HEC PARIS

ORAL HEC 2016

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option scientifique

Exercice principal

1. Question de cours

   Indiquer pour quels nombres réels x les séries $\sum_{n\geq 1} x^n$ et $\sum_{n\geq 1} n\,x^{n-1}$ sont convergentes et préciser alors leurs sommes respectives.

Soit a un nombre réel strictement positif.

On note $M = \begin{pmatrix} 1+a & -1 & 1 \\ 1+2a & -a-1 & 1 \\ 2a & -2a & a \end{pmatrix}$, u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est M, et id l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^3$.

2. Montrer que $-a$ est une valeur propre de u et trouver la dimension du sous-espace propre $E_{-a}(u)$ associé.

3. On pose : $f = (u - a\,\mathrm{id})^2$ (composé de l'endomorphisme $u - a\,\mathrm{id}$ avec lui-même).

   a) Calculer $f(e_1 + e_2 + e_3)$.
   b) Montrer que $E_{-a}(u)$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^3$.
   c) En déduire un polynôme annulateur de u de degré 3.
   d) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

4. On note p le projecteur de noyau $E_{-a}(u)$ et d'image $\mathrm{Ker}\, f$. On pose : $h = u - a\,p + a(\mathrm{id} - p)$.

   a) Montrer que h^2 est l'endomorphisme nul.
   b) Établir pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'égalité : $u^n = a^n p + (-a)^n(\mathrm{id} - p) + n\,a^{n-1}h$.

5. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$.
   Montrer que l'endomorphisme $\mathrm{id} - u$ est bijectif et que sa réciproque $(\mathrm{id} - u)^{-1}$ appartient à l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}, p, h)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi uniforme sur un segment $[a, b]$ $(1 \leq a < b)$.

Justifier la double inégalité :

$$E\left(X + \frac{1}{X}\right) > a + \frac{1}{a} \geq 2 \,.$$

Corrigé de l'exercice principal

1. Cours

2. La matrice $M + aI_3 = \begin{pmatrix} 1+2a & -1 & 1 \\ 1+2a & -1 & 1 \\ 2a & -2a & 2a \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, puisque ses deux premières lignes sont identiques (ou ses deux dernières colonnes opposées), et son rang est égal à deux puisque, de plus, ses deux dernières lignes ne sont pas proportionnelles (on demandera éventuellement de le justifier).
Il en résulte que $-a$ est une valeur propre de u et, par le théorème du rang, que la dimension du sous-espace propre $E_{-a}(u)$ est égale à 1.
Remarque : $E_{-a}(u) = \text{Vect}\{e_2 + e_3\}$

3. On pose $f = (u - a\,\text{id})^2$ (composé de l'endomorphisme $u - a\,\text{id}$ avec lui-même).

a) $M - aI_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1+2a & -1-2a & 1 \\ 2a & -2a & 0 \end{pmatrix}$,

d'où $(u - a\,\text{id})(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2$, puis $f(e_1 + e_2 + e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Remarque : $(M - aI_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4a^2 & 4a^2 & 0 \\ 4a^2 & -4a^2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Comme $e_2 + e_3$ est un vecteur de $E_{-a}(u)$, $e_1 + e_2$ et $e_1 + e_2 + e_3$ des vecteurs de $\text{Ker}(f)$ et que ces trois vecteurs constituent une base de $\mathbb{R}^3$, $E_{-a}(u)$ et $\text{Ker}(f)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

c) On en déduit que $(X - a)^2(X + a)$ est un polynôme annulateur de u, puisque l'endomorphisme $(u - a\text{id})^2(u + a\text{id})$ s'annule sur chacun des deux noyaux.

d) On peut affirmer que l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable, puisqu'on sait désormais que a et $-a$ sont ses seules valeurs propres et que la somme des dimensions des sous-espaces propres qui leur sont associés n'est pas égale à 3 mais à 2 (comme celui de $M + aI_3$, le rang de $M - aI_3$ est égal à deux).

4. On note p le projecteur de noyau $E_{-a}(u)$ et d'image $\text{Ker}(f)$ et $h = u - ap + a(\text{id} - p)$.

a) On peut utiliser le polynôme annulateur de u trouvé précédemment, pour rester en pays géométrique, mais il est plus simple de raisonner matriciellement, à l'aide d'une base bien choisie.
Ainsi, dans la base $(e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3)$,
la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$ donc celle de h $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dont le carré est la matrice nulle.
Il en résulte que h^2 est l'endomorphisme nul.

b) Matriciellement aussi, on obtient la formule

$$u^n = a^n p + (-a)^n(\text{id} - p) + na^{n-1}h$$

en appliquant la formule du binôme à l'ordre n à la somme des deux matrices $\text{Diag}(a, a, -a)$ et H', qui commutent.

5. On suppose désormais que a est strictement inférieur à 1.

   L'endomorphisme $\mathrm{id} - u$ est bijectif puisque 1 n'est pas valeur propre de u (car $0 < a < 1$).

   On obtient
$$(\mathrm{id} - u)^{-1} = \frac{1}{1-a}p + \frac{1}{1+a}(\mathrm{id} - p) + \frac{1}{(1-a)^2}h ,$$
   par passage à la limite (à justifier) à partir de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k = (\mathrm{id} - u)^{-1}(\mathrm{id} - u^{n+1})$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

L'étude de la fonction $h : x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$ sur $[1, +\infty[$ montre qu'elle un minimum au point 1, qui est égal à 2.
Il en résulte que $a + \dfrac{1}{a}$ est supérieur ou égal à 2 pour tout $a \geq 1$ (et même pour tout $a > 0$).
Comme $P([X \geq a]) = 1$, on a $E\Big(X + \dfrac{1}{X}\Big) \geq a + \dfrac{1}{a}$, et comme de plus $P([X > a]) > 0$, l'inégalité est stricte.

Exercice principal

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit f un endomorphisme de E.

1. Question de cours

   Rappeler la définition d'un sous-espace stable par f.

2. Exemple

   Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer M^2 et identifier l'endomorphisme g.

   b) Démontrer qu'il existe une infinité de plans vectoriels stables par g.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F est presque stable par f si $\dim(F) \geq 1$ et s'il existe un sous-espace vectoriel F' de F tel que

$$\dim(F') = \dim(F) - 1 \quad \text{et} \quad f(F') \subset F \tag{$*$}$$

3. a) Montrer qu'il existe toujours un sous-espace vectoriel de E presque stable par f et qu'il y en a une infinité si $\dim(E) \geq 2$.

   b) Soit F un sous-espace vectoriel de E presque stable par f mais qui n'est pas stable par f. Montrer qu'il existe un unique sous-espace F' qui satisfait (*).

4. Exemple (suite)

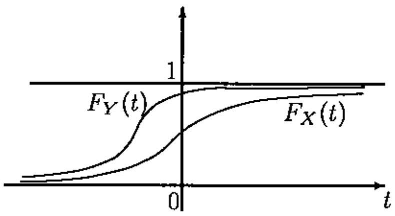
   a) Montrer que tous les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont presque stables par g.

   b) Quels sont les plans vectoriels F presque stables par g pour lesquels le sous-espace F' qui satisfait (*) n'est pas unique ?

5. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est presque stable par f si et seulement si la dimension de $F + f(F)$ est égale à $\dim(F)$ ou $\dim(F) + 1$. On pourra considérer pour une des implications l'espace vectoriel $G = f^{-1}(F) \cap F$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

La figure ci-dessous est la représentation graphique de la fonction de répartition de deux variables aléatoires X et Y. Quelle est la variable dont l'espérance est la plus grande ? Justifier.



Corrigé de l'exercice principal

1. Cours.

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) $M^2 = M$ et g est le projecteur d'image $\text{Vect}\{e_1 - e_2, e_3\}$ et de noyau $\text{Vect}\{e_1 + e_2\}$.

   b) Tout plan de la forme $\text{Vect}\{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, e_3\}$ (avec $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$) est stable par g.

3. a) L'espace E et toute droite de E sont presque stables.

   b) En supposant qu'il existe aussi F'' vérifiant (*), on a $f(F' + F'') \subset F$ et donc $F' + F'' = F' = F''$. Avec les dimensions,

$$\dim(F' + F'') = \dim(F) - 1 = \dim(F') + \dim(F'') - \dim(F' \cap F"")$$

   soit $\dim(F' \cap F) = \dim(F')$ et $F' = F''$.

4. Exemple (suite)

   a) Pour tout plan vectoriel F de $\mathbb{R}^3$, l'intersection de F avec l'image de g est une droite stable par g.

   b) Réponse : les plans vectoriels engendrés par deux vecteurs propres de g.
   L'image de g contient une infinité de droites stables. Quant aux plans engendrés par $e_1 + e_3$ et un vecteur non nul de l'image de g, ils contiennent deux droites stables.
   Les plans engendrés par un vecteur non nul de l'image et un vecteur non nul qui n'est pas vecteur propre de g ne sont pas stables et vérifient donc la propriété d'unicité.

5. On remarque tout d'abord qu'on a $\dim(F + f(F)) \geq \dim(F)$ Pour le sens direct, soit D une droite de F telle que D soit supplémentaire de F' dans F. On a alors

$$F + f(F) = F + f(F') + f(D) = F + f(F') + f(D) \subset F + f(D)$$

   et donc $\dim(F + f(F)) \leq \dim(F) + 1$
   Réciproquement, si $\dim(F + f(F)) = \dim(F)$, alors $f(F) \subset F$ et F est stable par f. On suppose donc que $\dim(F + f(F)) = \dim(F) + 1$. On note alors H un supplémentaire de G dans F. La restriction de f à G est injective car G contient $f^{-1}(\{0\}) \cap F$, noyau de la restriction de f à F. De plus $f(H)$ est en somme directe avec F car H est en somme directe avec $f^{-1}(F)$. Il s'ensuit que $F + f(F) = F \oplus f(H)$ et donc $\dim(H) = 1$. $F' = G$ convient donc et F est presque stable.

S 175

Corrigé de l'exercice sans préparation

La fonction de partition de F_X étant inférieure à F_Y on montre aisément que les réciproques de ces fonctions sont ordonnées en sens inverse.
Ainsi $E(F_X^{(-1)}(U)) > E(F_Y^{(-1)}(U))$ et donc $E(X) > E(Y)$.

Remarque : l'existence des deux espérances n'est pas assurée.

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   Énoncer le théorème du rang.

On note E l'espace vectoriel complexe formé des suites $u = \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes complexes.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la suite $u^{(k)}$ par :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^{(k)} = n^k \alpha^n}$$

(en vertu de la convention $0^0 = 1$, la suite $u^{(0)}$ est la suite géométrique $\left(\alpha^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$) .

2. On note E_N le sous-espace vectoriel de E engendré par $u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(N)}$ et id l'endomorphisme identité de E_N.

   Montrer que la dimension de E_N est égale à $N + 1$.

3. Soit D l'endomorphisme de E défini par : $\forall u \in E,\ D(u) = v \iff \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1}$.

   a) Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, calculer $D\big(u^{(k)}\big)$. En déduire que E_N est stable par D.

   b) Montrer que l'endomorphisme D_N de E_N induit par D est bijectif.

   c) Plus généralement, montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, l'endomorphisme $P(D_N)$ est bijectif si et seulement si α n'est pas racine de P.

4. *On admet que pour tout* $r \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Ker}(D_N - \alpha\, Id_{E_N})^r \subset E_{r-1}$.

   a) Soit $r \in [\![1, N]\!]$.
   Justifier les égalités $\operatorname{Im}(D_N - \alpha\, Id_{E_N})^r = E_{N-r}$ et $\operatorname{Ker}(D_N - \alpha\, Id_{E_N})^r = E_{r-1}$, où Id_{E_N} désigne l'endomorphisme identité de E_N.

   b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et α une racine de P dont l'ordre de multiplicité, noté r_0, est supposé inférieur ou égal à N.
   Montrer que $\operatorname{Im}\big(P(D_N)\big) = E_{N-r_0}$ et $\operatorname{Ker}\big(P(D_N)\big) = E_{r_0-1}$.

5. Trouver N et une suite $u \in E_N$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 2\alpha\, u_{n+2} + \alpha^2\, u_{n+1} = \alpha^n \ .$$

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi uniforme $\mathcal{U}[0,1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Y_n = \Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big)^{1/n}.$$

1. Expliquer pourquoi la figure ci-dessous, obtenue à partir du code *Scilab* suivant, suggère la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

```
x=linspace(0.2,0.8,20);
n=[50 200 800];
for i=1:3
N=1000;
LY=sum(log(rand(N,n(i))),"c");// sommation des colonnes
C=exp(LY/n(i));
subplot(1,3,i);// place trois graphiques côte à côte
histplot(x,C);
end
```

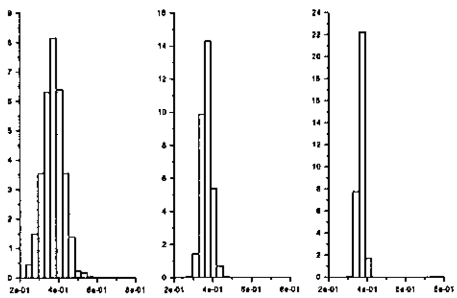


FIGURE 1 – *Histogrammes*

2. Justifier la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours.

2. $E_N = \text{Vect}\{u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(N)}\}$.

Pour tout $\lambda_0, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_0 u^{(0)} + \cdots + \lambda_N u^{(N)} = 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_0 + \lambda_1 n + \cdots + \lambda_N n^N = 0.$$

Le polynôme complexe $\lambda_0 + \cdots + \lambda_N X^N$ a donc une infinité de racines, donc il est nul *i.e.* $\lambda_0 = \cdots = \lambda_N = 0$.

Donc la famille $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(N)}$ est libre, donc c'est une base de E_N ; donc $\dim E_N = N+1$.

3.a) Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, par la formule du binôme, on a :

$$D(u^{(k)}) = \alpha \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u^{(j)} \in E_N.$$

b) D'après la question précédente, la matrice M de D dans la base $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(N)}$ est triangulaire supérieure avec α sur la toute la diagonale; comme $\alpha \neq 0$, elle est inversible.

c) L'endomorphisme $P(D)$ est bijectif si et seulement si $P(\alpha) \neq 0$, car la matrice $P(M)$ de $P(D)$ est triangulaire supérieure avec $P(\alpha)$ sur la diagonale.

4.a) D'après le calcul de la question 3, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on a :

$$(D - \alpha Id_E)(u^{(k)}) = \alpha \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} u^{(j)} \in E_{k-1}.$$

Donc $(D - \alpha Id_E)(E_k) \subset E_{k-1}$, formule qui reste vraie pour $k=0$ à condition de poser $E_{-1} = \{0_E\}$. Par récurrence on en déduit alors que, pour tout $r \in [\![1, k+1]\!]$, on a :

$$(D - \alpha Id_E)^r(E_k) \subset E_{k-r} .$$

Soit $r \in [\![1, N]\!]$.
En appliquant le résultat précédent à $k = N$, on obtient l'inclusion $\text{Im}(D_N - \alpha Id_{E_N})^r \subset E_{N-r}$.
En l'appliquant à $k = r-1$, on obtient $E_{r-1} \subset \ker(D_N - \alpha Id_{E_N})^r$, puisque $(D - \alpha Id_E)^r(E_{r-1})$ est inclus dans $E_{-1} = \{0_E\}$.

D'après l'inclusion admise et le théorème du rang, les deux inclusions obtenues sont des égalités.

b) On a : $P = (X-\alpha)^{r_0} Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$; donc $Q(D_N)$ est un isomorphisme (voir 3.b.) qui envoie chaque E_k dans lui-même (se déduit du 3.). Or $P(D_N) = (D_N - \alpha Id_{E_N})^{r_0} \circ Q(D_N)$, donc :

$$\text{Im} P(D_N) = \text{Im}(D_N - \alpha Id_{E_N})^{r_0} = E_{N-r_0}.$$

De $P(D_N) = Q(D_N) \circ (D_N - \alpha Id_{E_N})^{r_0}$ on déduit $\ker P(D_N) = \ker(D_N - \alpha Id_{E_N})^{r_0} = E_{r_0 - 1}$.

5. La relation s'écrit : $P(D) = u^{(0)}$ avec $P = X^3 - 2\alpha X^2 + \alpha^2 X = X(X-\alpha)^2$. Comme α est racine d'ordre $r_0 = 2$ de P et $u^{(0)} \in E_0$, d'après la question précédente il existe une solution dans E_N avec $N = 2$.
La question 3 donne :

$$M = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; M - \alpha I = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (M - \alpha I)^2 = \alpha^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc :

$$P(M) = M(M - \alpha I)^2 = \alpha^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $P(D)(u^{(2)}) = 2\alpha^3\, u^{(0)}$. On peut donc prendre $u = \dfrac{1}{2\alpha^3}\, u^{(2)}$, c'est-à-dire $u_n = \dfrac{1}{2}\, n^2 \alpha^{n-3}$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. ```
   x=linspace(0.2,0.8,20);
   n=[50 200 800];
   for i=1:3
   N=1000;
   LY=sum(log(rand(N,n(i))),"c");// sommation des colonnes
   C=exp(LY/n(i));
   subplot(1,3,i);// place trois graphiques côte à côte
   histplot(x,C);
   end
   ```
   Ce programme fournit une simulation de trois échantillons $X_1, X_2, \ldots, X_n$, de taille $n = 50, 200$ et 800 de la loi $\mathcal{U}[0,1]$, puis une simulation des variables aléatoires $LY = \sum_{i=1}^{n} \ln(L_i)$ et

   $$C = \exp\left(\frac{LY}{n}\right) = \prod_{i=1}^{n} (X_i)^{1/n}$$

   Les trois histogrammes de la figure montrent une concentration de la distribution empirique des échantillons lorsque n augmente, ce qui suggère une convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Par la loi des grands nombres, la suite des moyennes $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)$ converge en probabilité vers

   $$E(\ln(X_1)) = \int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$$

   ce qui entraîne par continuité de la fonction exponentielle que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers e^{-1}, qui vaut environ 0.37, ce qui est cohérent avec les sorties graphiques *Scilab*.
   ```

EXERCICE PRINCIPAL

Soit a un nombre réel, I un intervalle contenant a et non réduit à ce point et f une application de I dans $\mathbb{R}$.

1. a) Question de cours.

   Justifier que, si f est une fonction continue sur I, alors la fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe C^1 sur I .

   b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, $I = [-1, +1]$ et que f est définie par :

   $$\forall x \in I,\ f(x) = \lfloor 2|x| \rfloor\ .$$

   i) Indiquer comment obtenir une représentation graphique de la fonction f à l'aide de Scilab. Quelle sera l'allure de la figure obtenue ?

   ii) Justifier que la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I et donner l'allure de sa représentation graphique.

Dans la suite, on suppose que I est l'intervalle $[a, +\infty[$ et que f est continue sur I.
On considère également deux applications $g : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continues sur I, ainsi que deux réels positifs ou nuls k et δ.

2. On suppose que, pour tout $x \in I$, $g(x) \geq 0$ et $f(x) \leq \delta + \int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$.

   a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \Big(\delta + \int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\Big) \exp\Big(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big)$.

   b) En déduire que, pour tout $x \in I$, on a : $f(x) \leq \delta \exp\Big(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big)$.

3. On suppose maintenant que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq \varphi(x) + k \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

   En s'inspirant de la méthode précédente, montrer que, pour tout $x \in I$, on a l'inégalité :

   $$f(x) \leq \varphi(x) + k \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{e}^{k(x-t)}\,\mathrm{d}t\ .$$

4. On suppose désormais que, pour tout $x \in I$, on a :

   $$0 \leq f(x) \leq \delta\,(x - a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

   Justifier à l'aide de ce qui précède que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère une variable aléatoire réelle discrète X admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et vérifiant :

$$\begin{cases} E(X) = \alpha \\ E(X^2) = E(X^4) = 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que α est nécessairement compris entre -1 et $+1$.
2. Trouver la loi de X.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. **Question de cours.**

   a) Cours

   b) i)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = \pm 1 \\ 1 & \text{si } 0.5 \leq |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 0.5 \end{cases}$$

Ce qui donne la figure 1, avec le code *Scilab* suivant.

```
-->x=linspace(-1,1,100);
-->y=floor(abs(2*x));
-->plot(x,y)
```

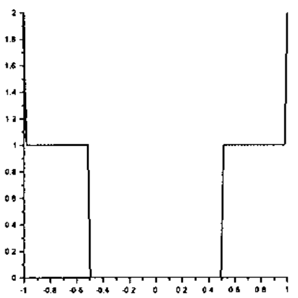


FIGURE 1 – *Représentation graphique de f*

ii)

$$F(x) = \begin{cases} x + 0.5 & \text{si } -1 \leq x < 0.5 \\ 0 & \text{si } -0.5 < |x| < 0.5 \\ x - 0.5 & \text{si } 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

Ce qui aboutit à la figure 2.

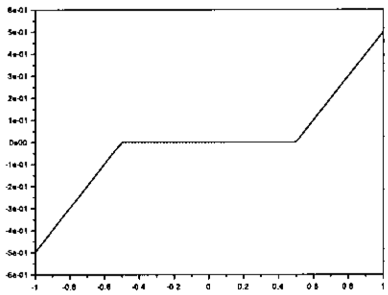


FIGURE 2 – *Représentation graphique de F*

2. a) La fonction $\Phi : x \mapsto \left(\delta + \int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right) \exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ est dérivable sur I, de dérivée $\Phi' : x \mapsto \left(f(x) - \delta - \int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right) g(x)\, \exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq 0$.

   b) La fonction Φ décroît donc sur I : par conséquent, pour tout $x \in I$, $\Phi(x) \leq \Phi(a) = \delta$. Il s'ensuit que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq \delta + \int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \leq \delta \exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

3. Notons F la primitive s'annulant en a de f sur I.
   L'hypothèse s'écrit, pour tout $x \in I$, $F'(x) \leq \varphi(x) + kF(x)$,
   soit aussi $F'(x)\,\mathrm{e}^{-kx} - k\,\mathrm{e}^{-kx} F(x) \leq \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-kx}$.
   Il s'ensuit que, pour tout $x \in I$, $\left[F(t)\,\mathrm{e}^{-kt}\right]_a^x \leq \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t$,
   soit $F(x)\,\mathrm{e}^{-kx} \leq \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t$,
   soit encore $F(x) \leq \mathrm{e}^{kx} \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{e}^{k(x-t)}\,\mathrm{d}t$.
   Comme $k \geq 0$, il vient ainsi que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq \varphi(x) + kF(x) \leq \varphi(x) + k\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{e}^{k(x-t)}\,\mathrm{d}t$.

4. D'après le résultat de la question **3** avec $\varphi := x \mapsto \delta\,(x-a)$ et $k := 1$, on a pour tout $x \in I$:

$$f(x) \leq \delta\,(x-a) + \int_a^x \delta\,(t-a)\,\mathrm{e}^{x-t}\,\mathrm{d}t = \delta\left(\mathrm{e}^{x-a} - 1\right).$$

   Il en résultat par comparaison que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \alpha^2 \geq 0$, d'où $-1 \leq \alpha \leq +1$.
2. Comme $E(X^2) = 1$ et $V(X^2) = E(X^4) - E(X^2)^2 = 0$, on a nécessairement $P([X^2 = 1]) = 1$, c'est-à-dire $P([X = +1]) + P([X = -1]) = 1$, d'où, à l'aide de $E(X) = \alpha$:

$$\begin{cases} P([X = -1]) = \dfrac{1-\alpha}{2} \\ \\ P([X = +1]) = \dfrac{1+\alpha}{2} \end{cases}.$$

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   Rappeler la formule donnant une densité de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes et les conditions sous lesquelles cette formule est applicable.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

   a) Vérifier que f est une densité de probabilité.

   b) Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle de densité f.

   c) Trouver la loi de $Y = \sqrt{X}$ lorsque X est une variable aléatoire positive admettant f pour densité.

3. a) Pour quelles valeurs réelles de s l'intégrale $\displaystyle\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}}$ est-elle convergente ?

   b) Calculer alors $\displaystyle\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}}$ en utilisant le changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{x-s}{x}}$.

4. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, admettant chacune f pour densité.

   a) Proposer une méthode de simulation en scilab de la variable aléatoire $S = X - Y$.

   b) Démontrer que S est une variable aléatoire à densité et en donner une densité continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice sans préparation

On considère les deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{cases} F = \text{Vect}\{(1,1,1)\} \\ G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+y-2z=0\} \end{cases}.$$

Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est F et l'image G.
Peut-on le choisir diagonalisable ?

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours

a) La fonction f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ privé des points 0 et 1, et son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.

b) La fonction de répartition F d'une variable aléatoire de densité f est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Les candidats doivent être capables de repérer la tangente verticale à l'origine, la concavité de f sur $[0, 1]$ et sa non-dérivabilité en 1.

c) Par calcul de la fonction de répartition de Y, on constate que Y suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

2. a) $\boxed{\text{Pour quelles valeurs réelles de } s \text{ l'intégrale } \displaystyle\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}} \text{ est-elle convergente ?}}$

- Si $s < 0$, l'intégrande n'est pas défini sur l'intervalle $]0, s[$ et l'integrale n'a pas de sens.
- Si $s = 0$, l'intégrale est une intégrale de référence notoirement divergente.
- Si $0 < s < 1$, l'intégrande est continue sur $]s, 1]$ et l'intégrale est convergente par comparaison à une intégrale de référence.
- Si $s = 1$, l'intégrale n'a pas vraiment de sens. La qualifier de convergente ou divergente est affaire de convention.
- Si $s > 1$, l'intégrande n'est pas défini sur l'intervalle $]1, s[$ et l'intégrale n'a pas de sens.

Finalement, $\displaystyle\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}}$ est convergente si et seulement si $0 < s < 1$.

b) Soit $s \in]0, 1[$.

L'application $\phi : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x-s}{x}} = \sqrt{1 - \dfrac{s}{x}}$ définit une bijection de $]s, 1[$ sur $]0, \sqrt{1-s}[$, croissante et de classe C^1 (on est en droit d'exiger ces précisions des candidats).
Il en résulte que l'intégrale obtenue par le changement de variable est convergente et de même valeur que l'intégrale initiale.
On trouve :

$$\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}} = \int_0^{\sqrt{1-s}} \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\big(\frac{1+t}{1-t}\big)\Big]_0^{\sqrt{1-s}} = \ln\big(\frac{1+\sqrt{1-s}}{1-\sqrt{1-s}}\big)$$

3. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, admettant chacune f pour densité.

a) D'après la question 2.c, X et Y suivent la même loi que le carré d'une loi uniforme sur [0,1], ce qui permet de simuler S par deux appels à la fonction « rand » .

(1) u=rand() //simulation de U de loi uniforme sur [0,1]
(2) v=rand() //simulation de V, indépendante de U, de loi uniforme sur [0,1]
(3) s=u^2-v^2 //simulation de S

b) Comme S prend ses valeurs entre -1 et $+1$ et comme sa loi est symétrique par rapport à 0 (puisque $X-Y$ et $Y-X$ ont la même loi), elle admet une densité paire et il suffit de calculer le produit de convolution $h = f_X * f_{-Y}$ aux points $s \in]0,1[$.
Pour un tel s, on obtient :

$$h(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_{-Y}(s-x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-s}}{1-\sqrt{1-s}}\right) \cdot$$

Finalement, la fonction $h = f_X * f_{-Y}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ privé des seuls points -1, 0 et $+1$ avec :

$$h(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-|s|}}{1-\sqrt{1-|s|}}\right) & \text{si } 0 < |s| < 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \quad . \end{cases}$$

Prolongée par 0 en ± 1 (pour la rendre continue en ces deux points) et par n'importe quelle valeur en 0, h devient une densité de S, continue sur $\mathbb{R}^*$.

Sujet S 170

Corrigé de l'exercice sans préparation

Il suffit de choisir un supplémentaire H de F et d'imposer que la restriction de l'endomorphisme à ce supplémentaire réalise un isomorphisme de H sur G.
Si le dialogue s'établit dans le langage matriciel, on pourra demander au candidat d'exhiber la matrice dans la base canonique d'un endomorphisme convenable.

On ne peut pas choisir l'endomorphisme diagonalisable puisque F et G ne sont pas supplémentaires.

EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice n est un entier strictement supérieur à 2.

1. Question de cours

   a) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins un polynôme annulateur non nul.

   b) En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre complexe.

2. Exemple

   Trouver les valeurs propres complexes et les polynômes annulateurs de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AM + MB$.

   a) Calculer $\varphi(X^tY)$ lorsque $AX = \lambda X$ et ${}^tBY = \mu Y$, où λ et μ sont des nombres réels, X et Y des matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   b) En déduire que toute somme d'une valeur propre réelle de A et d'une valeur propre réelle de B est une valeur propre de l'endomorphisme φ.

   c) Démontrer que, si A et B sont des matrices symétriques, alors φ est diagonalisable.

4. Soit maintenant A et B deux matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   On note alors φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\varphi(M) = AM + MB$
   Soit ν une valeur propre de φ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

   a) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a : $MP(B) = P(\nu I_n - A)M$.

   b) On pose $P(X) = \prod_{k=1}^{m}(X - b_k)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, annulateur de B.
   Montrer que la matrice $P(\nu I_n - A)$ n'est pas inversible et en déduire qu'il existe $k \in \{1, \cdots, m\}$ tel que $\nu - b_k$ soit valeur propre de A.

   c) Montrer que ν est la somme d'une valeur propre de A et d'une valeur propre de B.

Exercice sans préparation

Donner la finalité du progamme suivant :

```
N=100000;S=0;
for i=1:N
    u=rand();
    S=S+4/N*1/(1+u^2);
end
disp(S)
```

On pourra penser à la loi des grands nombres.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours

2. Les valeurs propres sont $1+i$ et $1-i$, et les polynômes annulateurs les multiples de X^2+2X+2.

3. a) $\varphi(X^tY) = AX^tY + X^tYB = \lambda X^tY + X\mu^tY = (\lambda+\mu)X^tY$.

b) On choisit X et Y non nulles telles que $AX = \lambda X$ et ${}^tBY = \mu Y$ (μ est valeur propre de B donc de ${}^tB$), et on applique le résultat précédent, qui prouve que $\lambda+\mu$ est valeur propre de φ et que la matrice non nulle X^tY est un vecteur propre associé.

c) Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes) et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ celles de ${}^tB$.
Soient $(X_1, \cdots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A et $Y_1, \cdots, Y_n$ une base orthonormée de vecteurs propres de ${}^tB$.
La famille $(X_i^tY_j)_{1\leq i,j\leq n}$, formée de n^2 vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est libre.
En effet si $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}X_i^tY_j = 0$, alors, pour tout $1\leq k\leq n$ et tout $1\leq l\leq n$ on a

$$ {}^tX_k\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}X_i^tY_j\right)Y_l = \alpha_{k,l} = 0 \ .$$

La famille $(X_i^tY_j)_{1\leq i,j\leq n}$ est donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres pour φ. Il en résulte que φ est diagonalisable.

4. a) On a $\varphi(M) = \nu M = AM + MB$. Donc $MB = (\nu I - A)M$ et par récurrence immédiate, pour tout k entier, $MB^k = (\nu I - A)^kM$.
Plus généralement, pour $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$, on a :

$$MP(B) = M(a_0I + a_1B + \cdots + a_mB^m) = (a_0I + (\nu I - A)M + \cdots (\nu I - A)^mM = (P(\nu I - A))M \ .$$

b) Comme P est un polynôme annulateur de B, on a $(P(\nu I - A))M = 0$, d'après le résultat précédent.
Si $P(\nu I - A)$ était inversible, en multipliant à gauche la relation précédente par l'inverse de $P(\nu I - A)$, on aurait $M = 0$ ce qui est impossible puisque M est vecteur propre.
La matrice $P(\nu I - A) = \prod\limits_{k=1}^{m}(\nu I - A - b_kI)$ n'est donc pas inversible. Il existe donc un entier $k \in \{1, \cdots, m\}$ tel que $(\nu I - A - b_kI)$ soit non inversible, ce qui signifie que $\nu - b_k$ est valeur propre de A.

c) On peut choisir P de telle manière qu'il ne possède pas d'autres racines que les valeurs propres de B. Dès lors, le résultat précédent fournit la décomposition cherchée sosu la forme :

$$\nu = (\nu - b_k) + b_k \ .$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Le programme permet d'approcher π en utilisant la loi des grands nombres.

En effet, on a $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ et donc

$$\pi = E(\frac{4}{1+X^2})$$

où X suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

EXERCICE PRINCIPAL

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Question de cours

   a) Rappeler l'énoncé du théorème limite central.

   b) Comment en déduit-on un intervalle de confiance asymptotique pour l'espérance d'une loi admettant un moment d'ordre deux ?

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes une même loi, qui admet un moment d'ordre deux.
On suppose de plus que les variables aléatoires X_n sont centrées et réduites.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{cases} U_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \\ \\ V_n = \dfrac{X_{n+1} + X_{n+2} + \cdots + X_{2n}}{\sqrt{n}} \end{cases}.$$

   Soit $\epsilon > 0$.

   a) Démontrer que $P([U_n \geq \epsilon])$ tend vers $1 - \Phi(\epsilon)$ quand n tend vers l'infini.

   b) Quelle est la limite de $P([V_n \leq -\epsilon])$ quand n tend vers l'infini ?

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Y_n = (\sqrt{2} - 1)U_n - V_n$.

   i) Justifier l'inégalité :

$$P([Y_n \geq \epsilon\sqrt{2}]) \geq P([U_n \geq \epsilon] \cap [V_n \leq -\epsilon]) \cdot$$

   ii) En déduire que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité vers 0.

3. On conserve les notations de la question précédente.

   a) Exprimer $U_{2n} - U_n$ en fonction de Y_n.

   b) Démontrer qu'il n'existe pas de variable aléatoire Z telle que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers Z.

Exercice sans préparation

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = i^{j-1}\ .$$

Démontrer que M est inversible.

Corrigé de l'exercice principal

1. a) Cours

b) Soit $\alpha \in]0,1[$ et $c = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$.

Si la variance σ^2 est connue, $\left[\overline{X}_n - \frac{c\,\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{c\,\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour m de niveau $1-\alpha$.

Si la variance σ^2 est inconnue, $\left[\overline{X}_n - \frac{c\,S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{c\,S_n}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour m de niveau $1-\alpha$, où $S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$.

2. a) Par application du théorème limite central, la suite des variables aléatoires U_n converge en loi vers une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} P([U_n \geq \epsilon]) = P([Z \geq \epsilon]) = 1 - \Phi(\epsilon)$.

b) Comme $X_{n+1} + X_{n+2} + \cdots + X_{2n}$, somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X_1, suit la même loi que $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, V_n suit la même loi que U_n. La suite des variables aléatoires V_n converge donc aussi en loi vers Z.
Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} P([V_n \leq -\epsilon]) = P([Z \leq -\epsilon]) = \Phi(-\epsilon) = 1 - \Phi(\epsilon)$.

c) i) Pour tout $\omega \in \Omega$, si $U_n(\omega) \geq \epsilon$ et $V_n(\omega) \leq -\epsilon$, alors

$$Y_n(\omega) = (\sqrt{2}-1)U_n(\omega) - V_n(\omega) \geq (\sqrt{2}-1)\epsilon - (\epsilon) = \epsilon\sqrt{2}$$

d'où l'inclusion

$$[U_n \geq \epsilon] \cap [V_n \leq -\epsilon] \subseteq [Y_n \geq \epsilon\sqrt{2}]$$

et l'inégalité

$$P([Y_n \geq \epsilon\sqrt{2}]) \geq P([U_n \geq \epsilon] \cap [V_n \leq -\epsilon])\,.$$

ii) D'après le résultat précédent et par indépendance de U_n et V_n (qui résulte du lemme des coalitions), on a :

$$P([|Y_n| \geq \epsilon\sqrt{2}]) \geq P([Y_n \geq \epsilon\sqrt{2}]) \geq P([U_n \geq \epsilon])\,P([V_n \leq -\epsilon]) \longrightarrow \left(1-\Phi(\epsilon)\right)^2 \text{ quand } n \to +\infty\,.$$

Il en résulte que $P([|Y_n| \geq \epsilon\sqrt{2}])$ ne peut pas tendre vers 0 quand n tend vers l'infini. Par conséquent, la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité vers 0.

3. a) $U_{2n} - U_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_n + V_n) - U_n = -\frac{1}{\sqrt{2}}Y_n$.

b) Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeait en probabilité vers une variable aléatoire Z, alors la suite des variables aléatoires $U_{2n} - U_n$ convergerait en probabilité vers 0 (on pourra en demander une preuve, car la stabilité par addition de la convergence en probabilité ne figure pas dans le programme)), ce qui est en contradiction avec le résultat précédent.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ tel que $MA = 0$.

$$MA = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_j\, i^{j-1} = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ P_A(i) = 0$$

où P_A est le polynôme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j\, X^{j-1}$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Lorsque $MA = 0$, P_A possède n racines distinctes, ce qui prouve que c'est le polynôme nul, donc que la matrice A est nulle.
Par conséquent, M est inversible.

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Donner la forme du développement limité à l'ordre un de f en un point et pour $(x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, donner l'expression de la dérivée de l'application g définie sur $\mathbb{R}$ et qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $g(t) = f(x+th)$.

2. Soit a et b deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[a(x+y) + a(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} b(s)\mathrm{d}s\right]$$

   Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et montrer que $\partial^2_{1,1}(f) - \partial^2_{2,2}(f)$ est l'application nulle. Pour $x \in \mathbb{R}$, préciser les valeurs de $f(x,0)$ et de $\partial_2(f)(x,0)$.

3. Dans cette question, f désigne une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

   a) Montrer qu'il existe une unique application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = g(x+y, x-y) \ .$$

   Dans la suite, on admettra que l'application g ainsi définie est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

   b) Si g désigne l'application définie au a), montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) - \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 4\,\partial^2_{1,2}(g)(x+y, x-y)$$

   c) En déduire que si $\partial^2_{1,1}(f) - \partial^2_{2,2}(f)$ est l'application nulle et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = \partial_2(f)(x,0) = 0$, alors f est l'application nulle.

4. a) Montrer qu'il existe une unique application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\partial^2_{1,1}(f) - \partial^2_{2,2}(f)$ soit l'application nulle et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = x^2$ et $\partial_2(f)(x,0) = x$, et déterminer cette application.

   b) Étudier les extremums de f.

Exercice sans préparation

On tire (avec remise) une boule d'une urne contenant n boules numérotées.

1. On note T la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois deux boules différentes ont été tirées.
   Déterminer l'espérance de T.

2. Quelle est la variable aléatoire V_n dont la fonction *Scilab* suivante calcule une simulation ?

```
function compt=V(n)
    A=[];compt=0;
 while length(A)< n
    u=floor(n*rand()+1);
    i=find(A==u); // renvoie les positions de u dans le vecteur A
    if length(i)==0 then
       A=[A,u];
    end;
    compt=compt+1;
 end;
endfunction
```

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours

2. Les applications $(x,y) \longmapsto a(x+y)$ et $(x,y) \longmapsto a(x-y)$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme composée d'une application linéaire qui est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ avec a qui est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Si B désigne une primitive de b sur $\mathbb{R}$, B est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\int_{x-y}^{x+y} b(s)\mathrm{d}s = B(x+y) - B(x-y)$. Finalement f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de telles fonctions.

$\partial_1 f(x,y) = \frac{1}{2}\left[a'(x+y) + a'(x-y) + b(x+y) - b(x-y)\right]$
$\partial_2 f(x,y) = \frac{1}{2}\left[a'(x+y) - a'(x-y) + b(x+y) + b(x-y)\right]$
$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \partial^2_{2,2} f(x,y = \frac{1}{2}\left[a''(x+y) + a''(x-y) + b'(x+y) - b'(x-y)\right]$

D'où $\boxed{\partial^2_{1,1} f - \partial^2_{2,2} f = \underline{0} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = a(x) \text{ et de } \partial_2 f(x,0) = b(x)}$

3. a) L'application $\varphi := (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x+y, x-y) \in \mathbb{R}^2$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ de bijection réciproque $\varphi^{-1} := (u,v) \longmapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$ donc il existe une unique application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f = g \circ \varphi$ qui est $g = f \circ \varphi^{-1}$.

b) Comme $f(x,y) = g(x+y, x-y) = g((y,-y) + x(1,1))$ on a d'après la formule rappelée en question de cours :
$\partial_1 f(x,y) = \partial_1 g(x+y, x-y) + \partial_2 g(x+y, x-y)$ et
$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \partial^2_{1,1} g(x+y,x-y) + \partial^2_{2,1} g(x+y,x-y) + \partial^2_{1,2} g(x+y,x-y) + \partial^2_{2,2} g(x+y,x-y)$
et, d'autre part, $\partial_2 f(x,y) = \partial_1 g(x+y,x-y) - \partial_2 g(x+y,x-y)$ et
$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \partial^2_{1,1} g(x+y,x-y) - \partial^2_{2,1} g(x+y,x-y) - \partial^2_{1,2} g(x+y,x-y) + \partial^2_{2,2} g(x+y,x-y)$
d'où le résultat attendu, ,compte-tenu du théorème de Schwarz qui stipule que $\partial^2_{2,1} g = \partial^2_{1,2} g$.

c) D'après b), la condition $\partial^2_{1,1} f - \partial^2_{2,2} f = 0$ équivaut à $\partial^2_{1,2} g = 0$
Il existe donc $a \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_2 g(u,v) = a(v)$
(a est C^1, car par exemple $a(v) = \partial_2 g(0,v)$ et que g est C^2)
Si A désigne une primitive de a, la condition $\partial^2_{1,2} g = 0$ revient donc à l'existence de $B \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = A(v) + B(u)$$

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = g(x,x) = A(x) + B(x) = 0$ et $\partial_2 f(x,0) = \partial_1 g(x,x) - \partial_2 g(x,x) = A'(x) - B'(x)$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = B(x) = 0$.

Conclusion : g est donc l'application nulle et par suite f est également l'application nulle.

4. a) D'après 2., $f_0 := (x,y) \longmapsto \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + (x-y)^2 + \int_{x-y}^{x+y} s\,\mathrm{d}s\right] = x^2 + y^2 + xy$ est solution et, d'après 3., si f est solution $f - f_0$ est la fonction nulle donc f_0 est l'unique solution du problème posé.

b) f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ et admet un unique point critique : $(0,0)$. En outre, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+\frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 = f(0,0)$ donc f admet un minimum (global) en $(0,0)$ et ne peut admettre un extremum local en aucun autre point.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. $E(T) = 1 + \dfrac{n}{n-1} \cdot$
2.

```
function compt=V(n)
    A=[];compt=0;
 while length(A)<n
    u=int(n*rand()+1);
    i=find(A==u);
    if length(i)==0 then
       A=[A,u];
    end;
    compt=compt+1;
 end;
endfunction
```

La fonction ci-dessus simule la variable aléatoire V_n égale au numéro du tirage où pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois.

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : changement de variable dans une intégrale impropre.

   Dans la suite de l'exercice, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs réelles.

2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes, à valeurs positives, où Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et X possède une densité.

   a) Montrer que la variable aléatoire $Y - X$ possède une densité et expliciter une telle densité en fonction d'une densité de X et de λ.

   b) En déduire une expression de $P([Y > X])$ sous la forme d'une intégrale et trouver une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $P([Y > X]) = E(f(X))$.

   c) $P([Y > X])$ peut-elle être nulle ?

3. Soit X_1, X_2, Y trois variables aléatoires indépendantes, à valeurs positives, possédant des densités où Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que X_1 possède une densité bornée.

   Montrer que $P([Y > X_1 + X_2]) = P([Y > X_1])P([Y > X_2])$.
   Quelle propriété a-t-on ainsi généralisé ?

4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $(X_1, \ldots, X_n)$ un système de n variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $M = \max\limits_{1 \leq k \leq n} X_k$.

   a) Calculer $P([X_1 > \sum\limits_{k=2}^{n} X_k])$

   b) En déduire la valeur de $P([M > \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k])$.

Exercice sans préparation

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien.
On note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire sur E.

Soit (a, b) une famille libre de vecteurs de E et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f := t \longmapsto \|a - tb\|$$

Étudier les variations de f et interpréter le minimum de f.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours
2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes, à valeurs positives, où Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et X possède une densité.

a) Notons p une densité de X.

Comme la densité d'une variable exponentielle est bornée, la variable aléatoire $Y - X$ possède, d'après la question de cours, une densité q donnée par :

$$q(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} 1_{t \geq 0} p(t - z) dt = \int_{max(0,z)}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} p(t - z) dt$$

soit, en effectuant le changement de variable affine : $s = t - z$,

$$q(z) = \lambda e^{-\lambda z} \int_{max(-z,0)}^{+\infty} e^{-\lambda s} p(s) ds$$

b) Pour $z \geq 0$, $q(z) = c\lambda e^{-\lambda z}$ où $c = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p(t) dt$ d'où

$$P(Y > X) = c \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda z} dz = c = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p(t) dt$$

On a donc $P(Y > X) = E(f(X))$ avec $f := x \longmapsto e^{-\lambda x}$

c) La fonction $t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto e^{-\lambda t} p(t)$ est à valeurs positives, continue sauf en un nombre fini de points, différente de la fonction nulle (car $\displaystyle\int_0^{+\infty} p(t) dt = 1$) .

D'où $\quad P(Y > X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p(t) dt > 0$.

3. On applique le résultat précédent au couple $(X_1 + X_2, Y)$ de variables indépendantes d'après le lemme des coalitions. On a donc $P(Y > X_1 + X_2) = E(e^{-\lambda X_1} e^{-\lambda X_2})$. Or les variables aléatoires $e^{-\lambda X_1}, e^{-\lambda X_2}$ sont indépendantes donc $E(e^{-\lambda X_1} e^{-\lambda X_2}) = E(e^{-\lambda X_1}) E(e^{-\lambda X_2})$ qui vaut encore $P(Y > X_1) P(Y > X_2)$ toujours d'après 2.

Le résultat précédent peut encore s'écrire $P(Y > X_1 + X_2 | Y > X_1) = P(Y > X_2)$ ce qui généralise la propriété d'absence de mémoire des variables aléatoires de loi exponentielle.

4. a) Le résultat de 2. s'applique au couple $(\sum\limits_{k=2}^{n} X_k, X_1)$ d'où $P(X_1 > \sum\limits_{k=2}^{n} X_k) = E(e^{-\lambda \sum_{k=2}^{n} X_k})$ puis par indépendance des variables aléatoires $e^{-\lambda X_k}$:

$$P(X_1 > \sum_{k=2}^{n} X_k) = \prod_{k=2}^{n} E(e^{-\lambda X_k}) .$$

Or $E(\mathrm{e}^{-\lambda X_k}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-2\lambda t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ (on peut également invoquer un argument de symétrie), d'où :

$$P(X_1 > \sum_{k=2}^{n} X_k) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot$$

b) L'événement $[M > \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k] = [M > (\sum_{k=1}^{n} X_k) - M]$ est l'union des événements $[X_j > \displaystyle\sum_{1 \le k \le n, k \ne j} X_k]$ qui sont disjoints deux à deux, et tous de même probabilité, égale à $\dfrac{1}{2^{n-1}}$; d'où :

$$P([M > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} X_k]) = \frac{n}{2^{n-1}} \cdot$$

Sujet S 180

Corrigé de l'exercice sans préparation

L'application $P := t \longmapsto \|a - tb\|^2 = t^2\|b\|^2 - 2t(a|b) + \|a\|^2$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ car la famille (a, b) est libre donc $f = \sqrt{P}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(t) = \dfrac{t\|b\|^2 - (a|b)}{\|a - tb\|} \cdot$

On en déduit, en posant $t_0 = \dfrac{(a|b)}{\|b\|^2}$, que f est strictement décroissante sur $]-\infty, t_0]$ et strictement croissante sur $[t_0, +\infty[$ et admet donc un minimum en t_0 et uniquement en ce point.

Interprétation : Le vecteur $t_0 b$ est la projection orthogonale de a sur la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(b)$ puisque $t_0 b \in D$ et $(a - t_0 b|b) = 0$ soit $a - t_0 b \in D^\perp$. Le fait que f soit minimale en t_0 est conforme au fait que pour tout $y \in D$, $\|a - y\| \geq \|a - p_D(a)\|$ avec égalité si et seulement si $y = p_D(a)$.

Exercice principal

1. Question de cours

   Énoncer le théorème concernant la réduction des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien et démontrer la propriété concernant les sous-espaces propres d'un tel endomorphisme.

   Dans la suite de l'exercice, on considère un espace euclidien $(E, (\ |\ ))$ de dimension $n \geq 2$.

   On note $T(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E qui sont symétriques, de rang inférieur ou égal à 1 et tels que pour tout $x \in E$, $(u(x)|x) \geq 0$.

2. Si $a \in E$, on note u_a l'application de E dans E qui à tout vecteur x de E associe $u_a(x) = (a|x)a$.

   a) Montrer que pour tout $a \in E$, $u_a \in T(E)$.

   b) Si a est un vecteur non nul de E, préciser les valeurs propres et sous-espaces propres de u_a.

3. Soit u un élément non nul de $T(E)$ et b un vecteur non nul de $\operatorname{Im} u$.

   a) Montrer que b est vecteur propre de u associé à une valeur propre $\mu \geq 0$.

   b) Montrer que pour tout vecteur x de E, $u(x) = \dfrac{\mu}{\|b\|^2}(x|b)b$.

   c) En déduire qu'il existe un vecteur a de E tel que $u = u_a$.

   d) L'application φ de E dans $T(E)$ qui à a associe $\varphi(a) = u_a$ est-elle surjective ? injective ?

4. Soit a un vecteur non nul de E et f un endomorphisme de E

   a) Pour $x \in E$, expliciter $f \circ u_a(x)$.

   b) Montrer que $f \circ u_a$ est symétrique si et seulement si a est vecteur propre de f.

   c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f \circ u_a$ appartienne à $T(E)$.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in E^2$ pour que $u_a \circ u_b = u_b \circ u_a$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f, g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont croissantes et bornées.

Étudier le signe de la covariance des variables aléatoires $f(X)$ et $g(X)$: on pourra pour t réel considérer la variable aléatoire $(f(X) - f(t))(g(X) - g(t))$

Corrigé de l'exercice principal

1. Cours
2. a) L'appplication u_a est bien linéaire par linéarité à droite du produit scalaire, de rang inférieur ou égal à 1 car $\operatorname{Im} u_a \subset \operatorname{Vect}(a)$, symétrique car $(u_a(x)|y) = (a|x)(a|y) = (x|u_a(y))$ et telle que pour tout x de E, $(u_a(x)|x) = (a|x)^2 \geq 0$.

   b) Si $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E telle que $e_1 = \frac{a}{\|a\|}$, $Mat_B(u_a) = \operatorname{Diag}(\|a\|^2, 0, \dots, 0)$ donc les valeurs propres de u_a sont $\|a\|^2$ et 0 d'espaces propres associés $\operatorname{Vect}(a)$ et $\operatorname{Vect}(a)^{\perp}$.

3. a) Comme $b \in \operatorname{Im} u \setminus \{0\}$ et que u est de rang inférieur ou égal à 1, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(b)$ donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u(b) = \mu b$. De plus $(u(b)|b) = \mu\|b\|^2 \geq 0$ donc $\mu \geq 0$.

   b) Soit $x \in E$. Comme $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(b)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \alpha b$. On a alors d'une part, $(u(x)|b) = \alpha\|b\|^2$ et, d'autre part, $(u(x)|b) = (x|u(b)) = \mu(x|b)$ d'où $\alpha = \frac{\mu}{\|b\|^2}(x|b)$ et finalement, $u(x) = \frac{\mu}{\|b\|^2}(x|b)b$

   c) D'après b), on a $u = u_a$ avec $a = \frac{\sqrt{\mu}}{\|b\|}b$

   d) L'application φ est surjective d'après c) mais n'est pas injective car par exemple $\varphi(-a) = \varphi(a)$ pour tout a.

4. a) Pour tout vecteur x de E, $f \circ u_a(x) = (a|x)f(a)$

   b)
   - Si $f(a) = \lambda a$, $f \circ u_a = \lambda u_a$ est symétrique puisque u_a l'est.
   - D'après a), pour tout x de E, $(f \circ u_a(x)|a) = (a|x)(f(a)|a) = (x|(f(a)|a)a)$ et $(x|f \circ u_a(a)) = (x|\|a\|^2 f(a))$ donc si $f \circ u_a$ est symétrique, on a pour tout x de E, $(x|(f(a)|a)a - \|a\|^2 f(a)) = 0$ soit $f(a) = \frac{(f(a)|a)}{\|a\|^2}a$ donc a vecteur propre de f

   c) D'après a), $f \circ u_a$ est toujours de rang inférieur ou égal à 1, et d'après b), $f \circ u_a$ est symétrique si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = \lambda a$. Dans ces conditions $(f \circ u_a(x)|x) = \lambda(a|x)^2$. On en déduit que $f \circ u_a \in T(E)$ si et seulement si a est vecteur propre de f associé à une valeur propre positive ou nulle.

5. Pour tout x de E, $u_a \circ u_b(x) = (a|b)(b|x)a$ et $u_b \circ u_a(x) = (a|b)(a|x)b$ donc si u_a et u_b commutent, ou bien $(a|b) = 0$ ou bien pour tout $x \in E$, $(b|x)a - (a|x)b = 0$ ce qui implique (a, b) liée. Réciproquement si $b = \lambda a$, $u_b = \lambda^2 u_a$ commute avec u_a.

   u_a et u_b commutent si et seulement si les vecteurs a et b sont orthogonaux ou colinéaires.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Notons que toutes les espérances considérées dans la suite existent car elles concernent des variables aléatoires bornées.

Comme f et g sont croissantes, pour tout réel t, la variable aléatoire $(f(X) - f(t))(g(X) - g(t))$ est à valeurs positives donc d'espérance positive soit

$$\forall t \in \mathbb{R}, E(f(X)g(X)) - f(t)E(g(X)) - g(t)E(f(X)) + f(t)g(t) \geq 0$$

Posons $X(\Omega) = \{x_k,\, k \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ et pour tout $k \in I$, $p_k = P(X = x_k)$
On a alors pour tout $k \in I$, $p_k\big(E(f(X)g(X)) - f(x_k)E(g(X)) - g(x_k)E(f(X)) + f(x_k)g(x_k)\big) \geq 0$
puis, en sommant sur $k \in I$, compte-tenu de la formule de transfert,

$$E(f(X)g(X)) - E(f(X))E(g(X)) - E(g(X))E(f(X)) + E(f(X)E(g(X)) = Cov(f(X), g(X)) \geq 0$$

Exercice principal

1. Question de cours

   Énoncer un théorème permettant de déterminer la nature d'une série numérique à l'aide d'un équivalent de son terme général.

Dans la suite de l'exercice, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on note $\mathcal{V}$ l'ensemble des variables aléatoires T définies sur cet espace, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T \geq n) > 0$.

Si $T \in \mathcal{V}$, on note $u(T)$ la suite de terme général $u_n = P_{[T\geq n]}(T = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que si $T \in \mathcal{V}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{[T\geq n]}(T = n) \in [0, 1[$.

3. a) Si $T \in \mathcal{V}$, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T \geq n)$ en fonction des termes de la suite $u(T)$.
   b) Pour quels éléments de $T \in \mathcal{V}$, la suite $u(T)$ est-elle constante ?

4. Soit $T \in \mathcal{V}$. On pose $u(T) = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que la série $\sum u_n$ est divergente.

5. Réciproquement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $[0, 1[$ telle que la série $\sum u_n$ est divergente, montrer qu'il existe une variable aléatoire T telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T \geq n) > 0$ et $u_n = P_{[T\geq n]}(T = n)$.

Exercice sans préparation

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $B' = (e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, 3e_3)$.

1. Existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ ayant les mêmes composantes dans ces deux bases ?

2. Plus généralement, si B et B' sont deux bases de $\mathbb{R}^n$, à quelle condition existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ ayant les mêmes composantes dans ces deux bases ?

Corrigé de l'exercice principal

1. Cours

2. On a toujours $P_{[T\geq n]}(T=n)\in[0,1]$ et si cette probabilité conditionnelle valait 1, on aurait $P(T=n)=P(T\geq n)$ ou encore $P(T\geq n+1)=0$ ce qui est exclu par hypothèse.

3. a) Si $u(T)=(u_n)$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{P(T=n)}{P(T\geq n)}$ et $P(T=n)=P(T\geq n)-P(T\geq n+1)$ d'où $P(T\geq n+1)=(1-u_n)P(T\geq n)$.

   On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{P(T\geq n)=\prod_{k=0}^{n-1}(1-u_k)}$

   b) *Analyse :* Si $T\in\mathcal{V}$ est telle que $u(T)$ est constante égale à p, alors $p\in]0,1[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(T\geq n)=(1-p)^n$ donc $P(T=n)=(1-p)^n-(1-p)^{n+1}=(1-p)^n p$ autrement dit $T+1$ suit une loi géométrique.
   Synthèse : Réciproquement, si $T+1\hookrightarrow G(p)$ avec $p\in]0,1[$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(T\geq n)=(1-p)^n>0$ et $P_{[T\geq n]}(T=n)=\dfrac{(1-p)^n p}{(1-p)^n}=p$ donc $u(T)$ est constante.

   Donc $\boxed{u(T) \text{ est constante si et seulement si } T+1\hookrightarrow G(p) \text{ avec } p\in]0,1[}$

4. Comme T est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $P(T\geq n)\underset{n\to+\infty}{\to}0$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathrm{Log}(1-u_k)=\mathrm{Log}\,P(T\geq n)\underset{n\to+\infty}{\to}-\infty$ donc la série $\sum\mathrm{Log}(1-u_n)$ diverge. Dans ces conditions, ou bien (u_n) ne tend pas vers 0 et alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente, ou bien $u_n\sim-\mathrm{Log}(1-u_n)$ et alors $\sum u_n$ diverge d'après la question de cours. Dans tous les cas $\boxed{\sum u_n \text{ est divergente}}$

5. Soit $(u_n)\in[0,1[^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ diverge.

   • D'après 3.a), si T est une variable aléatoire telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(T\geq n)>0$ et $u_n=P_{[T\geq n]}(T=n)$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(T\geq n)=\prod\limits_{k=0}^{n-1}(1-u_k)$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$P(T=n)=u_n\prod_{k=0}^{n-1}(1-u_k)\,\cdot$$

   • Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_n=u_n\prod\limits_{k=0}^{n-1}(1-u_k)$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_n\in[0,1]$.

   Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, la propriété : $H(n)$: $\sum\limits_{k=0}^{n}p_k=1-\prod\limits_{k=0}^{n}(1-u_k)$ (l'idée de cette récurrence provient toujours de 3.a))

   $H(0)$ est vraie car $1-\prod\limits_{k=0}^{0}(1-u_k)=u_0=p_0$

Supposons $H(n)$. Alors $\sum_{k=0}^{n+1} p_k = 1 - \prod_{k=0}^{n}(1-u_k) + u_{n+1}\prod_{k=0}^{n}(1-u_k) = 1-(1-u_{n+1})\prod_{k=0}^{n}(1-u_k)$ ce qui établit $H(n+1)$.

Comme $\sum u_n$ diverge, il en va de même pour la série $\sum \mathrm{Log}(1-u_n)$ et comme cette série est à termes négatifs ses sommes partielles tendent vers $-\infty$. On en déduit que $\prod_{k=0}^{n}(1-u_k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc la série $\sum p_n$ converge et a pour somme 1 d'après $H(n)$.

Il existe donc une variable aléatoire T telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T=n) = p_n$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T \geq n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k = \prod_{k=0}^{n-1}(1-u_k) > 0$ et

$$P_{[T\geq n]}(T=n) = \frac{u_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-u_k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(1-u_k)} = u_n$$

CQFD

Sujet S 185

Corrigé de l'exercice sans préparation

$x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3 = x_1(e_1+e_2)+x_2(2e_2+e_3)+x_3(3e_3)$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
L'existence d'un triplet non nul solution du système précédent est assurée par le fait que 1 est valeur propre de la matrice de passage (triangulaire) entre les deux bases B et B'. Si on mène les calculs on trouve que les vecteurs ayant mêmes coordonnées dans les deux bases sont ceux de la droite $\mathrm{Vect}(2e_1 - 2e_2 + e_3)$

Plus généralement, il existera un vecteur de mêmes composantes dans les bases B et B' de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si 1 est valeur propre de la matrice de passage de B à B'.

EXERCICE PRINCIPAL

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et Z une variable aléatoire définie sur cet espace et suivant la loi normale centrée réduite.
Pour tout réel $\nu > 0$, S_ν désigne une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi $\gamma(\nu)$.

1. Question de cours

   a) Donner, pour tout réel $\nu > 0$, l'expression d'une densité de S_ν.

   b) Dans le cas où ν est strictement supérieur à 2, donner une représentation graphique de l'unique densité de S_ν qui est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs, strictement croissante et non majorée.

   Justifier la convergence et trouver la limite de la suite $(\dfrac{\lfloor \nu_n \rfloor}{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (X_k - 1)$.

   a) Justifier la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers Z.

   b) En déduire la convergence en loi de la suite des variables aléatoires $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_n}} (S_{\lfloor \nu_n \rfloor} - \lfloor \nu_n \rfloor)$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $\delta_n = \nu_n - \lfloor \nu_n \rfloor$.

   a) Justifier, pour tout $x \geq 0$, l'inégalité : $P([S_{\delta_n} \geq x]) \leq P([S_1 \geq x])$.

   b) Montrer que la suite des variables aléatoires $\dfrac{S_{\delta_n}}{\sqrt{\nu_n}}$ converge en probabilité vers 0.

5. À l'aide des résultats précédents, établir la convergence en loi vers Z de la suite des variables aléatoires $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_n}} (S_{\nu_n} - \nu_n)$.

Exercice sans préparation

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel euclidien et $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in E^p$.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{p} \|x - u_k\|^2$ admet un minimum global sur E et le calculer.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Cours

b) Les deux premières dérivées de la densité continue f sont données sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

- $f'(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} \mathrm{e}^{-x} x^{\nu-2}(\nu - 1 - x)$
- $f''(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} \mathrm{e}^{-x} x^{\nu-3}\big[(x-\nu+1)^2 - (\nu-1)\big]$

La représentation graphique de f possède une tangente horizontale à l'origine et en son point d'abscisse $\nu - 1$ (qui correspond à la valeur maximale de f). Les deux points d'inflexion de la courbe correspondent à ses points d'abcisse $\nu - 1 \pm \sqrt{\nu - 1}$.

2. L'encadrement $1 \leq \dfrac{\lfloor \nu_n \rfloor}{\nu_n} < 1 + \dfrac{1}{\nu_n}$ prouve la convergence de la suite vers 1, puisque $1/\nu_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

3. a) Il s'agit d'une application directe du théorème limite central puisque l'espérance et la variance des variables i.i.d. X_n sont égales à 1.

b) Par la propriété d'additivité des lois gamma , $S_{\lfloor \nu_n \rfloor}$ suit la loi $\gamma(\lfloor \nu_n \rfloor)$. Par conséquent, la variable aléatoire $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_n}}\,(S_{\lfloor \nu_n \rfloor} - \lfloor \nu_n \rfloor)$ a la même loi que la variable aléatoire

$$\frac{1}{\sqrt{\nu_n}} \sum_{k=1}^{\lfloor \nu_n \rfloor} (X_k - 1) = \frac{\sqrt{\lfloor \nu_n \rfloor}}{\sqrt{\nu_n}}\, Z_{\lfloor \nu_n \rfloor}$$

qui, grâce au résultat de la question précédente et au théorème de Slutsky, converge en loi vers la variable aléatoire Z quand n tend vers l'infini.

4. a) Si U désigne une variable aléatoire indépendante de S_{δ_n}, suivant la loi $\gamma(1 - \delta_n)$, on a :

$$P([S_{\delta_n} \geq x]) \leq P([S_{\delta_n} + U \geq x]) = P([S_1 \geq x]) \ .$$

b) Soit $\varepsilon > 0$.

$$P([\frac{S_{\delta_n}}{\sqrt{\nu_n}} \geq \varepsilon]) = P([S_{\delta_n} \geq \varepsilon\sqrt{\nu_n}]) \leq P([S_1 \geq \varepsilon\sqrt{\nu_n}])$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini (puisque $\varepsilon\sqrt{\nu_n}$ tend vers l'infini et que la fonction de répartition de S_1 tend vers 1 en $+\infty$).

5. En introduisant pour tout n une variable aléatoire U_n indépendante de $S_{\lfloor \nu_n \rfloor}$ et suivant la loi $\gamma(\delta_n)$ (et presque sûrement nulle lorsque ν_n est entier), on peut affirmer, grâce à la propriété d'additivité des lois gamma, que la variable aléatoire $\frac{1}{\sqrt{\nu_n}}(S_{\nu_n} - \nu_n)$ a la même loi que

$$\frac{1}{\sqrt{\nu_n}}(S_{\lfloor \nu_n \rfloor} + U_n - \nu_n) = \frac{1}{\sqrt{\nu_n}}(S_{\lfloor \nu_n \rfloor} - \lfloor \nu_n \rfloor) + \frac{U_n - \delta_n}{\sqrt{\nu_n}}$$

qui, grâce encore au théorème de Slutsky (et au résultat de la question 3b), converge en loi vers Z quand n tend vers l'infini, parce que $\frac{U_n - \delta_n}{\sqrt{\nu_n}}$ converge en probabilité vers 0, ce qui résulte des inégalités $P([|\frac{U_n - \delta_n}{\sqrt{\nu_n}}| \geq \varepsilon]) \leq P([\frac{U_n + \delta_n}{\sqrt{\nu_n}} \geq \varepsilon]) \leq P([S_1 \geq -\delta_n + \varepsilon\sqrt{\nu_n}])$, par le même argument qu'en 4b.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Le plus rapide est d'observer, dans la grande tradition de Pythagore, Koenig et Huygens, que pour le vecteur moyen $\mu = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} u_k$, on a :

$$\sum_{k=1}^{p} \|x - u_k\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|x - \mu + \mu - u_k\|^2 = p\,\|x - \mu\|^2 + \sum_{k=1}^{p} \|\mu - u_k\|^2$$

puisque $\sum_{k=1}^{p} < x - \mu, \mu - u_k > = < x - \mu, \sum_{k=1}^{p}(\mu - u_k) > = 0$.

Il en résulte que le minimum global de g sur E est égal à $\sum_{k=1}^{p} \|\mu - u_k\|^2$ et que ce minimum n'est atteint qu'au point $x = \mu$.

Cependant, une approche analytique est sans doute plus naturelle pour les candidats initiés aux charmes des fonctions de plusieurs variables.
Ils pourront calculer avec volupté le gradient de g et découvrir que μ en est l'unique point critique. La positivité en tout point de la matrice hessienne leur permettra ensuite de compléter l'argument :

- Expression matricielle de $f(x)$

$$f(x) = p\,{}^tX\,X - 2\,{}^tX\sum_{k=1}^{p} U_k + \sum_{k=1}^{p} {}^tU_k\,U_k$$

- Gradient de f

$$\nabla(f)(x) = 2p\,(X - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} U_k) = 2p\,(X - M)$$

- Matrice hessienne de f

$$\nabla^2(f)(x) = 2p\,I_n$$

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

Soit U et V deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
Pour $\omega \in \Omega$, on note Q_ω le polynôme défini par : $Q_\omega = X^2 - 2U(\omega)X + V(\omega)$.
On pose :

- $A = \{\,\omega \in \Omega\,;$ le polynôme Q_ω possède une racine double $\}$
- $B = \{\,\omega \in \Omega\,;$ le polynôme Q_ω possède deux racines réelles distinctes $\}$.

2. a) Montrer que U^2 est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
b) Montrer que A est un événement et donner la valeur de $P(A)$.

3. a) Montrer que $P\big([U > V]\big) = \dfrac{1}{2}\cdot$
b) Comparer $P(B)$ à $\dfrac{1}{2}\cdot$

4. On pose : $Z = U^2 - V$.
a) Déterminer une densité f_Z de la variable aléatoire Z.
b) Quelle est la fonction de répartition F_Z de Z ?
c) Calculer $P(B)$.

5. Pour $\omega \in \Omega$, on pose : $R_\omega = X^3 - 2U(\omega)X^2 + V(\omega)$.
Quelle est la probabilité que le polynôme R_ω admette une racine multiple ?

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n, diagonalisables et ayant chacune n valeurs propres distinctes.

Montrer que les matrices A et B commutent si et seulement si elles sont diagonalisables avec la même matrice de passage.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours.

2.a) U^2 est une application de Ω dans $[0,1]$. Si $x<0$, $P(U^2 \leq x) = 0$ et si $x \geq 1$, $P(U^2 \leq x) = 1$.
Si $0 \leq x < 1$, $[U^2 \leq x] = [0 \leq U \leq \sqrt{x}] \in \mathcal{A}$,
ce qui montre que U^2 est une variable aléatoire et $P(U^2 \leq x) = \sqrt{x}$.
La fonction de répartition de U^2 est continue et de classe C^1 sauf en 0 ; U^2 possède une densité donnée par :

$$f_{U^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

b) $A = [U^2 - V = 0]$ est un événement car U^2 et V étant deux variables aléatoires à densité, $U^2 - V$ est une variable aléatoire à densité.
Donc, $A \in \mathcal{A}$ et $P(A) = 0$.

3.a) On a : $\Omega = [U > V] \cup [V > U] \cup [U = V]$ et $P(U = V) = 0$ car $U - V$ est à densité et $P(U > V) = P(V > U)$ par symétrie, donc $P(U > V) = P(V > U) = 1/2$.
b) Comme U est à valeurs dans $[0,1]$, $\forall \omega \in \Omega$, $U^2(\omega) \leq U(\omega)$, donc, $\forall \omega \in \Omega$, $U^2(\omega) - V(\omega) \leq U(\omega) - V(\omega)$.
Or, $B = [U^2 - V > 0]$, donc, $B \subset [U - V > 0] = [U > V] \Longrightarrow P(B) \leq P(U > V) = 1/2$.

4.a) $Z = U^2 - V$ est une variable aléatoire à densité à valeurs dans $[-1,1]$ de densité f_Z telle que :

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U^2}(t) f_V(t-x)\,\mathrm{d}t, \text{ soit encore, } f_Z(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \displaystyle\int_0^{1+x} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \sqrt{1+x} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

b) La fonction de répartition F_Z est donnée par : $F_Z(x) = \begin{cases} 2/3(1+x)^{\frac{3}{2}} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x + 2/3(1 - x^{\frac{3}{2}}) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

c) On a : $P(B) = P(Z > 0) = \displaystyle\int_0^1 f_Z(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

• Supposons d'abord que A et B soient diagonalisables dans une même base $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbf{R}^n$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^n$ à la base $\mathcal{U}$.
Les matrices $D = P^{-1}AP$ et $\Delta = P^{-1}BP$ commutent puisqu'elles sont toutes les deux diagonales.
D'où :

$$AB = PDP^{-1}P\Delta P^{-1} = PD\Delta P^{-1} = P\Delta DP^{-1} = P\Delta P^{-1}PDP^{-1} = BA\ .$$

• Supposons maintenant que A et B commutent.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes de A et $u_1, \dots, u_n$ n vecteurs propres de A, chaque u_i étant associé à λ_i. On sait que $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$ et que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(E_{\lambda_i}) = 1$.

On peut écrire : $AB(u_i) = B(A(u_i)) = B(\lambda_i u_i) = \lambda_i B(u_i)$.

Si $B(u_i) \neq 0$, alors $B(u_i)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i.
Or, le sous-espace propre E_{λ_i} est de dimension 1 : c'est une droite vectorielle engendrée par u_i.
Il existe donc un réel μ tel que $B(u_i) = \mu u_i$, ce qui montre que u_i est vecteur propre de B.

Si $B(u_i) = 0$, comme $u_i \neq 0$, u_i est vecteur propre de B associé à la valeur propre 0.

Bilan : $\mathcal{U}$ est aussi une base de vecteurs propres pour B.

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

    a) Énoncer le théorème de la bijection.

    b) Donner une condition suffisante pour qu'une fonction de répartition soit bijective.

Soit G_1, G_2, ..., G_n ... une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_N = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant N} G_n$ et F_N la fonction de répartition de Z_N.

2. a) Justifier l'existence de l'espérance de Z_N.

    b) Soit le code Scilab

```
Y = zeros(1,5);
for k = [1:5]
  n = 1000;
  N = 10^k;
  X = grand(N,n,"nor",0,1);
  Xmax = max(X,'r'); //vecteur-ligne des maxima des colonnes de X
  Y(k) = mean(Xmax);
end;
disp(Y./sqrt(2*[1:5]*log(10)));
```

    qui retourne l'affichage :

```
0.7093236    0.8216955    0.8755261    0.8996736    0.9138259
```

    Expliquer comment il fonctionne et ce qu'il calcule.

3. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

    a) À l'aide d'une intégration par parties, justifier l'équivalence :

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \qquad \text{lorsque } x \to +\infty\,.$$

    b) Justifier l'équivalence : $\dfrac{\Phi^{-1}(y)^2}{2} \sim \ln \dfrac{1}{1-y}$ lorsque $y \to 1$

    c) En déduire, pour tout réel $\delta \in]0,1[$, un équivalent de $\Phi^{-1}(\delta^{1/n})$ quand n tend vers $+\infty$.

4. a) Justifier l'égalité : $E(Z_N) = \displaystyle\int_0^1 \Phi^{-1}(u^{1/N})\,\mathrm{d}u$.

    b) Formuler une conjecture sur le comportement de $E(Z_N)$ lorsque $N \to \infty$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant $f^3 = f^2$.

1. Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker f^2$.
2. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$, donner un endomorphisme non diagonalisable f tel que $f^3 = f^2$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Cours

b) Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité admettant une densité continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors F définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

2. a) Par suite de l'inégalité $|Z_N \leq \sum_{i=1}^{N} |G_i|$ et de l'existence des $E(|G_i|)$, l'espérance de Z_N existe, par domination.

b) Pour cinq valeurs de N (10, 100, 1000, 10000 et 100000), le programme *Scilab* simule un échantillon de taille $n = 1000$ de la variable Z_N. Il calcule la moyenne empirique de cet échantillon, qui par la loi des grands nombres fournit une valeur approchée de $E(Z_N)$.

La division de cette moyenne par $\sqrt{2\ln(N)}$ fournit ensuite des valeurs approchées de $\dfrac{E(Z_N)}{\sqrt{2\ln(N)}}$ pour les diverses valeurs de N.

3. a) Lorsque $x > 0$, une intégration par parties permet d'écrire $\Phi(x) = \dfrac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} - \Psi(x)$, pour $\Psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}\, dt$.

Comme $0 \leq \Psi(x) \leq \dfrac{\Psi(x)}{x^2}$ pour tout $x > 0$, $\Psi(x)$ est négligeable devant $\Phi(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

Il en résulte que $\Phi(x) \sim \dfrac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$ lorsque $x \to +\infty$

b) De l'équivalence précédente, on déduit en posant $y = 1 - \Phi(x)$

$$\sqrt{2\pi}\,(\Phi^{-1}(1-y))\ (1-y)\ \exp\left(\frac{(\Phi^{-1}(1-y))^2}{2}\right) \longrightarrow 1 \qquad \text{lorsque } y \to 1$$

puis, grâce à l'égalité $\Phi^{-1}(1-y) = -\Phi^{-1}(y)$ et par passage aux logarithmes :

$$\frac{\Phi^{-1}(y)^2}{2} \sim \ln\frac{1}{1-y} \qquad \text{lorsque } y \to 1\ .$$

c) Par substitution de $\delta^{1/n}$ à y dans l'équivalent précédent, on trouve :

$$\Phi^{-1}(\delta^{1/n}) \sim \sqrt{2\ln(n)}$$

4. a) L'égalité $E(Z_N) = \displaystyle\int_0^1 \Phi^{-1}(u^{1/N})\,du$ provient de la formule de transfert, puisque la variable aléatoire ${F_N}^{-1}(U) = \Phi^{-1}(U^{1/N})$ suit la même loi que Z_N si U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

b) On peut penser, au vu de l'équivalence précédente et sans contradiction avec les simulations à partir de Scilab, que l'espérance de Z_N est équivalente à $\sqrt{2\ln(N)}$ quand N tend vers l'infini.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. Un raisonnement par analyse-synthèse fournit l'unique décomposition de tout vecteur x de E comme la somme de deux vecteurs appartenant aux deux noyaux :

$$x = f^2(x) + (x - f^2(x)) \ .$$

2. L'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $f^3 = f^2$, mais il n'est pas diagonalisable, puisque la somme des dimensions de ses deux sous-espaces propres (associés aux valeurs propres 1 et 0) est égale à 2.