{p-k} \binom{p-1}{k-1} s_p$ .

$$P([N \geq k]) = \sum_{p=k}^n P([N = p]) = \sum_{p=k}^n \left( \sum_{i=k}^p (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \right) s_p$$

d'où la formule demandée, par télescopage, grâce aux égalités pascaliennes

$$(-1)^{p-i} \binom{p}{i} = (-1)^{p-i} \binom{p-1}{i} - (-1)^{p-(i-1)} \binom{p-1}{i-1}.$$

c) Quelle expression en déduit-on pour la probabilité de la réunion des événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ?

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(N \geq 1) = \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} s_p.$$

Il s'agit de la formule du crible, au programme pour  $n = 2$  et  $n = 3$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Comparer leurs spectres, leurs traces, leurs rangs, ainsi que les dimensions de leurs sous-espaces propres.

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B) = \{0\}$$

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 0$$

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(B) = 2$$

$$\dim(E_0)(A) = \dim(E_0)(B) = 4 - 2 = 2$$

2. Sont-elles semblables ?

Non, puisque  $A^2 \neq 0$  et  $B^2 = 0$ .

## EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice,  $n$  et  $N$  désignent des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Question de cours.

Donner la définition d'une forme linéaire. Quel lien existe-t-il entre formes linéaires et hyperplans ?

2. On note  $H_n$  l'ensemble des matrices de trace nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- a) Justifier que  $H_n$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et donner sa dimension.  
b) Trouver un supplémentaire de  $H_n$ .

3. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $N$  et  $f$  une forme linéaire sur  $E$ .

- a) Justifier que, pour toute forme linéaire  $g$  sur  $E$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1) \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, f = \lambda g \qquad (2) \quad \text{Ker } g \subset \text{Ker } f \quad .$$

- b) Démontrer par récurrence sur  $p$  que, si  $g_1, \dots, g_p$  sont des formes linéaires sur  $E$  telles que  $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } g_i \subset \text{Ker } f$ , alors :  $f \in \text{Vect} \{g_1, \dots, g_p\}$ .

- c) On suppose ici :  $n < N$ .

En utilisant le théorème de la base incomplète, justifier que, si  $g_1, g_2, \dots, g_n$  sont des formes linéaires sur  $E$  linéairement indépendantes, alors :

$$\dim \left( \bigcap_{j=1}^n \text{Ker } g_j \right) = N - n \quad .$$

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

On note  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \leq \sqrt{2\pi}(1 - \Phi(x)) \leq \left(\frac{1}{x}\right) e^{-x^2/2}.$$

2. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Trouver la limite de la probabilité conditionnelle  $P_{[X \geq x]}([X \geq x + \frac{1}{x}])$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice,  $n$  et  $N$  désignent des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2.

Question de cours.

1. Donner la définition d'une forme linéaire. Quel lien existe-t-il entre les formes linéaires et les hyperplans ?

- On appelle forme linéaire sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .
- Les hyperplans de  $E$  sont les noyaux des formes linéaires non (identiquement) nulles sur  $E$ .

Remarque

Dans le programme des classes préparatoires commerciales, les hyperplans ne sont définis que pour les espaces vectoriels de dimension finie.

2. On note  $H_n$  l'ensemble des matrices de trace nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- a) Justifier que  $H_n$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et donner sa dimension.

La trace étant une forme linéaire non (identiquement) nulle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , son noyau  $H_n$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$$\dim(H_n) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - 1 = n^2 - 1.$$

- b) Trouver un supplémentaire de  $H_n$ .

L'ensemble  $\text{Vect}\{I_n\}$  des matrices scalaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un supplémentaire de  $H_n$  :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H_n \oplus \text{Vect}\{I_n\}$$

puisque  $H_n \cap \text{Vect}\{I_n\} = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$  et que toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  se décompose comme la somme d'une matrice de  $H_n$  et d'une matrice scalaire :

$$M = (M - \text{Tr}(M)I_n) + \text{Tr}(M)I_n.$$

Remarque

Les supplémentaires de  $H_n$  sont les droites vectorielles engendrées par une matrice de trace non nulle.

3. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $N$  et  $f$  une forme linéaire sur  $E$ .

- a) Justifier que, pour toute forme linéaire  $g$  sur  $E$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
 

(1)  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, f = \lambda g$ 
(2)  $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$

- L'implication (1)  $\implies$  (2) est immédiate puisque si  $f = \lambda g$  et  $x \in \text{Ker } g$ , alors :

$$f(x) = \lambda g(x) = 0.$$

• Pour démontrer l'implication (2)  $\implies$  (1), on suppose l'inclusion  $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$ .

1) Si  $f$  est (identiquement) nulle, on a  $f = \lambda g$  pour  $\lambda = 0$ .

2) Sinon, il existe un vecteur  $x_0$  tel que  $g(x_0) \neq 0$ , puisque  $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f \neq E$ .

Comme  $\text{Ker } g$  est un hyperplan de  $E$  et  $x_0 \notin \text{Ker } g$ , la droite  $\text{Vect}\{x_0\}$  est un supplémentaire de cet hyperplan :

$$E = \text{Ker } g \oplus \text{Vect}\{x_0\}.$$

Soit  $x$  un vecteur de  $E$  et  $y + \alpha_x x_0$  son unique décomposition comme la somme d'un élément  $y$  de  $\text{Ker } g$  et d'un élément de la droite  $\text{Vect}\{x_0\}$ .

Comme  $f(x) = f(y) + \alpha_x f(x_0) = \alpha_x f(x_0)$  et  $g(x) = g(y) + \alpha_x g(x_0) = \alpha_x g(x_0)$  (puisque  $f(y) = g(y) = 0$ ), on a :

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g(x).$$

Par conséquent,  $f = \lambda g$  pour  $\lambda = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ .

b) Démontrer par récurrence sur  $p$  que, si  $g_1, \dots, g_p$  sont des formes linéaires sur  $E$  telles que  $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } g_i \subset \text{Ker } f$ , alors :  $f \in \text{Vect}\{g_1, \dots, g_p\}$ .

La propriété est vraie pour  $p = 1$ , quels que soient l'espace vectoriel  $E$  de dimension finie et la forme linéaire  $f$  sur  $E$ , d'après le résultat de la question précédente, les cas où la dimension de  $E$  serait égale à 0 ou à 1 étant immédiats.

On suppose que, sur tout espace vectoriel de dimension finie, la propriété est vraie pour un entier  $p \in \mathbb{N}^*$  (hypothèse de récurrence) et on considère  $p + 1$  formes linéaires  $g_1, \dots, g_{p+1}$  telles

que  $\bigcap_{i=1}^{p+1} \text{Ker } g_i \subset \text{Ker } f$ .

On note  $v_1, \dots, v_p$  et  $u$  les restrictions de  $g_1, \dots, g_p$  et  $f$  à  $\text{Ker } g_{p+1}$ .

$$\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } v_i = \bigcap_{i=1}^p (\text{Ker } g_i \cap \text{Ker } g_{p+1}) \subset \text{Ker } f \cap \text{Ker } g_{p+1} = \text{Ker } u.$$

Par application de l'hypothèse de récurrence à des formes linéaires sur  $\text{Ker } g_{p+1}$ , il existe  $p$  nombres réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  tels que :

$$u = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i.$$

Il en résulte que le noyau de la forme linéaire  $f - \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i$  contient  $\text{Ker } g_{p+1}$ , et d'après le résultat de la question précédente, qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que :

$$f - \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i = \lambda g_{p+1}.$$

Par conséquent :  $f = \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i + \lambda g_{p+1} \in \text{Vect}\{g_1, \dots, g_{p+1}\}$ , ce qui clôt la récurrence.

c) On suppose ici :  $n < N$ .

En utilisant le théorème de la base incomplète, justifier que, si  $g_1, g_2, \dots, g_n$  sont des formes linéaires sur  $E$  linéairement indépendantes, alors :

$$\dim\left(\bigcap_{j=1}^n \text{Ker } g_j\right) = N - n .$$

Comme la dimension de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  des formes linéaires sur  $E$  est égale à  $N$ , le théorème de la base incomplète permet d'affirmer qu'il existe  $N - n$  formes linéaires  $g_{n+1}, \dots, g_N$  sur  $E$  pour lesquelles  $g_1, g_2, \dots, g_N$  est une base de  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ .

D'après la propriété démontrée en b, toutes les inclusions

$$\bigcap_{j=1}^N \text{Ker } g_j \subset \bigcap_{j=1}^{N-1} \text{Ker } g_j \subset \dots \subset \bigcap_{j=1}^2 \text{Ker } g_j \subset \text{Ker } g_1 \subset E$$

sont strictes, à cause de l'indépendance linéaire de  $g_1, g_2, \dots, g_N$ , qui entraîne qu'aucune de ces formes linéaires ne peut être combinaison linéaire des précédentes.

Il en résulte que la suite, strictement croissante, des dimensions de ces  $N + 1$  sous-espaces vectoriels de  $E$  reliés par inclusion ne peut être que la progression arithmétique  $0, 1, 2, \dots, N$ .

Par conséquent :

$$\dim\left(\bigcap_{j=1}^n \text{Ker } g_j\right) = N - n .$$

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

On note  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a
- $$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \leq \sqrt{2\pi}(1 - \Phi(x)) \leq \left(\frac{1}{x}\right) e^{-x^2/2}.$$

On considère les deux fonctions  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$\forall x > 0, \quad \begin{cases} u(x) = \sqrt{2\pi}(1 - \Phi(x)) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \\ v(x) = \left(\frac{1}{x}\right) e^{-x^2/2} - \sqrt{2\pi}(1 - \Phi(x)) \end{cases}.$$

Elles sont dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$  et on trouve :

$$\forall x > 0, \quad \begin{cases} u'(x) = -\frac{3}{x^4} e^{-x^2/2} < 0 \\ v'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{-x^2/2} < 0 \end{cases}.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$ , on en déduit les deux fonctions  $u$  et  $v$  sont (strictement) positives sur  $\mathbb{R}_+^*$ , ce qui démontre l'encadrement demandé (avec en prime des inégalités strictes).

2. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Trouver la limite de la probabilité conditionnelle  $P_{[X \geq x]}([X \geq x + \frac{1}{x}])$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

$$P_{[X \geq x]}([X \geq x + \frac{1}{x}]) = \frac{1 - \Phi(x + \frac{1}{x})}{1 - \Phi(x)}$$

qui, d'après ce qui précède, est compris entre  $m(x) = \frac{\left(\frac{1}{x+1/x} - \frac{1}{(x+1/x)^3}\right) e^{-(x+1/x)^2/2}}{\left(\frac{1}{x}\right) e^{-x^2/2}}$

$$\text{et } M(x) = \frac{\left(\frac{1}{x+1/x}\right) e^{-(x+1/x)^2/2}}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2}}.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} M(x) = e^{-1}$ , on obtient par encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{[X \geq x]}([X \geq x + \frac{1}{x}]) = e^{-1}.$$

## EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2.

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels, et  $T$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui associe à toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sa transposée  ${}^tM$ .

Pour tout espace vectoriel  $E$ , on note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

Le but de l'exercice est l'étude de l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})); \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(T(M)) = T(f(M)) \right\}.$$

1. a) Question de cours.

Donner la dimension de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E)$  lorsque  $E$  est un espace de dimension finie et en déduire la dimension de  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ .

b) Pourquoi la trace  $\text{Tr}(M)$  de la matrice  $M$  de  $T$  dans une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ne dépend-elle pas de cette base ? Quelle est cette trace ?

2. Trouver une application linéaire dont  $\mathcal{C}$  est le noyau et en déduire que  $\mathcal{C}$  est un espace vectoriel.

3. On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); {}^tS = S\}$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); {}^tA = -A\}$ .

a) Établir que :  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

b) En déduire qu'un endomorphisme  $f$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  appartient à  $\mathcal{C}$  si, et seulement si, les deux sous-espaces  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont stables par  $f$ .

4. a) Déterminer les dimensions respectives de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

b) En déduire l'égalité :

$$\dim(\mathcal{C}) = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}.$$

5. a) Démontrer que l'endomorphisme  $T$  est diagonalisable.

b) Justifier qu'il existe des éléments  $f$  de  $\mathcal{C}$  qui ne sont pas diagonalisables et en donner un exemple.

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $m_1$  et  $m_2$  deux réels tels que  $m_1 < m_2$  et  $\sigma > 0$ .

Soit  $(X_k)_{k \geq 1}$  (*resp.*  $(Y_k)_{k \geq 1}$ ) une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et suivant la loi  $\mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$  (*resp.*  $\mathcal{N}(m_2, \sigma^2)$ )

Pour tout entier  $n$  non nul on pose :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad \overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k.$$

1. À partir d'une étude graphique et sans démonstration, trouver un réel  $a$  tel que :

$$P([X_1 \geq a]) = P([Y_1 \leq a]) .$$

2. Démontrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un réel  $a$  et un entier  $n$ , tels que :

$$P(\overline{X}_n \geq a) = P(\overline{Y}_n \leq a) \quad \text{et} \quad P(\overline{X}_n \geq a) < \epsilon .$$

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice  $n$  désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2.

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels, et  $T$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui associe à toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sa transposée  ${}^tM$ .

Pour tout espace vectoriel  $E$ , on note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

Le but de l'exercice est l'étude de l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) ; \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(T(A)) = T(f(A)) \right\}.$$

1. a) Question de cours.

Donner la dimension de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E)$  lorsque  $E$  est un espace de dimension finie et en déduire la dimension de  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ .

$$\dim(\mathcal{L}(E)) = (\dim(E))^2 \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))) = n^4.$$

- b) Pourquoi la trace  $\text{Tr}(M)$  de la matrice  $M$  de  $T$  dans une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ne dépend-elle pas de cette base ? Quelle est cette trace ?

Deux matrices semblables ayant la même trace, toutes les matrices représentatives d'un même endomorphisme ont la même trace.

En particulier, la trace de toutes les matrices représentatives de  $T$  est la trace de sa matrice dans la base  $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,n})$  des matrices élémentaires, c'est-à-dire  $\boxed{n}$ , puisque sur la diagonale de cette matrice  $n^2 - n$  coefficients sont nuls et  $n$  égaux à 1.

2. Trouver une application linéaire dont  $\mathcal{C}$  est le noyau et en déduire que  $\mathcal{C}$  est un espace vectoriel.

Pour tout  $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ , on note :

$$\varphi(f) = T \circ f - f \circ T.$$

Sa linéarité étant flagrante,  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ , dont le noyau est  $\mathcal{C}$ , qui est par conséquent un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ .

3. On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; {}^tM = M\}$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; {}^tM = -M\}$ .

- a) Établir que :  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

On raisonne classiquement par analyse-synthèse.

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Supposons qu'il existe deux matrices  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  telles que  $M = A + S$ .

On a alors  ${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$ .

Il en résulte que nécessairement on a :  $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$  et  $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ .

Réciproquement si  $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$  et  $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$  alors  ${}^tS = S$  et  ${}^tA = -A$  et  $M = S + A$  d'où le résultat voulu.

b) En déduire qu'un endomorphisme  $f$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  appartient à  $\mathcal{C}$  si, et seulement si, les deux sous-espaces  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont stables par  $f$ .

• Condition suffisante

Soit  $f$  un endomorphisme laissant stables les deux sous-espaces  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$  et  $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ .

$$f(T(M)) = f(S - A) = f(S) - f(A) = {}^t f(S) + {}^t f(A)$$

(puisque  $f(S)$  appartient à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $f(A)$  à  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ), donc :

$$f(T(M)) = T(f(S) + f(A)) = T(f(M))$$

Par conséquent  $f$  appartient à  $\mathcal{C}$ .

• Condition nécessaire

Soit  $f \in \mathcal{C}$ .

Si  $S$  appartient à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , alors  ${}^t(f(S)) = T(f(S)) = f(T(S)) = f(S)$  et donc :

$$f(S) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) .$$

Si  $A$  appartient à  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , alors  ${}^t(f(A)) = T(f(A)) = f(T(A)) = f(-A) = -f(A)$  et donc :

$$f(A) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) .$$

Par conséquent, les deux sous-espaces  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont stables par  $f$ .

4. a) Déterminer les dimensions respectives de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

Ces dimensions sont connues de la plupart des candidat(e)s, mais on en demandera une justification, plus ou moins détaillée, comme celle qui suit ou n'importe quelle variante.

Toute matrice  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  vérifie :

$$A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} (E_{i,j} - E_{j,i})$$

ce qui prouve que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  possède une famille génératrice de cardinal  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Sa dimension est donc au plus égale à  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

De même, toute matrice  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  vérifie :

$$A = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i})$$

ce qui prouve que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  possède une famille génératrice de cardinal  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Sa dimension est donc au plus égale à  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Il en résulte que :

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \geq \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

Comme  $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \leq \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$ , on en déduit que :

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

b) En déduire l'égalité :  $\dim(\mathcal{C}) = \frac{n^2(n^2+1)}{2}.$

L'application linéaire

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \times \mathcal{L}(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \\ f &\longmapsto (f_1, f_2) \end{aligned}$$

où  $f_1$  (resp.  $f_2$ ) désigne la restriction de  $f$  à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  (resp. à  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ) est bijective parce que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires.

Les deux espaces vectoriels  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \times \mathcal{L}(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$  sont donc isomorphes, et leurs dimensions sont égales.

Il en résulte que la dimension de  $\mathcal{C}$  est égale à

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

5. a) Démontrer que l'endomorphisme  $T$  est diagonalisable.

Comme toutes les matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  sont des vecteurs propres de  $T$  (associés à la valeur propre 1) et celles de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  des vecteurs propres de  $T$  (associés à la valeur propre  $-1$ ), l'endomorphisme  $T$  est diagonalisable puisque la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est au moins égale (donc égale) à  $n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ .

- b) Justifier qu'il existe des éléments  $f$  de  $\mathcal{C}$  qui ne sont pas diagonalisables et en donner un exemple.

Comme la dimension de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est strictement supérieure à 1 (puisque  $n \geq 2$ ), il existe des endomorphismes  $g$  de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  qui ne sont pas diagonalisables, à partir desquels on obtient des endomorphismes  $f$  de  $\mathcal{C}$  qui ne sont pas diagonalisables en posant, par exemple :

$$f(M) = g\left(\frac{1}{2}({}^tM + M)\right).$$

Plus spécifiquement l'endomorphisme  $f$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui associe à la matrice élémentaire  $E_{1,1}$  la matrice  $E_{2,2}$  et à toutes les autres matrices élémentaires  $E_{i,j}$  la matrice nulle appartient à  $\mathcal{C}$  et n'est pas diagonalisable (il est nilpotent d'ordre 2).

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $m_1$  et  $m_2$  deux réels tels que  $m_1 < m_2$  et  $\sigma > 0$ .

Soit  $(X_k)_{k \geq 1}$  (*resp.*  $(Y_k)_{k \geq 1}$ ) une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé et suivant la loi  $\mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$  (*resp.*  $\mathcal{N}(m_2, \sigma^2)$ )

Pour tout entier  $n$  non nul on pose :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad \overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k.$$

1. À partir d'une étude graphique et sans démonstration, trouver un réel  $a$  tel que :
- $$P([X_1 \geq a]) = P([Y_1 \leq a]) .$$

Par propriétés de stabilité des lois normales, on a :

$$\overline{X}_n \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \frac{\sigma^2}{n}) \quad \text{et} \quad \overline{Y}_n \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \frac{\sigma^2}{n})$$

Il en résulte que la courbe représentative de  $f_{\overline{Y}_n}$  (densité de  $\overline{Y}_n$ ) s'obtient par translation vers la droite de  $m_2 - m_1$  à partir de la courbe représentative de  $f_{\overline{X}_n}$ .

Par symétrie des courbes il s'en suit que le réel  $a$  recherché est le milieu du segment  $[m_1, m_2]$

soit  $a = \frac{m_1 + m_2}{2} .$

2. Démontrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un réel  $a$  et un entier  $n$ , tels que :
- $$P(\overline{X}_n \geq a) = P(\overline{Y}_n \leq a) \quad \text{et} \quad P(\overline{X}_n \geq a) < \epsilon .$$

Remarque.

Une fois constaté que le même  $a$  que précédemment convient, l'existence d'un tel entier  $n$  se devine graphiquement en observant que lorsque  $n$  augmente la courbe représentative de la densité de  $\overline{X}_n$  devient de plus en plus "pointue" et sa queue de distribution de plus en plus fine...

Soit  $\Phi$  la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 1 - \Phi(t) = \Phi(-t)$$

De plus :

$$\sqrt{n} \frac{\overline{X}_n - m_1}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \frac{\overline{Y}_n - m_2}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Il en résulte que :

$$P(\overline{X}_n \geq a) = P(\sqrt{n} \frac{\overline{X}_n - m_1}{\sigma} \geq \sqrt{n} \frac{a - m_1}{\sigma}) = 1 - \Phi(\sqrt{n} \frac{a - m_1}{\sigma}) = \Phi(-\sqrt{n} \frac{a - m_1}{\sigma})$$

et

$$P(\overline{Y_n} \leq a) = P(\sqrt{n} \frac{\overline{Y_n} - m_2}{\sigma} \leq \sqrt{n} \frac{a - m_2}{\sigma}) = \Phi(\sqrt{n} \frac{a - m_2}{\sigma})$$

On obtient :

$$P(\overline{X_n} \geq a) = P(\overline{Y_n} \leq a) \iff \Phi(-\sqrt{n} \frac{a - m_1}{\sigma}) = \Phi(\sqrt{n} \frac{a - m_2}{\sigma})$$

et la fonction  $\Phi$  réalisant une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, 1[$  :

$$-\sqrt{n} \frac{a - m_1}{\sigma} = \sqrt{n} \frac{a - m_2}{\sigma}$$

d'où :

$$-(a - m_1) = a - m_2$$

Bilan :

$$\boxed{a = \frac{m_1 + m_2}{2}}$$

Par ailleurs,  $a > m_1$  et donc d'après la loi faible des grands nombres on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\overline{X_n} \geq a) = 0$ .

L'existence d'un entier  $n$  vérifiant  $P(\overline{X_n} \geq a) < \epsilon$  en résulte.

## EXERCICE PRINCIPAL

Toutes les variables aléatoires introduites dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

1. Question de cours.

Définition et propriétés des lois  $\gamma$ .

Dans toute la suite de l'exercice,  $\lambda$  désigne un nombre réel strictement positif.

2. Soit  $U$  une variable aléatoire à valeurs dans  $]0, +\infty[$  et suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose :  $X = U^{-1/\lambda}$ .

- a) Vérifier que la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$  est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} e^{-(x^{-\lambda})} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- b) En déduire que  $X$  est une variable aléatoire à densité.

- c) Proposer un script *Scilab* de simulation de la loi de  $X$ .

3. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

- a) Démontrer que  $X$  possède un moment d'ordre  $k$  si, et seulement si,  $k$  est strictement inférieur à  $\lambda$ , et que :

$$\forall k < \lambda, \quad E(X^k) = \Gamma\left(1 - \frac{k}{\lambda}\right)$$

- b) En déduire que, pour tout réel  $a > \frac{1}{2}$ , on a l'inégalité stricte :

$$(\Gamma(a))^2 < \Gamma(2a - 1).$$

4. Soit  $Y$  une variable aléatoire positive, dont la fonction de répartition  $F_Y$  vérifie :

$$1 - F_Y(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{-\lambda}.$$

On considère une suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de  $Y$ .

Enfin et pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit

$$Z_n = n^{-1/\lambda} \text{Sup}(Y_1, \dots, Y_n).$$

Exprimer la fonction de répartition de  $Z_n$  à l'aide de celle de  $Y$  et en déduire que la suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers la variable  $X$  de la question 2.

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  :

$$M = \begin{pmatrix} e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} & 1 \\ e^{4i\pi/3} & 1 & e^{2i\pi/3} \\ 1 & e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la trace et le rang de  $M$ .
2. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

3. Justifier que  $M$  est semblable à la matrice  $M' = \begin{pmatrix} e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} & 1 \\ e^{2i\pi/3} & 1 & e^{4i\pi/3} \\ 1 & e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} \end{pmatrix}.$

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

## 1. Question de cours.

Définition et propriétés des lois  $\gamma$ .

Outre une densité de la loi  $\gamma(\nu)$ , on attendait son espérance et sa variance, ainsi que la propriété de convolution des lois  $\gamma$ .

Dans toute la suite de l'exercice,  $\lambda$  désigne un nombre réel strictement positif.

2. Soit  $U$  une variable aléatoire à valeurs dans  $]0, +\infty[$  et suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

On pose :  $X = U^{-1/\lambda}$ .

Vérifier que la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$  est donnée par :

$$a) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} e^{-(x^{-\lambda})} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme  $X(\Omega)$  est inclus dans  $]0, +\infty[$ ,  $F_X(x)$  est nul pour  $x \leq 0$ .

Pour tout  $x > 0$  :

$$F_X(x) = P([U^{-1/\lambda} \leq x]) = P([U \geq x^{-\lambda}]) = e^{-(x^{-\lambda})}.$$

b) En déduire que  $X$  est une variable aléatoire à densité.

La variable aléatoire  $X$  admet une densité puisque  $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (la continuité à droite en 0 doit être établie) et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en 0 (mais en fait de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ ).

c) Proposer un script *Scilab* de simulation de la loi de  $X$ .

```
lambda=input('lambda=?')
u=grand(1,1,'exp',1);
x=u^(-1/lambda)
```

3. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Démontrer que  $X$  possède un moment d'ordre  $k$  si, et seulement si,  $k$  est strictement inférieur à  $\lambda$ , et que :

$$a) \quad \forall k < \lambda, \quad E(X^k) = \Gamma\left(1 - \frac{k}{\lambda}\right)$$

Par la formule de transfert, on a, sous réserve de convergence,

$$E(X^k) = \int_0^{+\infty} u^{-k/\lambda} e^{-u} du = \Gamma\left(1 - \frac{k}{\lambda}\right).$$

Il en résulte que  $X$  possède un moment d'ordre  $k$  si, et seulement si,  $1 - \frac{k}{\lambda} > 0$  et que ce moment est alors donné par la formule demandée.

b) En déduire que, pour tout réel  $a > \frac{1}{2}$ , on a l'inégalité stricte :

$$(\Gamma(a))^2 < \Gamma(2a - 1) .$$

Lorsque  $\lambda > 2$ , la formule de Koenig-Huygens fournit la variance de  $X$  :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \Gamma\left(1 - \frac{2}{\lambda}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) .$$

Cette variance est strictement positive, puisque  $X$  est une variable à densité, et par conséquent

$$\Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) < \Gamma\left(1 - \frac{2}{\lambda}\right)$$

c'est-à-dire

$$(\Gamma(a))^2 < \Gamma(2a - 1)$$

en posant  $a = 1 - \frac{1}{\lambda}$  (qui est strictement supérieur à  $1/2$  si, et seulement si  $\lambda > 2$ ).

4. Soit  $Y$  une variable aléatoire positive, dont la fonction de répartition  $F_Y$  vérifie :

$$1 - F_Y(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{-\lambda} .$$

On considère une suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de  $Y$ .

Enfin et pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit

$$Z_n = n^{-1/\lambda} \text{Sup}(Y_1, \dots, Y_n) .$$

Exprimer la fonction de répartition de  $Z_n$  à l'aide de celle de  $Y$  et en déduire que la suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers la variable  $X$  de la question 2.

On trouve classiquement :

$$F_{Z_n}(x) = P[\text{Sup}(Y_1, \dots, Y_n) \leq n^{1/\lambda}x] = (F_Y(n^{1/\lambda}x))^n .$$

Pour  $x > 0$ , l'équivalence  $\ln u \sim u - 1$  quand  $u$  tend vers 1 entraîne alors que, lorsque  $n$  tend vers l'infini, on a :

$$\ln F_Y(n^{1/\lambda}x) \sim F_Y(n^{1/\lambda}x) - 1 \sim -\frac{x^{-\lambda}}{n}$$

Dès lors,  $\ln F_{Z_n}(x)$  tend vers  $-x^{-\lambda}$ , ce qui entraîne que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(x) = F_X(x) .$$

Comme de plus  $F_{Z_n}(x) = F_X(x) = 0$  pour tout  $x \leq 0$ , on en déduit que la suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers  $X$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  :  $M = \begin{pmatrix} e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} & 1 \\ e^{4i\pi/3} & 1 & e^{2i\pi/3} \\ 1 & e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} \end{pmatrix}$ .

1. Calculer la trace et le rang de  $M$ .

- La trace de  $M$  est nulle puisque :

$$1 + e^{2i\pi/3} + e^{4i\pi/3} = 0.$$

- Le rang de  $M$  est égal à 1 parce que les colonnes (ou les lignes) de  $M$  sont colinéaires.

2. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

Comme le rang de  $M$  est égal à 1, 0 est une valeur propre de  $M$  et la dimension du sous-espace propre associé égale à 2.

La trace de  $M$  étant nulle, 0 est la seule valeur propre de  $M$ .<sup>1</sup>

Il en résulte que  $M$  n'est pas diagonalisable.

3. Justifier que  $M$  est semblable à la matrice  $M' = \begin{pmatrix} e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} & 1 \\ e^{2i\pi/3} & 1 & e^{4i\pi/3} \\ 1 & e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} \end{pmatrix}$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^3$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) = (e_3, e_2, e_1)$ .

Alors :

- $f(e'_1) = f(e_3) = e_1 + e^{2i\pi/3}e_2 + e^{4i\pi/3}e_3 = e^{4i\pi/3}e'_1 + e^{2i\pi/3}e'_2 + e'_3$
- $f(e'_2) = f(e_2) = e^{4i\pi/3}e_1 + e_2 + e^{2i\pi/3}e_3 = e^{2i\pi/3}e'_1 + e'_2 + e^{4i\pi/3}e'_3$
- $f(e'_3) = f(e_1) = e^{2i\pi/3}e_1 + e^{4i\pi/3}e_2 + e_3 = e'_1 + e^{4i\pi/3}e'_1 + e'_2 + e^{2i\pi/3}e'_3$

et par conséquent :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = M'$ .

Représentant le même endomorphisme dans les deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , les deux matrices  $M$  et  $M'$  sont semblables.

1. Dans une base obtenue en complétant une base du noyau de  $\mathbb{C}^3$  de l'endomorphisme  $f$  canoniquement associé à  $M$ , la matrice de  $f$  est triangulaire et de trace nulle.

## EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours : égalité et inégalités des accroissements finis.  
 b) Justifier, pour tout  $x \leq 0$ , l'inégalité :  $|e^x - 1| \leq |x|$ .

2. Justifier la convergence absolue de l'intégrale  $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ .

On note  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t) dt$ .

3. a) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$  et justifier que  $f$  est monotone.  
 b) Justifier, pour tout  $x \in D_f$ , l'égalité :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} f(x+2).$$

4. a) Établir, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ , l'inégalité :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \int_0^{\pi/2} |\ln(\sin t)| dt.$$

- b) Démontrer que  $f$  est continue.  
 c) Trouver la limite et un équivalent simple de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow -1_+$ .  
 5. a) Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'inégalité :

$$f(n) \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\pi}{2} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

- b) En déduire la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers l'infini.

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère la fonction *Scilab* suivante :

```
function f=bn(N,n,p)
X=grand(N,n,'geom',p);
k=0;
for i=1: N
    Y=sum(X(i,:))
    if Y>=n/p then k=k+1;
    end
end
f=k/N
endfunction
```

1. De quel nombre réel  $\text{bn}(N, 1, 0.4)$  fournit-il une valeur approchée lorsque  $N$  est grand ?
2. Donner une valeur approximative de  $\text{bn}(10000, 10000, 0.4)$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours : égalité et inégalités des accroissements finis.

- Si  $f$  est continue sur un segment  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  et si sa dérivée vérifie l'encadrement  $m \leq f' \leq M$ , alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad a \leq b \Rightarrow m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

- Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  et si sa dérivée vérifie l'inégalité  $|f'| \leq k$ , alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

- b) Justifier, pour tout  $x \leq 0$ , l'inégalité :  $|e^x - 1| \leq |x|$ .

Il suffit d'appliquer la deuxième inégalité des accroissements finis (QC) à la fonction  $\exp$  sur l'intervalle  $I = \mathbb{R}_-$ , dont la valeur absolue de la dérivée est majorée par  $k = 1$ .

2. Justifier la convergence absolue de l'intégrale  $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ .

La fonction  $t \mapsto \ln(\sin t)$  est continue et négative sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  et

$$\ln(\sin t) = \ln(t + o(t)) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) = \ln(t) + o(1) \underset{0}{\sim} \ln(t)$$

Or  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t) dt$  converge donc par comparaison  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$  est convergente.

On note  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t) dt$ .

3. a) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$  et justifier que  $f$  est monotone.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

La fonction  $\varphi : \begin{cases} ]0, \frac{\pi}{2}[ & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto \sin^x(t) = e^{x \ln(\sin t)} \end{cases}$  est continue sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

Comme  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^x$ , l'intégrale  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t) dt$  converge si, et seulement si,  $x > -1$ .

Par conséquent,  $f$  est définie sur  $D_f = ]-1, +\infty[$ .

Si  $-1 < x \leq y$ , alors, pour tout  $t \in ]0, \pi/2]$ ,  $\sin^x(t) \geq \sin^y(t)$  et par conséquent :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^x(t) dt \geq \int_0^{\pi/2} \sin^y(t) dt .$$

La fonction  $f$  est donc décroissante.

b) Justifier, pour tout  $x \in D_f$ , l'égalité :  $f(x) = \frac{x+2}{x+1} f(x+2) .$

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \sin^x(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \sin^x(t) dt \\ &= f(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^x(t) dt \\ &= f(x) - \left[ \frac{\sin^{x+1}(t)}{x+1} \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{x+1}(t)}{x+1} (-\sin t) dt \\ &= f(x) - \frac{1}{x+1} f(x+2) \end{aligned}$$

D'où

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} f(x+2) .$$

4.

a)

Établir, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ , l'inégalité :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \int_0^{\pi/2} |\ln(\sin t)| dt .$$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ .

Pour tout  $t \in ]0, \pi/2]$ , on a :

$$|\sin^x(t) - \sin^y(t)| = |\sin^{\min\{x,y\}}(t)| |\sin^{|x-y|}(t) - 1| \leq e^{|x-y| \ln(\sin t)} - 1 \leq |x - y| |\ln(\sin t)|$$

d'après 1b, puisque  $\ln(\sin t) < 0$ .

Il en résulte, par intégration entre 0 et  $\pi/2$  (possible grâce au résultat de la question 2) que :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \int_0^{\pi/2} |\ln(\sin t)| dt .$$

b) Démontrer que  $f$  est continue.

La majoration précédente entraîne la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et la formule démontrée en 3.b de l'étendre à  $D_f$ .

c) Trouver la limite et un équivalent simple de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow -1_+$ .

Par continuité de  $f$  au point 1, on trouve

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x+2) = f(1) = \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = 1$$

d'où  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$  et

$$f(x) \underset{-1_+}{\sim} \frac{1}{x+1}.$$

Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'inégalité :

5. a) 
$$f(n) \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\pi}{2} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

Par la relation de Chasles

$$f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \sin^n(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) dt + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{\frac{\pi}{2}} dt$$

d'où

$$f(n) \leq \frac{\pi}{2} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\pi}{2} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

b) En déduire la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers l'infini.

$$\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = \left(1 - \frac{1}{2n^{2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)\right)^n$$

tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, puisque son logarithme népérien, équivalent à  $-\frac{n^{1/3}}{2}$ , tend vers  $-\infty$ .

Il en résulte que la suite de terme général  $f(n)$  converge vers 0, et, comme  $f$  est décroissante, que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère la fonction *Scilab* suivante :

```
function f=bn(N,n,p)
X=grand(N,n,'geom',p); // simulation de N fois n var iid G(p)
k=0;
for i=1: N
    Y=sum(X(i,:)) //simulation de la somme de n var iid G(p)
    if Y>=n/p then k=k+1;
        end
end
f=k/N // fr\ '{e}quence des simulations au moins \ '{e}gales \ '{a} n/p
endfunction
```

1. De quel nombre réel  $bn(N, 1, 0.4)$  fournit-il une valeur approchée lorsque  $N$  est grand ?

Pour chaque valeur de  $i$ ,  $Y$  est une simulation d'une variable de Bernoulli dont le paramètre est égal à :

$$P\left(\mathcal{G}(0.4) \geq \frac{1}{0.4}\right) = P(\mathcal{G}(0.4) \geq 3) = \sum_{k=3}^{+\infty} 0.4 \times (1-0.4)^{k-1} = 0.6^2 = 0.36$$

Par la loi des grands nombres,  $bn(N, 1, 0.4)$  sera donc proche de 0.36 pour les grandes valeurs de  $N$ .

2. Donner une valeur approximative de  $bn(10000, 10000, 0.4)$ .

La loi de la somme de  $n = 10000$  variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{G}(p = 0.4)$  coïncide presque exactement avec la loi normale de même espérance ( $n/p = 25000$ ) et de même variance  $n(1-p)/p^2 = 37500$ , dont la probabilité qu'elle excède son espérance est égale à  $1/2$ .

Une valeur approximative de  $bn(10000, 10000, 0.4)$  est donc 0.5.

## EXERCICE PRINCIPAL

## 1. Question de cours.

Énoncer le théorème de transfert pour les variables aléatoires discrètes.

2. a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , justifier la convergence de l'intégrale  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} dt$  et montrer qu'elle est strictement positive.

b) Pour  $s \in \mathbb{R}$ , justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt$  et exprimer sa valeur en fonction de  $I_1$  et de  $|s|$ .

3. a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer à l'aide du changement de variable  $t = \sqrt{\frac{2u}{n}}$ , la convergence de l'intégrale  $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos \sqrt{\frac{2u}{n}})^n}{u\sqrt{u}} du$  et déterminer une relation entre  $J_n$  et  $I_n$ .

b) Établir, pour tout  $(n, u) \in \mathbb{N}^* \times ]0, 1]$ , l'inégalité :

$$\left| 1 - \left( \cos \sqrt{\frac{2u}{n}} \right)^n \right| \leq u.$$

c) Démontrer que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée.

Dans la suite de l'exercice, on considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , qui sont mutuellement indépendantes et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

4. a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E(\cos(t S_n)) = (\cos t)^n$ .  
b) En utilisant les formules trouvées en 2.b et 3.a, exprimer  $E(|S_n|)$  en fonction de  $I_n$  et de  $I_1$ .

5. En déduire l'existence d'un réel positif  $M$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E(|S_n|) \leq M\sqrt{n}$ .

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n \times n$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et soit  $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$ .

1. Démontrer que  $A$  et  $\varphi_A$  ont le même spectre.
2. Comparer, pour chacune de leurs valeurs propres communes, les dimensions des sous-espaces propres correspondants de  $A$  et  $\varphi_A$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

## 1. Question de cours.

Énoncer le théorème de transfert pour les variables aléatoires discrètes.

Soit  $X$  est une variable aléatoire réelle discrète définie sur  $\Omega$  et  $f$  est une application définie sur  $X(\Omega)$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Alors  $f(X)$  est une variable aléatoire réelle discrète et si  $X(\Omega)$  est infini,  $f(X)$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$  est absolument convergente.

Dans le cas où  $f(X)$  admet une espérance, on a l'égalité :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x) .$$

2.

a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , justifier la convergence de l'intégrale  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} dt$  et montrer que  $I_n > 0$ .

- L'application  $f_n : t \mapsto \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Au voisinage de 0,  $(\cos t)^n = (1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2))^n = 1 - n\frac{t^2}{2} + o(t^2)$  donc  $f_n(t) = \frac{n}{2} + o(1)$ ; l'application  $f_n$  est donc prolongeable par continuité en 0 ce qui assure la convergence de l'intégrale  $\int_0^1 f_n(t) dt$ .
- La convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f_n(t) dt$  résulte par exemple du fait que pour tout  $t \geq 1$ ,

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{2}{t^2} .$$

Comme la fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , et différente de la fonction nulle, son intégrale donc  $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$  est strictement positive.

b) Pour  $s \in \mathbb{R}$ , justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt$  et exprimer sa valeur en fonction de  $I_1$  et de  $|s|$ .

- Si  $s > 0$ , l'application  $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $u \mapsto su$  est bijective, strictement croissante et de classe  $C^1$  donc le changement de variable  $t = su$  dans l'intégrale convergente  $I_1$  conduit à une intégrale convergente qui lui est égale.

On en déduit que

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(su)}{s^2 u^2} s du$$

et par conséquent que  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(su)}{u^2} du$  est convergente et égale à  $sI_1$ .

- Par parité de la fonction cosinus, on en déduit que pour tout  $s \in \mathbb{R}^*$ ,  $u \mapsto \frac{1 - \cos(su)}{u^2}$  est d'intégrale convergente sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(su)}{u^2} du = |s| I_1$ .

- Le résultat précédent reste vrai pour  $s = 0$  car les deux membres existent et valent alors 0.

3. a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , , montrer à l'aide du changement de variable  $t = \sqrt{\frac{2u}{n}}$ , la convergence de l'intégrale  $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos \sqrt{\frac{2u}{n}})^n}{u\sqrt{u}} du$  et déterminer une relation entre  $J_n$  et  $I_n$ .

Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'application  $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $u \mapsto \sqrt{\frac{2u}{n}}$  est de classe  $C^1$ , strictement croissante et bijective, donc le changement de variable  $t = \sqrt{\frac{2u}{n}}$  dans l'intégrale convergente  $I_n$  conduit à une intégrale convergente qui lui est égale.

On a donc  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos \sqrt{\frac{2u}{n}})^n}{\frac{2u}{n}} \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \boxed{\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} J_n}$ , et, en particulier, la convergence de l'intégrale  $J_n$ .

- b) Montrer que pour tout  $(n, u) \in \mathbb{N}^* \times ]0, 1]$ ,  $|1 - (\cos \sqrt{\frac{2u}{n}})^n| \leq u$ .

L'application  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto g(u) = (\cos \sqrt{\frac{2u}{n}})^n$  est continue sur  $[0, 1]$ , dérivable sur  $]0, 1]$  et pour tout  $u \in ]0, 1]$ ,

$$g'(u) = n \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{1}{2\sqrt{u}} (-\sin \sqrt{\frac{2u}{n}}) (\cos \sqrt{\frac{2u}{n}})^{n-1} = -\frac{\sin \sqrt{\frac{2u}{n}}}{\sqrt{\frac{2u}{n}}} (\cos \sqrt{\frac{2u}{n}})^{n-1}$$

Or, d'après l'**inégalité des accroissements finis**, puisque la dérivée de la fonction sin est bornée par 1, on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin t| \leq |t|$ .

On en déduit que pour tout  $u \in ]0, 1]$ ,  $|g'(u)| \leq 1$  et, toujours par l'inégalité des accroissements finis

$$\left| 1 - (\cos \sqrt{\frac{2u}{n}})^n \right| = |g(0) - g(u)| \leq |u|.$$

- c) Démontrer que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$|J_n| \leq \int_0^1 \frac{|1 - (\cos \sqrt{\frac{2u}{n}})^n|}{u\sqrt{u}} du + \int_1^{+\infty} \frac{|1 - (\cos \sqrt{\frac{2u}{n}})^n|}{u\sqrt{u}} du \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du + \int_1^{+\infty} \frac{2}{u\sqrt{u}} du = 5.$$

Dans la suite de l'exercice, on considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , qui sont mutuellement indépendantes et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

4. a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E(\cos(t S_n)) = (\cos t)^n$ .

On montre la propriété par récurrence sur  $n$ .

La propriété est vraie pour  $n = 1$  car  $\cos(t S_1)$  est la variable certaine égale à  $\cos t$ .

On suppose ensuite la propriété vraie à l'ordre  $n$ .

Vu que  $\cos(t S_{n+1}) = \cos(t S_n) \cos(t X_{n+1}) - \sin(t S_n) \sin(t X_{n+1})$  et que les variables  $S_n$  et  $X_{n+1}$  sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} E(\cos(t S_{n+1})) &= E(\cos(t S_n))E(\cos(t X_{n+1})) - E(\sin(t S_n))E(\sin(t X_{n+1})) \\ &= (\cos t)^n \cos t - E(\sin(t S_n))E(\sin(t X_{n+1})) \end{aligned}$$

De plus  $E(\sin(t X_{n+1})) = \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \sin(-t) = 0$  donc  $E(\cos(t S_{n+1})) = (\cos t)^{n+1}$ .

- b) En utilisant les formules trouvées en 2.b et 3.a, exprimer  $E(|S_n|)$  en fonction de  $I_n$  et de  $I_1$ .

D'après la question 2.b) et la formule de transfert, on a :

$$E(|S_n|) = \sum_{s \in S_n(\Omega)} P(S_n = s) \frac{1}{I_1} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos su}{u^2} du$$

Par linéarité de l'intégrale sur l'espace vectoriel des fonctions d'intégrale convergente sur  $\mathbb{R}_+^*$  il vient :

$$E(|S_n|) = \frac{1}{I_1} \int_0^{+\infty} \left( \sum_{s \in S_n(\Omega)} P(S_n = s) \frac{1 - \cos su}{u^2} \right) du$$

d'où en utilisant  $\sum_{s \in S_n(\Omega)} P(S_n = s) = 1$  et à nouveau la formule de transfert :

$$E(|S_n|) = \frac{1}{I_1} \int_0^{+\infty} \frac{1 - E(\cos S_n u)}{u^2} du$$

soit, compte-tenu de la question précédente,  $E(|S_n|) = \frac{1}{I_1} \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos u)^n}{u^2} du = \frac{I_n}{I_1}$ .

5. En déduire l'existence d'un réel positif  $M$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E(|S_n|) \leq M \sqrt{n}$ .

D'après 3.a), on a  $E(|S_n|) = \frac{J_n}{2\sqrt{2} I_1} \sqrt{n}$  et d'après 3.b),  $E(|S_n|) \leq M \sqrt{n}$ , pour  $M = \frac{5}{2\sqrt{2} I_1}$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n \times n$ .  
 Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et soit  $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$ .

1. Comparer les spectres de  $A$  et  $\varphi_A$ .

Il faut commencer par souligner que  $\varphi_A$  est bien un endomorphisme. Nous allons montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors c'est aussi une valeur propre de  $\varphi_A$ ; et que si  $\mu$  est une valeur propre de  $\varphi_A$ , c'est aussi une valeur propre de  $A$ .

- S'il existe  $v$  non nul tel que  $Av = \lambda v$ , alors  $M_v = [v \dots v]$  est une matrice non nulle et telle que  $\varphi_A(M_v) = [Av \dots Av] = \lambda[v \dots v] = \lambda M_v$ .

- S'il existe une matrice  $M = [m_1 \dots m_n]$  non nulle telle que  $AM = \varphi_A(M) = \mu M$ , alors l'un des  $m_j$  est un vecteur non nul et vérifiant  $Am_j = \mu m_j$ .

2. Comparer, pour chacune de leurs valeurs propres communes, les dimensions des sous-espaces propres de  $A$  et  $\varphi_A$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $\varphi_A$ .

L'application de  $E_\lambda(A)^n$  dans  $E_\lambda(\varphi_A)$  qui associe à tout  $n$ -uplet  $(v_1, \dots, v_n)$  de vecteurs-colonnes de  $E_\lambda(A)$  la matrice  $[v_1 \dots v_n]$  est un isomorphisme.

La dimension de  $E_\lambda(\varphi_A)$  est donc égale à  $n$  fois la dimension de  $E_\lambda(A)$ .

## EXERCICE PRINCIPAL

## 1. Question de cours

Si  $H$  est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien  $F$ , rappeler la définition de la projection orthogonale  $p_H$  sur  $H$  et, pour  $x \in F$ , donner la caractérisation de  $p_H(x)$  par minimisation d'une norme.

Dans la suite de l'exercice, on considère deux espaces euclidiens  $E$  et  $F$  de dimensions supérieures ou égales à 2. Le produit scalaire sur  $F$  est noté  $(|)$  et la norme associée  $\| \cdot \|$ .

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $v$  un vecteur de  $F$ .

2. a) Justifier l'existence d'un vecteur  $x_0$  de  $E$  tel que :  $\|f(x_0) - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|$ .

Dans la suite, un tel vecteur  $x_0$  sera appelé une pseudo-solution de l'équation  $f(x) = v$ .

- b) Montrer que si  $f$  est injective, l'équation  $f(x) = v$  admet une unique pseudo-solution.

3. Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  deux bases orthonormales de  $E$  et  $F$  respectivement. On appelle  $A$  la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  et  $V$  la matrice de  $v$  dans  $\mathcal{C}$ .

- a) Montrer que  $x_0$  est pseudo-solution de l'équation  $f(x) = v$  si et seulement si pour tout  $x$  de  $E$ ,  $(f(x)|f(x_0) - v) = 0$ .

- b) Soit  $x_0$  un vecteur de  $E$  et  $X_0$  la matrice de  $x_0$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Montrer que  $x_0$  est pseudo-solution de  $f(x) = v$  si, et seulement si,  ${}^t A A X_0 = {}^t A V$ .

- c) Dans cette question on suppose que  $E = F = \mathbb{R}^3$  qu'on munit du produit scalaire usuel.

On suppose que la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et celle

de  $v$  est  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer les pseudo-solutions de  $f(x) = v$ .

4. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$  et  $c = (c_1, \dots, c_n)$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . On souhaite déterminer deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que la somme  $\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$  soit minimale.

- a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation  $f(x) = v$  où  $f$  est un élément de  $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ . Préciser le vecteur  $v$  et donner la matrice de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^n$ .

- b) À quelle condition sur  $a$  et  $b$  l'application  $f$  est-elle injective ?

- c) Lorsque cette condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant  $\lambda$  et  $\mu$  à l'aide de produits scalaires dans  $\mathbb{R}^n$ .

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , justifier la convergence et donner la valeur de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-2x} dx$ .
2. Trouver la limite quand  $n$  tend vers l'infini de  $\frac{2^n}{(n-1)!} \int_{(n+\sqrt{n})/2}^{+\infty} x^{n-1} e^{-2x} dx$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

## 1. Question de cours

Si  $H$  est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien  $F$ , rappeler la définition de la projection orthogonale  $p_H$  sur  $H$  et, pour  $x \in F$ , donner la caractérisation de  $p_H(x)$  par minimisation d'une norme.

On sait que  $H^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  qui est un supplémentaire de  $H$  dans  $F$  et par définition,  $p_H$  est le projecteur de  $F$  qui a pour image  $H$  et pour noyau  $H^\perp$ .

On a pour tout vecteur  $y$  de  $H$ ,  $\|y - x\| \geq \|p_H(x) - x\|$  avec égalité si et seulement si  $y = p_H(x)$  donc  $p_H(x)$  est l'unique vecteur  $z$  de  $H$  tel que  $\|z - x\| = \min_{y \in H} \|y - x\|$ .

Dans la suite de l'exercice, on considère deux espaces euclidiens  $E$  et  $F$  de dimensions supérieures ou égales à 2. Le produit scalaire sur  $F$  est noté  $(\cdot | \cdot)$  et la norme associée  $\| \cdot \|$ .

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $v$  un vecteur de  $F$ .

2.

a)

Justifier l'existence d'un vecteur  $x_0$  de  $E$  tel que :  $\|f(x_0) - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|$ .  
 Dans la suite, un tel vecteur  $x_0$  sera appelé une pseudo-solution de l'équation  $f(x) = v$ .

Notons  $w$  le projeté orthogonal de  $v$  sur  $\text{Im } f$ . Alors  $w \in \text{Im } f$  donc il existe  $x_0 \in E$  tel que  $w = f(x_0)$  et d'après la question de cours,  $\|w - v\| = \min_{z \in \text{Im } f} \|z - v\|$ , autrement dit

$$\|f(x_0) - v\| = \min_{x \in E} \|f(x) - v\|.$$

b)

Montrer que si  $f$  est injective, l'équation  $f(x) = v$  admet une unique pseudo-solution.

L'existence d'une pseudo-solution de  $f(x) = v$  a été justifiée en 2a.

Par ailleurs, d'après le rappel de cours, si  $x_0 \in E$ ,  $x_0$  est pseudo-solution de  $f(x) = v$  si, et seulement si,  $f(x_0)$  est égal au projeté orthogonal  $w$  de  $v$  sur  $\text{Im } f$ .

Si  $f$  est injective, alors l'élément  $w = p_{\text{Im } f}(v)$  de  $\text{Im } f$  possède un unique antécédent par  $f$ , ce qui établit l'unicité d'une pseudo-solution de  $f(x) = v$ .

3. Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  deux bases orthonormales de  $E$  et  $F$  respectivement. On appelle  $A$  la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  et  $V$  la matrice de  $v$  dans  $\mathcal{C}$ .

a)

Montrer que  $x_0$  est pseudo-solution de l'équation  $f(x) = v$  si et seulement si pour tout  $x$  de  $E$ ,  $(f(x) | f(x_0) - v) = 0$ .

Le vecteur  $x_0$  de  $E$  est pseudo-solution de  $f(x) = v$  si et seulement si  $f(x_0) = p_{\text{Im } f}(v)$  ce qui équivaut à  $f(x_0) \in \text{Im } f$  et  $v - f(x_0) \in (\text{Im } f)^\perp$  soit encore à  $\forall y \in \text{Im } f, (y|v - f(x_0)) = 0$  et finalement à  $\forall x \in E, (f(x)|v - f(x_0)) = 0$ .

- b) Soit  $x_0$  un vecteur de  $E$  et  $X_0$  la matrice de  $x_0$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Montrer que  $x_0$  est pseudo-solution de  $f(x) = v$  si, et seulement si, :  ${}^t A A X_0 = {}^t A V$ .

Si  $x \in E$  a pour matrice  $X$  dans la base  $\mathcal{B}$ , la matrice de  $f(x)$  dans la base  $\mathcal{C}$  est égale à  $AX$  et, vu que la base  $\mathcal{C}$  est orthonormée, on a :

$$(f(x)|f(x_0) - v) = {}^t (AX)(AX_0 - V) = {}^t X({}^t A A X_0 - {}^t A V)$$

Notons  $\alpha$  le vecteur de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est égale à  ${}^t A A X_0 - {}^t A V$ .

Alors  $(f(x)|f(x_0) - v)$  est égal au produit scalaire dans  $E$  entre  $x$  et  $\alpha$ .

Dans ces conditions,  $x_0$  est pseudo solution de  $f(x) = v$  si et seulement si  $\alpha$  est orthogonal à tout vecteur de  $E$  ce qui équivaut à dire que  $\alpha$  est le vecteur nul de  $E$  ou encore

$${}^t A A X_0 - {}^t A V = 0.$$

- c) Dans cette question on suppose que  $E = F = \mathbb{R}^3$  qu'on munit du produit scalaire usuel. On suppose que la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et celle de  $v$  est  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer les pseudo-solutions de  $f(x) = v$ .

$${}^t A A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 11 \end{pmatrix} \text{ et } {}^t A V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve que les pseudo-solutions de  $f(x) = v$  sont les vecteurs de la forme  $(\frac{1}{4} - 2z, \frac{1}{4} + z, z)$  avec  $z \in \mathbb{R}$ .

4. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$  et  $c = (c_1, \dots, c_n)$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . On souhaite déterminer deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que la somme  $\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$  soit minimale.

- a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation  $f(x) = v$  où  $f$  est un élément de  $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ . Préciser le vecteur  $v$  et donner la matrice de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^n$ .

Si on munit  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire usuel,  $\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2 = \|\lambda a + \mu b - c\|^2$  ce qui nous conduit à définir  $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$  tel que  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, f(\lambda, \mu) = \lambda a + \mu b$ .

Le problème posé revient alors à chercher les pseudo-solutions de  $f(x) = v$  avec  $v = c$ .

La matrice de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^n$  est  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$ .

b) À quelle condition sur  $a$  et  $b$  l'application  $f$  est-elle injective ?

$f$  est injective si et seulement si  $(a, b)$  est une famille libre.

c) Lorsque cette condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant  $\lambda$  et  $\mu$  à l'aide de produits scalaires dans  $\mathbb{R}^n$ .

$${}^tAA = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a|b) \\ (a|b) & \|b\|^2 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tAV = \begin{pmatrix} (a|c) \\ (b|c) \end{pmatrix}.$$

La solution du problème posé est alors

$$(\lambda, \mu) = \left( \frac{(a|c)\|b\|^2 - (a|b)(b|c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2}, \frac{(b|c)\|a\|^2 - (a|b)(a|c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2} \right).$$

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , justifier la convergence et donner la valeur de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-2x} dx$ .

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-2x} dx = \frac{1}{2^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(n)}{2^n} = \frac{(n-1)!}{2^n}.$$

2. Trouver la limite quand  $n$  tend vers l'infini de  $\frac{2^n}{(n-1)!} \int_{(n+\sqrt{n})/2}^{+\infty} x^{n-1} e^{-2x} dx$ .

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi  $\gamma(1)$ .

$$\frac{2^n}{(n-1)!} \int_{(n+\sqrt{n})/2}^{+\infty} x^{n-1} e^{-2x} dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{n+\sqrt{n}}^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = P([S_n \geq n + \sqrt{n}])$$

où  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  puisque, par la propriété de convolution des lois  $\gamma$ , la variable aléatoire  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  suit la loi  $\gamma(n)$ .

Par le théorème-limite central,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right| \geq 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = 1 - \Phi(1)$

où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

## EXERCICE PRINCIPAL

## 1. Question de cours

Rappeler la définition de la partie entière  $\lfloor x \rfloor$  d'un nombre réel  $x$ . Donner l'allure du graphe de la fonction partie entière et en indiquer les principales propriétés.

2. Soit  $x > 0$ .

a) Justifier que si  $x = M \times 10^n$  avec  $1 \leq M < 10$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , alors nécessairement :

$$n = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 10} \right\rfloor.$$

b) En déduire qu'il existe un unique couple  $(\mathcal{M}(x), k(x)) \in [1, 10[ \times \mathbb{Z}$  tel que :

$$x = \mathcal{M}(x) \times 10^{k(x)}.$$

Le nombre réel  $\mathcal{M}(x)$  est appelé la mantisse de  $x$  et sa partie entière, notée  $\mathcal{C}(x)$ , le premier chiffre significatif de  $x$ .

Par exemple, la mantisse et le premier chiffre significatif de 0,0351 sont respectivement égaux à 3,51 et 3 ; ceux de 6492,253 sont 6,492253 et 6.

3. On appelle *loi de Benford* la loi de  $B = 10^U$ , où  $U$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1[$ .

a) Montrer que cette loi admet une densité, que l'on calculera.

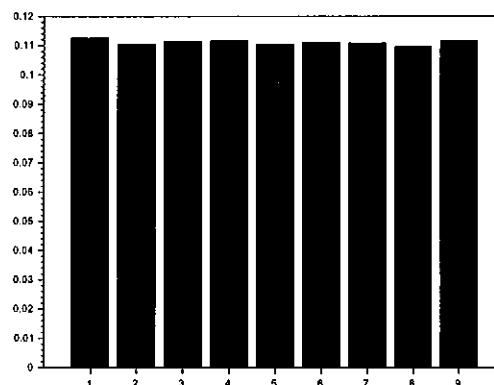
b) Déterminer l'espérance de cette loi.

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $\lfloor B \rfloor$  lorsque  $B$  suit la loi de Benford.

4. On considère maintenant un entier  $k_0 \in \mathbb{Z}$  et une variable aléatoire  $Y$  de loi uniforme sur  $]0, 10^{k_0}[$ . Identifier les lois de  $\mathcal{M}(Y)$  et de  $\mathcal{C}(Y)$ .

## 5. On considère le code Scilab suivant, qui crée l'image de droite.

```
n = 10^5;
M = 10*rand(1,n);
C = floor(M./10.^floor(log(M)/log(10)));
H = tabul(C);
bar(H(:,1),H(:,2)/n);
```



a) Expliquer la signification du code et ce qu'il illustre.

b) Expliquer comment on pourrait modifier le code précédent pour calculer des réalisations de  $\mathcal{M}(B)$  et de  $\mathcal{C}(B)$ .

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On note  $H$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les trois polynômes  $(X-1)(X-2)(X-4)$ ,  $(X-1)(X-3)(X-4)$  et  $(X-2)(X-3)(X-4)$ .

1.
  - a) Justifier que  $H$  est un hyperplan de  $E$ .
  - b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à  $H$ . Est-elle unique?
2. On considère le produit scalaire sur  $E$  défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4) .$$

Calculer, pour tout polynôme  $P \in E$ , la projection orthogonale de  $P$  sur  $H^\perp$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

## 1. Question de cours

Rappeler la définition de la partie entière  $\lfloor x \rfloor$  d'un nombre réel  $x$ . Donner l'allure du graphe de la fonction partie entière et en indiquer les principales propriétés.

La partie entière de  $x$  est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ . Elle est donc caractérisée par :

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \end{cases}.$$

La fonction partie entière est croissante au sens large, continue à droite sur  $\mathbb{R}$  et continue en tout point non entier.

2. Soit  $x > 0$ .

Justifier que si  $x = M \times 10^n$  avec  $1 \leq M < 10$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , alors nécessairement :

a) 
$$n = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 10} \right\rfloor.$$

Comme  $x = M \times 10^n$ , on a les équivalences

$$1 \leq M < 10 \iff 10^n \leq x < 10^{n+1} \iff n \leq \frac{\ln x}{\ln 10} < n+1$$

ce qui entraîne l'égalité  $n = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 10} \right\rfloor$ , puisque  $n$  est entier.

En déduire qu'il existe un unique couple  $(\mathcal{M}(x), k(x)) \in [1, 10[ \times \mathbb{Z}$  tel que :

b) 
$$x = \mathcal{M}(x) \times 10^{k(x)}.$$

La question précédente peut être considérée comme le début d'une analyse, dont la fin (le calcul de  $\mathcal{M}$  en fonction de  $x$ ) est immédiate et la synthèse facile.

3. On appelle *loi de Benford* la loi de  $B = 10^U$ , où  $U$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1[$ .

a) Montrer que cette loi admet une densité, que l'on calculera.

On calcule tout d'abord la fonction de répartition : pour  $x \in [1, 10]$ ,

$$F(x) = P(10^U \leq x) = P\left(U \leq \frac{\ln(x)}{\ln(10)}\right) = \frac{\ln x}{\ln 10},$$

et  $F$  vaut 0 avant 1 et 1 après 10. Cette fonction  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  d'une part,  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  privé de 0 et 1 d'autre part, ce qui prouve que  $B$  admet une densité  $f$ , obtenue par dérivation

(là où celle-ci est possible) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln 10} & \text{si } 1 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

b) Déterminer l'espérance de cette loi.

Par théorème de transfert,

$$E(B) = E[10^U] = \int_1^{10} x \frac{1}{x \ln 10} dx = \frac{9}{\ln 10} \approx 3,91 .$$

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $\lfloor B \rfloor$  lorsque  $B$  suit la loi de Benford.

La variable aléatoire  $\lfloor B \rfloor$  prend ses valeurs dans  $\{1, 2, \dots, 9\}$  : pour  $j$  dans cet ensemble,

$$P(\lfloor B \rfloor = j) = P(B \in [j, j+1[) = \int_j^{j+1} \frac{1}{x \ln 10} dx = \frac{1}{\ln 10} (\ln(j+1) - \ln(j)) .$$

4. On considère maintenant un entier  $k_0 \in \mathbb{Z}$  et une variable aléatoire  $Y$  de loi uniforme sur  $]0, 10^{k_0}[$ .

Identifier les lois de  $\mathcal{M}(Y)$  et de  $\mathcal{C}(Y)$ .

On note tout d'abord que  $\mathcal{M}(Y)$  prend ses valeurs dans  $[1, 10[$  et  $\mathcal{C}(Y)$  dans  $\{1, 2, \dots, 9\}$ .

On considère le système complet des événements  $A_k = [10^{k-1} \leq Y < 10^k]$  pour les entiers relatifs  $k \leq k_0$ .

On obtient, pour tout  $x \in [1, 10[$  :

$$\begin{aligned} P(\mathcal{M}(Y) \leq x) &= \sum_{k=-\infty}^{k_0} P(A_k \cap \{\mathcal{M}(Y) \leq x\}) = \sum_{k=-\infty}^{k_0} P([10^{k-1} \leq Y < x \times 10^{k-1}]) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k_0} \frac{(x-1) 10^{k-1}}{10^{k_0}} = \frac{(x-1)}{10^{k_0}} \sum_{k=-\infty}^{k_0} 10^{k-1} \\ &= \frac{(x-1)}{10^{k_0}} \left( 10^{k_0-1} \sum_{j \geq 0} 10^{-j} \right) = \frac{x-1}{10} \frac{1}{1-1/10} \\ &= \frac{x-1}{9} . \end{aligned}$$

La variable aléatoire  $\mathcal{M}(Y)$  suit donc la loi uniforme sur  $[1, 10[$ .

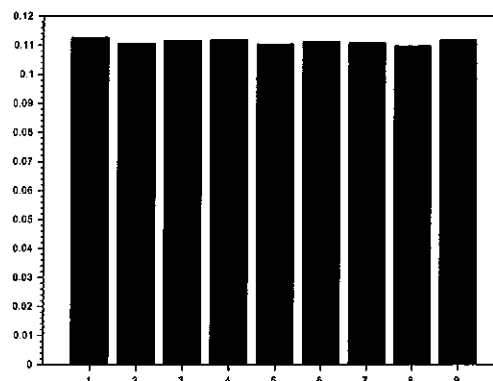
On en déduit que pour  $j \in \{1, 2, \dots, 9\}$ ,

$$P(\mathcal{C}(Y) = j) = P(\mathcal{M}(Y) \in [j, j+1[) = \frac{1}{9} ,$$

c'est-à-dire que  $\mathcal{C}(Y)$  suit la loi uniforme sur  $\{1, 2, \dots, 9\}$ .

5. On considère le code Scilab suivant, qui crée l'image de droite.

```
N = 10^5;
Y = 10*rand(1,N);
C = floor(Y./10.^floor(log(Y)/log(10)));
H = tabul(C);
bar(H(:,1),H(:,2)/n);
```



a) Expliquer la signification du code et ce qu'il illustre.

La ligne 2 simule  $N = 10^5$  variables aléatoires  $Y_1, \dots, Y_N$  indépendantes et identiquement distribuées selon la loi uniforme sur  $[0, 10[$ .

La ligne 3 extrait les mantisses  $Y./10.^{\text{floor}(\log(Y)/\log(10))}$  de ces  $N$  nombres, desquelles on prend ensuite les parties entières pour avoir les premiers chiffres significatifs.

Exemple (N=5)

```
--> Y = 10*rand(1,5)
Y = 9.1847078    0.4373343    4.8185089    2.639556    4.1481037
--> C = floor(Y./10.^floor(log(Y)/log(10)))
C = 9.    4.    4.    2.    4.
```

La ligne 4 regroupe les  $Y_i$  par valeurs distinctes et calcule les effectifs associés.

Exemple (suite)

```
--> H = tabul(C)
H = 9.    1.
     4.    3.
     2.    1.
```

La ligne 5 trace le diagramme en bâtons de la distribution empirique des  $Y_i$ .

Le diagramme confirme l'uniformité de la distribution de  $\mathcal{C}(Y)$  (dans le cas où  $k_0 = 1$ ).

b) Expliquer comment on pourrait modifier le code précédent pour calculer des réalisations de  $\mathcal{C}(B)$  et  $\mathcal{M}(B)$ , puis représenter graphiquement leurs distributions.

Pour calculer  $\mathcal{C}(B)$  : remplacer le  $*$  par un  $\wedge$  dans la ligne 2 ; pour calculer  $\mathcal{M}(B)$  : omettre le  $\text{floor}$  le plus externe dans la ligne 3.

Pour la loi de  $\mathcal{C}(B)$  : aucun changement, un diagramme avec  $\text{tabul}$  convient très bien.

Pour  $\mathcal{M}(Y)$  dont la loi possède une densité sur  $[1, 10[$ , on peut générer un grand nombre de réalisations et construire un histogramme avec suffisamment de classes avec  $\text{histplot}$ , qui ressemblera à un histogramme uniforme.

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On note  $H$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les trois polynômes  $(X-1)(X-2)(X-4)$ ,  $(X-1)(X-3)(X-4)$  et  $(X-2)(X-3)(X-4)$ .

1. a) Justifier que  $H$  est un hyperplan de  $E$ .

Le sous-espace vectoriel  $H$  est un hyperplan puisque c'est un sous-espace vectoriel de dimension  $3 = 4 - 1$  de  $E$ , car les trois polynômes  $(X-1)(X-2)(X-4)$ ,  $(X-1)(X-3)(X-4)$  et  $(X-2)(X-3)(X-4)$  sont linéairement indépendants.

- b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à  $H$ . Est-elle unique ?

La forme linéaire  $\phi : P \mapsto P(4)$  admet  $H$  pour noyau. Les formes linéaires admettant le même noyau que  $\phi$  sont les multiples non nuls de  $\phi$ .

2. On considère le produit scalaire sur  $E$  défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4).$$

Calculer, pour tout polynôme  $P \in E$ , la projection orthogonale de  $P$  sur  $H^\perp$ .

Le polynôme  $L = (X-1)(X-2)(X-3)$  étant orthogonal à  $H$ , la projection orthogonale de  $P$  sur  $H^\perp$  est :

$$p(P) = \frac{\langle L, P \rangle}{\langle L, L \rangle} L = \frac{L(4)P(4)}{L^2(4)} L = \frac{P(4)}{6} (X-1)(X-2)(X-3)$$

## EXERCICE PRINCIPAL

Soit  $p$  un nombre entier supérieur ou égal à 2 et  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  un élément de  $\mathbf{R}^p$  avec  $a_p \neq 0$ .

On note  $\mathcal{U}$  le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des suites réelles  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  et  $\mathcal{U}_p$  l'ensemble des suites réelles  $u \in \mathcal{U}$  qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \dots + a_p u_n.$$

1. a) Question de cours : rappeler la définition d'une application bijective.  
 b) Soit  $H$  l'application de  $\mathcal{U}_p$  dans  $\mathbf{R}^p$  qui associe à toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \in \mathcal{U}_p$  le  $p$ -uplet  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ .  
 Justifier que  $H$  est une bijection de  $\mathcal{U}_p$  sur  $\mathbf{R}^p$ .
2. a) Montrer que  $\mathcal{U}_p$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et trouver sa dimension.  
 b) Trouver une base de l'espace vectoriel des suites  $u \in \mathcal{U}$  qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_{n+p} = u_n.$$

3. Soit  $d$  l'endomorphisme de  $\mathcal{U}_p$  défini par :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \in \mathcal{U}_p, d(u) = (u_{n+1})_{n \in \mathbf{N}^*}.$$

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  une suite de  $\mathcal{U}_p$ .

On admet sans démonstration que l'ensemble  $G$  des polynômes  $P \in \mathbf{R}[X]$  tels que  $(P(d))(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$ , où  $0_{\mathcal{U}_p}$  désigne la suite nulle de  $\mathcal{U}_p$ , est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}[X]$ .

- a) Soit  $A \in G$ . Démontrer que :  $\forall Q \in \mathbf{R}[X], Q \times A \in G$ .
- b) Soit  $N$  l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de  $G$ . Justifier que  $N$  possède un plus petit élément  $r$  et qu'il existe dans  $G$  un polynôme  $\Pi$  de degré  $r$ , dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.
- c) En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que l'ensemble  $G$  est constitué par les polynômes de la forme  $Q \times \Pi$ , où  $Q \in \mathbf{R}[X]$ .
4. *Un exemple.* On considère ici le cas où :  $p = 3$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 2$  et  $a_3 = 1$ .  
 On note  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  la suite de  $\mathcal{U}_p$  qui vérifie  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$  et  $u_3 = 1$ .  
 Trouver un polynôme non nul  $\Pi$  de degré minimal tel que  $(\Pi(d))(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$ . Est-il unique ?

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme  $\mathcal{U}[-\theta, +\theta]$ , où  $\theta$  désigne un paramètre réel strictement positif inconnu.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $U_n = \inf\{X_1, \dots, X_n\}$  et  $V_n = \sup\{X_1, \dots, X_n\}$ .

1. Démontrer que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite convergente d'estimateurs de  $\theta$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note :  $T_n = \frac{1}{2} \sup\{X_j - X_i; (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2\}$ .
  - a) Exprimer  $T_n$  en fonction de  $U_n$  et  $V_n$ .
  - b) En déduire que  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite convergente d'estimateurs de  $\theta$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Soit  $p$  un nombre entier supérieur ou égal à 2 et  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  un élément de  $\mathbf{R}^p$  avec  $a_p \neq 0$ .

On note  $\mathcal{U}$  le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des suites réelles  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  et  $\mathcal{U}_p$  l'ensemble des suites réelles  $u \in \mathcal{U}$  qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \dots + a_p u_n.$$

1. a) Question de cours : rappeler la définition d'une application bijective.

On dit qu'une application  $f$  d'un ensemble  $E$  dans un ensemble  $F$  est bijective lorsqu'elle vérifie :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y.$$

- b) Soit  $H$  l'application de  $\mathcal{U}_p$  dans  $\mathbf{R}^p$  qui associe à toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \in \mathcal{U}_p$  le  $p$ -uplet  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ .  
Justifier que  $H$  est une bijection de  $\mathcal{U}_p$  sur  $\mathbf{R}^p$ .

Soit  $(v_1, v_2, \dots, v_p) \in \mathbf{R}^p$ .

La suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  définie par 
$$\begin{cases} \forall n \in [1, p], & u_n = v_n \\ \forall n \geq p+1, & u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_p u_{n-p} \end{cases}$$
 est, par analyse-synthèse, l'unique suite de  $\mathcal{U}_p$  vérifiant  $H(u) = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ .

2. a) Montrer que  $\mathcal{U}_p$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et trouver sa dimension.

On vérifie aisément que  $\mathcal{U}_p$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{U}$ . Sa dimension est  $p$  puisque  $H$  est un isomorphisme.

- b) Trouver une base de l'espace vectoriel des suites  $u \in \mathcal{U}$  qui vérifient :
- $$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_{n+p} = u_n.$$

On peut constituer une base de cet espace vectoriel à l'aide des images réciproques des vecteurs de la base canonique de  $\mathbf{R}^p$  par l'application  $H$  correspondant à  $a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$  et  $a_p = 1$ , c'est-à-dire des  $p$  suites  $u^{(i)}$  définies (pour  $i \in [1, p]$ ), par :

$$u_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n - i \in p\mathbf{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Soit  $d$  l'endomorphisme de  $\mathcal{U}_p$  défini par :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \in \mathcal{U}_p, d(u) = (u_{n+1})_{n \in \mathbf{N}^*}.$$

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  une suite de  $\mathcal{U}_p$ .

On admet sans démonstration que l'ensemble  $G$  des polynômes  $P \in \mathbf{R}[X]$  tels que  $(P(d))(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$ , où  $0_{\mathcal{U}_p}$  désigne la suite nulle de  $\mathcal{U}_p$ , est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}[X]$ .

a) Soit  $A \in G$ . Démontrer que :  $\forall Q \in \mathbf{R}[X], Q \times A \in G$ .

Comme  $(A(d))(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$ , on a aussi :

$$(Q \times A(d))(u) = (Q(d))(u) \circ (A(d))(u) = 0_{\mathcal{U}_p}.$$

b) Soit  $N$  l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de  $G$ . Justifier que  $N$  possède un plus petit élément  $r$  et qu'il existe dans  $G$  un polynôme  $\Pi$  de degré  $r$ , dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

$N$  admet un plus petit élément  $r$ , puisque c'est une partie non vide de  $\mathbf{N}$  (parce que le polynôme  $P = X^p - a_1 X^{p-1} - \dots - a_p$  vérifie  $(P(d))(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$ ).

En choisissant un polynôme de degré  $r$  dans  $G$  et en le divisant par son coefficient dominant, on obtient un polynôme  $\Pi$  de degré  $r$ , dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

c) En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que l'ensemble  $G$  est constitué par les polynômes de la forme  $Q \times \Pi$ , où  $Q \in \mathbf{R}[X]$ .

Soit  $P \in G$ .

Par division euclidienne,  $P = \Pi Q + R$  avec  $\deg(R) < \deg(\Pi)$ .

Or,  $\Pi \in G$  et  $Q \in \mathbf{R}[X]$ , d'où  $\Pi Q \in G$  et, par conséquent,  $(P - \Pi Q) = R \in G$ .

Comme  $\Pi$  est de degré minimal dans  $G$ , la condition  $\deg(R) < \deg(\Pi)$  entraîne que  $R$  est nul.

Par suite,  $P = \Pi Q$ .

La réciproque est immédiate, puisque  $\Pi \in G$  implique  $\Pi Q \in G$  pour tout  $Q \in \mathbf{R}[X]$ .

4. *Un exemple.* On considère ici le cas où :  $p = 3$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 2$  et  $a_3 = 1$ .

On note  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  la suite de  $\mathcal{U}_p$  qui vérifie  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$  et  $u_3 = 1$ .

Trouver un polynôme non nul  $\Pi$  de degré minimal tel que  $(\Pi(d))(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$ . Est-il unique ?

Le polynôme  $P(X) = X^3 - 2X - 1$  vérifie  $(P(d))(u) = d^3(u) - 2d(u) - u = 0_{\mathcal{U}_3}$ .

Or,  $P(X) = (X+1)(X^2 - X - 1) = (X+1)(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$  avec  $\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  et  $\alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

• Aucun polynôme constant non nul  $Q$  ne vérifie  $(Q(d))(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$ .

• Pour qu'un polynôme  $Q(X) = aX + b$  de degré 1 appartienne à  $G$ , il faut que  $(Q(d))(u) = ad(u) + bu = 0_{\mathcal{U}_3}$ . En particulier, on doit avoir  $au_2 + bu_1 = 0$  et  $au_3 + bu_2 = 0$ , ce qui donne  $a = b = 0$ . Il n'existe donc dans  $G$  aucun polynôme non nul de degré égal à 1.

• Posons  $\Pi(X) = X^2 - X - 1$ . On a :  $(\Pi(d))(u) = d^2(u) - d(u) - u$ .

Posons  $(\Pi(d))(u) = v = (v_n)_{n \geq 1}$  :  $\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n = u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$ .

On a :  $v_1 = u_3 - u_2 - u_1 = 0$ ,  $v_2 = u_4 - u_3 - u_2 = 0$ .

Supposons que pour un  $n \in \mathbf{N}^*$ , on a  $v_n = 0$ , c'est-à-dire  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ .

On a alors :  $v_{n+1} = u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1}$ ,

soit, par définition,  $v_{n+1} = 2u_{n+1} + u_n - u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_{n+2} + u_n$  et l'hypothèse de récurrence permet d'écrire :  $v_{n+1} = u_{n+1} - u_{n+1} - u_n + u_n = 0$ .

Le polynôme non nul  $\Pi$  appartient à  $G$  et il est de degré minimal (égal à 2). Il est unique, à un coefficient réel non nul multiplicatif près.

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme  $\mathcal{U}[-\theta, +\theta]$ , où  $\theta$  désigne un paramètre réel strictement positif inconnu.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $U_n = \inf\{X_1, \dots, X_n\}$  et  $V_n = \sup\{X_1, \dots, X_n\}$ .

1. Démontrer que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite convergente d'estimateurs de  $\theta$ .

On calcule la fonction de répartition de  $V_n$  selon des principes bien répertoriés.

$$P[V_n \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\theta \\ \left(\frac{x + \theta}{2\theta}\right)^n & \text{si } -\theta \leq x \leq +\theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

qui, lorsque  $n$  tend vers l'infini, tend vers la fonction de répartition d'une variable certaine de valeur  $\theta$ .

On en déduit que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite convergente (en loi ou en probabilité) d'estimateurs de  $\theta$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note :  $T_n = \frac{1}{2} \sup\{X_j - X_i; (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2\}$ .

- a) Exprimer  $T_n$  en fonction de  $U_n$  et  $V_n$ .

$$T_n = \frac{1}{2} (V_n - U_n) .$$

- b) En déduire que  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite convergente d'estimateurs de  $\theta$ .

Comme  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité vers  $\theta$  et, symétriquement,  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers  $-\theta$ , on en déduit (preuve exigible) que  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité vers  $\frac{1}{2} (\theta - (-\theta)) = \theta$ .

## EXERCICE PRINCIPAL

## 1. Question de cours

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur un ouvert  $\Omega$  non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

Donner la définition des dérivées directionnelles, première et seconde, de  $f$  en un point  $x$  de  $\Omega$  dans la direction  $h = (h_1, \dots, h_n)$ .

Exprimer leurs valeurs en fonction du gradient  $\nabla(f)(x)$  et de la matrice hessienne  $\nabla^2(f)(x)$  de la fonction  $f$  au point  $x$ .

2. Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi, admettant chacune une espérance et un écart-type, notés respectivement  $\mu$  et  $\sigma$ .

Pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on note :  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = E\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i X_i - \mu\right)^2\right)$ .

a) Justifier l'égalité :  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \mu^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right)^2$ .

b) Justifier, pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , l'inégalité :  $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

c) En déduire le minimum de  $f$  sous la contrainte  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ .

3. a) Justifier que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$  et trouver son unique point critique  $a$ .

b) Justifier l'égalité :

$$f(a+h) = f(a) + 2 \int_0^1 (1-t) \left( \mu^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 \right) dt.$$

c) En déduire que  $f$  admet un minimum global en  $a$ .

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit un entier  $n \geq 2$ ,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

Démontrer que, si  $f$  n'est pas une homothétie, alors il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice

de  $f$  a pour première colonne  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

## 1. Question de cours

Donner la définition des dérivées directionnelles, première et seconde, de  $f$  au point  $x$  dans la direction  $h$  pour une fonction  $f$  de classe  $C^2$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Préciser leur valeur en fonction du gradient  $\nabla(f)(x)$  et de la matrice hessienne  $\nabla^2(f)(x)$  de  $f$  au point  $x$ .

Soit  $f$  de classe  $C^2$  sur  $\Omega$ . Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$  et  $h = (h_1, \dots, h_n)$ .

On considère la fonction  $g$  définie pour tout  $t$  tel que  $x+th$  appartienne à  $\Omega$  par  $g(t) = f(x+th)$ .

Alors  $g$  est de classe  $C^2$  au voisinage de 0.

Sa dérivée première en 0 est appelée dérivée directionnelle de  $f$  au point  $x$  dans la direction  $h$  :

$$g'(0) = \sum_{i=1}^n \partial_i(f)(x) h_i = \langle \nabla(f)(x), h \rangle$$

Sa dérivée seconde en 0 est appelée dérivée seconde directionnelle de  $f$  au point  $x$  dans la direction  $h$  :

$$g''(0) = \sum_{i=1}^n h_i \left( \sum_{j=1}^n \partial_{i,j}^2(f)(x) h_j \right) = {}^t H \nabla^2(f)(x) H$$

2. Pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on note :  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = E\left(\left(\mu - \sum_{i=1}^n x_i X_i\right)^2\right)$ .

a) Justifier l'égalité :  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \mu^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right)^2$ .

Par la formule de Koenig-Huygens,  $E((X-a)^2) = V(X) + (E(X)-a)^2$ , on obtient :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = E\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i (X_i - \mu) + \mu\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right)\right)^2\right) = V\left(\sum_{i=1}^n x_i X_i\right) + \left(\mu\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right)\right)^2$$

puis l'égalité cherchée par indépendance des  $X_i$ .

b) Justifier, pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , l'inégalité :  $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

Dans  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(1, \dots, 1)$ , fournit directement l'inégalité demandée.

c) En déduire le minimum de  $f$  sous la contrainte  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ .

Le minimum de  $f$  sous la contrainte  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  est  $\frac{\sigma^2}{n}$ , atteint exclusivement au point  $\frac{1}{n}(1, 1, \dots, 1)$ .

On peut utiliser la condition du premier ordre pour un extremum local sous contrainte linéaire, qui impose l'égalité des  $x_i$ , mais cela n'a rien d'indispensable.

3. a) Justifier que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$  et trouver son unique point critique  $a$ .

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \mu^2 \left( \sum_{i=1}^n x_i - 1 \right)^2$$

La fonction est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$  parce qu'elle est polynomiale, et ses dérivées partielles sont données par :

$$\partial_i(f)(x) = 2\sigma^2 x_i + 2\mu^2 \left( \sum_{i=1}^n x_i - 1 \right)$$

On en déduit que le seul point critique de  $f$  est le point  $a$  dont toutes les coordonnées  $a_i$  sont égales à

$$\frac{\mu^2}{\sigma^2 + n\mu^2}.$$

- b) Justifier l'égalité :  $f(a+h) = f(a) + 2 \int_0^1 (1-t) \left( \mu^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 \right) dt$ .

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 à la fonction  $g : t \mapsto f(a+th)$  entre 0 et 1 :

$$f(a+h) = g(1) = g(0) + g'(0) + \int_0^1 (1-t) g''(t) dt = f(a) + 2 \int_0^1 (1-t) \left( \mu^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 \right) dt$$

parce que  $g'(0) = 0$  et

$$g''(t) = {}^t H \nabla^2(f)(a+th) H = 2\mu^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j + 2\sigma^2 \sum_{i=1}^n h_i^2$$

- c) En déduire que  $f$  admet un minimum global en  $a$ .

Comme  $\mu^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 = \mu^2 \left( \sum_{i=1}^n h_i \right)^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 \geq 0$ , on déduit du résultat précédent que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, f(a+h) \geq f(a)$$

ce qui prouve que  $f$  admet un minimum global en  $a$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit un entier  $n \geq 2$ ,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

Démontrer que, si  $f$  n'est pas une homothétie, alors il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice

$M$  de  $f$  a pour première colonne  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Cela revient à trouver un vecteur  $e_1$  dont l'image  $e_2 = f(e_1)$  ne lui est pas colinéaire (on n'aura plus alors qu'à compléter la famille libre pour former la base cherchée).

Il suffit donc de prouver que tout endomorphisme  $f$  de  $E$  qui vérifie

$$\forall x \in E, \exists k_x \in \mathbb{K}, f(x) = k_x x$$

est une homothétie vectorielle.

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $x = \sum_{i=1}^n e_i$ .

Il existe des  $k_i$  dans  $\mathbb{K}$  tels que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(e_i) = k_i e_i$ .

alors  $f(x) = \sum_{i=1}^n f(e_i) = \sum_{i=1}^n k_i e_i = k_x x = k_x \sum_{i=1}^n e_i$ .

On en déduit que tous les  $k_i$  sont égaux à  $k_x$ .

$f$  est une homothétie car, pour tout  $y$  dans  $E$  tel que  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ , on a  $f(y) = k_x \sum_{i=1}^n y_i e_i = k_x y$ .

## EXERCICE PRINCIPAL

## 1. a) Question de cours

Quand dit-on qu'une fonction  $f$  est négligeable par rapport à une fonction au voisinage d'un point  $a \in \mathbb{R}$  ?

b) Soit  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles.

Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que la différence  $f(x) - f(a)$  est négligeable devant  $(x - a)^n$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si, et seulement si, pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ , la dérivée d'ordre  $k$  de  $f$  en  $a$  est nulle.

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x - a)^n) \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f^{(k)}(a) = 0.$$

On note  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout réel  $a$ , on note  $E_n(a)$  l'ensemble des fonctions de  $E$  telles que la différence  $f(x) - f(a)$  est négligeable devant  $(x - a)^n$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ .

2. Trouver, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'unique polynôme  $P_n \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$  vérifiant  $P_n(0) = 0$  et  $P_n(1) = 1$ , et tel que la fonction polynomiale  $P_n$  appartient à  $E_n(0) \cap E_1(1)$ .

3. Soit  $p$  un nombre entier supérieur ou égal à 2,  $a_1, a_2, \dots, a_p$  des nombres réels deux à deux distincts et  $n_1, n_2, \dots, n_p$  des nombres entiers strictement positifs.

$$\text{Soit } m = p - 1 + \sum_{k=1}^p n_k.$$

Soit  $\Phi$  l'application de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $\mathbb{R}^{m+1}$  définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Phi(P) = \left( P^{(0)}(a_1), P^{(1)}(a_1), \dots, P^{(n_1)}(a_1), \dots, P^{(0)}(a_p), P^{(1)}(a_p), \dots, P^{(n_p)}(a_p) \right)$$

(où la dérivée 0-ième  $P^{(0)}$  de  $P$  désigne la fonction polynomiale  $P$  elle-même).

a) Vérifier que  $\Phi$  est linéaire et trouver son noyau.

b) Justifier que le noyau de  $\Phi$  est un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $\mathbb{R}_m[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

c) En déduire que pour tout  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ , il existe un unique polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $m$  appartenant à  $\bigcap_{k=1}^p E_{n_k}(a_k)$  vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(a_k) = \alpha_k.$$

## EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $p \in \mathbb{R}$ .

On considère une variable aléatoire réelle  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  admettant des moments jusqu'à l'ordre 2 et vérifiant :

$$E(X) = E(X^2) = p .$$

1. Montrer que  $p$  est compris entre 0 et 1.
2. Montrer que  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

## 1. a) Question de cours

Quand dit-on qu'une fonction  $f$  est négligeable par rapport à une fonction au voisinage d'un point  $a \in \mathbb{R}$  ?

b) Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que la fonction  $f$  appartient à  $E_n(a)$  si, et seulement si, pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ , la dérivée d'ordre  $k$  de  $f$  en  $a$  est nulle.

Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  au voisinage de  $a$ , la formule de Taylor-Young permet d'écrire :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

• On en déduit immédiatement que, si les dérivées d'ordre 1 à  $n$  de  $f$  sont nulles en  $a$ , alors  $f$  appartient à  $E_n(a)$ .

• Réciproquement, si  $f$  appartient à  $E_n(a)$ , alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = o((x-a)^n)$$

quand  $x$  tend vers  $a$ , ce qui rend impossible que l'une des dérivées  $f^{(k)}(a)$  (pour  $1 \leq k \leq n$ ) soit différente de 0.

2. Trouver, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'unique polynôme  $P_n \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$  vérifiant  $P_n(0) = 0$  et  $P_n(1) = 1$ , et tel que la fonction polynomiale  $P_n$  appartient à  $E_n(0) \cap E_1(1)$ .

En procédant par analyse-synthèse, on suppose d'abord l'existence d'un polynôme  $P_n$  vérifiant les conditions exigées.

Comme la fonction polynomiale associée à  $P_n$  est plate à l'ordre  $n$  et nulle en 0, le polynôme  $P_n(X)$  est divisible par  $X^{n+1}$  et s'écrit donc sous la forme :

$$P_n(X) = X^{n+1}(aX + b)$$

avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  puisque le degré de  $P_n$  est inférieur ou égal à  $n+2$ .

Le polynôme dérivé de  $P_n(X)$  étant  $P'_n(X) = X^n(n+2)aX + (n+1)b$  les contraintes  $P_n(1) = 1$  et  $P'_n(1) = 0$  deviennent :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ (n+2)a + (n+1)b = 0 \end{cases}$$

d'où  $a = -(n+1)$  et  $b = n+2$ , c'est-à-dire :

$$P_n(X) = (n+2)X^{n+1} - (n+1)X^{n+2}$$

qui vérifie effectivement les conditions exigées : c'est donc l'unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$  qui vérifie  $P(0) = 0$  et  $P(1) = 1$ , et pour lequel la fonction polynomiale associée appartient à  $E_n(0) \cap E_1(1)$ .

3. Soit  $p$  un nombre entier supérieur ou égal à 2,  $a_1, a_2, \dots, a_p$  des nombres réels deux à deux distincts et  $n_1, n_2, \dots, n_p$  des nombres entiers strictement positifs.

Soit  $m = p - 1 + \sum_{k=1}^p n_k$ .

Soit  $\Phi$  l'application de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $\mathbb{R}^{m+1}$  définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Phi(P) = \left( P^{(0)}(a_1), P^{(1)}(a_1), \dots, P^{(n_1)}(a_1), \dots, P^{(0)}(a_p), P^{(1)}(a_p), \dots, P^{(n_p)}(a_p) \right)$$

(où la dérivée 0-ième  $P^{(0)}$  de  $P$  désigne la fonction polynomiale  $P$  elle-même).

a)b) Vérifier que  $\Phi$  est linéaire et que son noyau est un supplémentaire de  $\mathbb{R}_m[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

La linéarité de  $\Phi$  résulte immédiatement de la linéarité de l'opérateur de dérivation.

Le noyau de  $\Phi$  est constitué des multiples du polynôme  $Q(X) = \prod_{k=1}^p (X - a_k)^{n_k+1}$ .

Comme  $\deg(Q) = \sum_{k=1}^p (n_k + 1) = m + 1$ , on a bien :

$$\text{Ker}(\Phi) \oplus \mathbb{R}_m[X] = \mathbb{R}[X] .$$

c) En déduire que pour tout  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ , il existe un unique polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $m$  appartenant à  $\bigcap_{k=1}^p E_{n_k}(a_k)$  vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad P(a_k) = \alpha_k .$$

Comme  $\mathbb{R}_m[X]$  est un supplémentaire du noyau de  $\Phi$ , l'application linéaire réalise, d'après le théorème image-noyau, un isomorphisme de  $\mathbb{R}_m[X]$  sur  $\text{Im}(\Phi)$ , image qui est nécessairement égale à  $\mathbb{R}^{m+1}$  puisque sa dimension est  $m + 1$ .

Par conséquent,  $\Phi$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_m[X]$  sur  $\mathbb{R}^{m+1}$  et le vecteur

$$\underbrace{(\alpha_1, 0, \dots, 0)}_{n_1+1}, \underbrace{(\alpha_2, 0, \dots, 0)}_{n_2+1}, \dots, \underbrace{(\alpha_p, 0, \dots, 0)}_{n_p+1}$$

de  $\mathbb{R}^{m+1}$  admet dans  $\mathbb{R}_m[X]$  un unique antécédent  $P$  par  $\Phi$ , qui est l'unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_m[X]$

appartenant à  $\bigcap_{k=1}^p E_{n_k}(a_k)$  et vérifiant :  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad P(a_k) = \alpha_k .$

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit  $p \in \mathbb{R}$ .

On considère une variable aléatoire réelle  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  admettant des moments jusqu'à l'ordre 2 et vérifiant :

$$E(X) = E(X^2) = p.$$

1. Montrer que  $p$  est compris entre 0 et 1.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p(1 - p) \geq 0, \text{ d'où } 0 \leq p \leq 1.$$

2. Montrer que  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

Comme  $E(X^2) - E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} (n^2 - n) P([X = n]) = 0$ , les probabilités  $P([X = n])$  sont nulles pour tout entier  $n \geq 2$ .

Il en résulte que  $X$  suit une loi de Bernoulli, dont le paramètre est  $p$  puisque  $E(X) = p$ .