Les sujets suivants posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L, constituent un premier échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2015 (annales 1).

1. SUJETS DE L'OPTION SCIENTIFIQUE

EXERCICE PRINCIPAL S 106

1. Question de cours : Donner la définition du moment d'ordre k d'une variable aléatoire réelle.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et X une variable aléatoire réelle discrète finie, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ respectivement.

Pour tout réel t, on définit la fonction de moments M de X par $M(t) = E(\mathrm{e}^{tX})$, c'est-à-dire l'espérance de la variable aléatoire e^{tX}.

2.a) Déterminer la fonction de moments d'une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

b) En déduire la fonction de moments d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

3.a) Montrer que M est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives en 0 à l'aide des moments de la variable aléatoire X.

b) Montrer que pour tout réel t, on a $M(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} M^{(k)}(0)$, où $M^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de M.

4. On considère n réels distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

a) Soit A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible.

On utilisera l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui, à tout polynôme Q associe le n-uplet $\big(Q(x_1), Q(x_2), \ldots, Q(x_n)\big)$ pour montrer que la matrice ${}^tA$ est inversible.

b) En déduire que la fonction de moments d'une variable aléatoire discrète finie détermine sa loi.

5. On pose pour tout t réel : $K(t) = \ln\big(M(t)\big)$.

a) Montrer que K est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Que représentent $K'(0)$ et $K''(0)$ pour la variable aléatoire X ?

c) Montrer que les fonctions M et K sont convexes sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 106

1. Soit P un trinôme tel : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) + P'(x) + P''(x) \geqslant 0$.

2. Plus généralement, soit P un polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}$) tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

a) Que peut-on dire de la parité de n ?

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) + P'(x) + P''(x) + \ldots + P^{(n)}(x) \geqslant 0$.

EXERCICE PRINCIPAL S 131

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que $f(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}$.

2.a) Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on note Y une variable aléatoire à densité, de densité f.

b) Établir l'existence de l'espérance $E(Y)$ et de la variance $V(Y)$. Les calculer.

3.a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y.

b) Justifier l'existence de la fonction réciproque, notée F_Y^{-1} de la fonction F_Y.

c) Écrire un programme en Scilab permettant de tracer les courbes représentatives de F_Y et de F_Y^{-1} pour x élément de $[-2, 2]$.

d) Donner l'allure des courbes représentatives de F_Y et de F_Y^{-1} dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

4. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $F_Y^{-1}(X)$?

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x F_Y(x) f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et vaut $\dfrac{3}{8}$.

c) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x F_Y^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$ (on utilisera le changement de variable $u = F_Y^{-1}(x)$ après avoir justifié sa validité).

d) On pose : $Z = X - F_Y^{-1}(X)$. Justifier l'existence de $E(Z^2)$. Calculer $E(Z^2)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 131

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit la matrice $M_x = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de x la matrice M_x est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_x est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Les sujets suivants posés aux candidats des options scientifique et économique, constituent la suite de l'échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2015 (annales 2).

1. SUJETS DE L'OPTION SCIENTIFIQUE

EXERCICE PRINCIPAL S 132

1. Question de cours : Formule du rang pour une application linéaire ; application à la caractérisation des isomorphismes.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$ et $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^{n-1})$ sa base canonique.
On considère n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vérifiant $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

2. Montrer que l'application $T : E \to \mathbb{R}^n$, $P \mapsto T(P) = (P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n))$ est bijective.

3. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on désigne par L_i le polynôme de E tel que $T(L_i) = e_i$.
a) Préciser pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, la valeur de $L_i(a_j)$.
b) Montrer que $\mathcal{B}' = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de E et que pour tout $P \in E$, on a $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i$.

Dans la suite de l'exercice, on note $A = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

4. Dans cette question uniquement, on supose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.
a) Déterminer les polynômes L_1, L_2 et L_3 et expliciter la matrice A.
b) Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
c) En déduire les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$.

5.a) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
b) Établir la relation : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$.
c) Montrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1$ et que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0$.
d) Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de A.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 132

On considère une expérience consistant à lancer un dé équilibré n fois de manière consécutive. L'expérience en question est décrite par le programme Scilab ci-dessous pour la valeur $n = 10$ (et répétée ici 1000 fois) :

```
Nexp=1000;
n=10;
u=floor(2*rand(n,Nexp))+1;
test=0;
for k=1:Nexp
    ok=1;
    for i=2:n
     if (u(i-1,k)==1) & (u(i,k)==1) then
        ok=0;
     end
    end
    test=test+ok;
end
Pn=test/Nexp;
disp(Pn)
```

1. Que représente la variable `Pn` affichée par le programme ?
2. En notant P_n le résultat de l'expérience précédent pour une valeur de n quelconque, montrer que

$$P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}P_{n-2}$$

puis trouver la limite de P_n quand n tend vers l'infini.

EXERCICE PRINCIPAL S 136

1. Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

2.a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

b) On note $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ le reste de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ et r_n.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur l'intervalle $\left[\frac{1}{n(n+1)} - 1, \frac{1}{n(n+1)} + 1\right]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \frac{1}{k(k+1)}\right)$.

3.a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, quelle est la loi de $X_k - \frac{1}{k(k+1)}$? Rappeler son espérance et sa variance.

b) Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4.a) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a :

$$P\left(Y_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}\right) \leqslant P\big(Y_n \leqslant \varepsilon\big).$$

b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P\big(Y_n \leqslant \varepsilon\big)$.

c) En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \leqslant 1\right)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 136

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $n \geqslant 2$. On considère des endomorphismes f, p et q de E, ainsi que des scalaires distincts λ et μ tels que pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, on a : $f^k = \lambda^k p + \mu^k q$.

1. Montrer que $(f - \lambda \mathrm{id}_E) \circ (f - \mu \mathrm{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. En déduire que l'ensemble des valeurs propres de f est inclus dans $\{\lambda, \mu\}$ et que f est diagonalisable.

EXERCICE PRINCIPAL S 138

1. Question de cours : Formule de Taylor à l'ordre r avec reste intégral pour une fonction de classe C^{r+1}.

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Pour tout réel λ, on note E_λ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(px+q) = \lambda f(x)\,.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = p\,u_n + q$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

b) Soit $f \in E_\lambda$. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n)$ en fonction de λ et de u_0.

3.a) Déterminer E_1.

b) On suppose que $\lambda \neq 1$ et que l'ensemble E_λ n'est pas réduit à la fonction nulle.

Montrer que $|\lambda| < 1$ et préciser alors la valeur de $f(1)$ pour toute fonction $f \in E_\lambda$.

4. Dans cette question, on prend $|\lambda| < 1$ et on suppose l'existence d'une fonction f non constante de E_λ, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On note $f^{(n)}$ la fonction dérivée n-ième de f.

a) Établir l'implication : $f \in E_\lambda \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \in E_{\frac{\lambda}{p^n}}$.

b) En déduire l'existence d'un entier naturel k tel que $f^{(k)}$ soit la fonction nulle.

c) Étudier le cas où $\lambda = 0$.

d) Soit k_0 le plus petit entier tel que $f^{(k_0+1)}$ soit la fonction nulle.

Montrer que $\lambda = p^{k_0}$ et que pour tout $i \in [\![0, k_0[\![$, on a $f^{(i)}(1) = 0$.

e) En déduire l'expression de f. Conclure.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 138

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi exponentielle de paramètre $a > 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la variable aléatoire N_x par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ N_x = \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N}^* / X_k > x\} & \text{si cet ensemble n'est pas vide} \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de N_x et préciser son espérance $E(N_x)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} P\big(N_x > E(N_x)\big)$.

EXERCICE PRINCIPAL S 139

1. Question de cours : Rappeler la formule donnant la densité d'une somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes.

2. Soit a, b et α trois réels strictement positifs vérifiant $0 < \alpha < a^2 \leqslant b^2$.

a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\alpha \left(\frac{a}{\sqrt{t}} - 1\right)\left(\frac{b}{\sqrt{\alpha - t}} - 1\right) dt$. Cette intégrale est notée $I_{a,b}(\alpha)$.

b) Calculer $I_{a,b}(\alpha)$ à l'aide du changement de variable $t = \alpha \cos^2 u$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on place deux points M et N tels que leurs abscisses respectives X_M et X_N suivent la loi uniforme sur $]0, a[$ et leurs ordonnées Y_M et Y_N suivent la loi uniforme sur $]0, b[$.
On suppose que les quatre variables aléatoires X_M, X_N, Y_M et Y_N sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et sont indépendantes.
On note D la variable aléatoire égale à la longueur du segment $[M, N]$: $D^2 = (X_N - X_M)^2 + (Y_N - Y_M)^2$.

3.a) Quelle est la loi suivie par $-X_M$?

b) On pose : $Z_a = (X_N - X_M)$ et $Z_b = (Y_N - Y_M)$. Déterminer les lois de probabilité de Z_a et Z_b respectivement.

c) Montrer qu'une densité $f_{Z_a^2}$ de Z_a^2 est donnée par : $f_{Z_a^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}} - 1\right) & \text{si } 0 < x < a^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

4. Soit $\theta < a$. Calculer $P([D \leqslant \theta])$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 139

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0$.

2. Soit Q un polynôme tel que $Q(f) = 0$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que $P(f) = 0$. Montrer que toute racine de Q est valeur propre de f.

EXERCICE PRINCIPAL S 140

1. Question de cours : Définition et propriétés d'un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien.

On considère un espace vectoriel euclidien E non réduit à $\{0_E\}$.

2. Soit h un endomorphisme symétrique de E.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} h$ et $\operatorname{Im} h$ sont supplémentaires orthogonaux.

b) Montrer qu'un projecteur orthogonal de E est symétrique.

3. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Établir l'égalité : $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

4. On considère deux projecteurs orthogonaux p et q de E. On pose : $f = p \circ q$.

a) On pose : $F = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q$ et $G = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux.

b) Montrer que la restriction de f à $\operatorname{Ker} q + (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)$ est identiquement nulle.

c) Montrer que $\operatorname{Im} p$ est stable par f.

d) On note $\overline{f}$ l'endomorphisme de $\operatorname{Im} p$ induit par f. Montrer que $\overline{f}$ est un endomorphisme symétrique de $\operatorname{Im} p$.

5. Déduire de l'étude précédente que f est diagonalisable.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 140

Un signal binaire (de valeur -1 ou 1) doit transiter par n relais au passage desquels il est susceptible de changer de valeur avec une probabilité τ. L'expérience est simulée 1000 fois par le programme Scilab ci-dessous :

```
Nexp=1000;n=100;test=0;proba=0.3;
for i=1:Nexp
ok=0;
p0=-2*floor(2*rand())+1;
p=p0;
for i=1:n
    u=rand()
    if(u<proba)then
      p=-p;
    end
end
if (p==p0) then
  ok=1;
end
test=test+ok;
end
disp(test/Nexp)
```

Préciser le cas choisi et donner la valeur limite que retournera (approximativement) le programme pour n grand.

EXERCICE PRINCIPAL S 143

On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$.

1. Question de cours : Soit f un endomorphisme de E, x un vecteur propre de f associé à la valeur propre θ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réels.

   Exprimer $P(f)(x)$ en fonction de P, θ et x. Montrer que toute valeur propre de f est racine de n'importe quel polynôme annulateur de f.

Dans toute la suite de l'exercice, on note f un endomorphisme de E, on se donne deux réels λ et μ non nuls et distincts ainsi que deux endomorphismes u et v de E non identiquement nuls.

On suppose que $f = \lambda u + \mu v$, $f^2 = f \circ f = \lambda^2 u + \mu^2 v$ et $f^3 = f \circ f \circ f = \lambda^3 u + \mu^3 v$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.

2.a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(0) = 0$, on a : $P(f) = P(\lambda)u + P(\mu)v$.

b) En déduire un polynôme annulateur P_0 de f. Que peut-on dire du spectre de f ?

3.a) Trouver un polynôme $Q_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $u = Q_1(f)$ et un polynôme $Q_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $v = Q_2(f)$.

b) Montrer que $u \circ v = v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que u et v sont des projecteurs de E.
Pour la dernière propriété, on pourra effectuer la division euclidienne de Q_1^2 par P_0.

4. *On admet* que pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E, on a : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

a) Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Im} v) \geqslant \dim E$.

b) En déduire que f est diagonalisable et préciser ses sous-espaces propres.

5.a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $f^k = \lambda^k u + \mu^k v$.

b) Montrer que f est bijective si et seulement si $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0_E\}$.

c) Montrer que f est bijective si et seulement si $u + v = \mathrm{Id}_E$.

d) Montrer que si f est bijective, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a : $f^k = \lambda^k u + \mu^k v$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 143

Dans une classe de 30 élèves, on considère une expérience consistant d'abord à demander à chaque élève sa date d'anniversaire. La suite de l'expérience (simulée 1000 fois sur ordinateur) est décrite par le programme Scilab ci-dessous :

```
Nexp=1000;Neleve=30;test=0;
for n=1:Nexp
anniv=zeros(Neleve,1)
 for i=1:Neleve
  anniv(i)=floor(365*rand())+1;
 end
 anniv=gsort(anniv);ok=0;
 for j=1:Neleve-1
   if anniv(j)==anniv(j+1) then
    ok=1;
   end
 end
 test=test+ok;
end
disp(test/Nexp);
```

gsort = tri par ordre croissant

1. Le code retourne une valeur (à chaque fois différente) autour de 0.71. Que représente cette valeur ?
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité simulée par ce programme.
3. Ecrire un programme Scilab permettant de déterminer le nombre d'élève à partir duquel cette valeur dépasse 0.5.

EXERCICE PRINCIPAL S 142

1. Question de cours : Définition et propriétés de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On considère deux variables aléatoires X et N définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- X admet pour densité la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$;
- $N(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $P(N = -1) = P(N = 1) = \dfrac{1}{2}$;
- Les variables aléatoires X et N sont indépendantes, c'est-à-dire : quels que soient les intervalles I et J de $\mathbb{R}$, $P\big((N \in I) \cap (X \in J)\big) = P(N \in I) \times P(X \in J)$.

On pose : $Y = NX$.

2.a) On note G la fonction de répartition de Y. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x)$.

b) En déduire que Y admet pour densité de probabilité la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{\lambda}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda|x|}$.

c) Donner l'allure de la courbe (C) représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

d) Montrer que Y admet des moments de tous ordres. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, calculer l'espérance de Y^r.

3. Dans cette question, on prend $\lambda = \sqrt{2}$.

a) Vérifier que Y est centrée réduite.

b) Soit $\alpha \in]0, 1/2[$. Montrer que la longueur du plus court segment $[a, b]$ tel que $P(Y \in [a, b]) = 1 - \alpha$ est égale à $\sqrt{2}\ln(1/\alpha)$ et est obtenue pour un segment centré en 0 (de la forme $[-c, c]$).

On pourra visualiser le problème à l'aide de la courbe (C).

c) Comparer, lorsque α est proche de 0, la longueur du segment précédent à celle du segment correspondant pour la loi normale centrée réduite.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 142

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension $n \geqslant 1$. On note $A = \{(u, v) \in \big(\mathcal{L}(E)\big)^2 / u \circ v = 0\}$

Déterminer $\sup\limits_{(u,v) \in A} \big(\mathrm{rang}(u) + \mathrm{rang}(v)\big)$.

EXERCICE PRINCIPAL S 147

1. Question de cours : Rappeler la définition d'une application surjective et d'une application injective.

2.a) Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est surjectif (c'est-à-dire que l'application $x \longmapsto P(x)$ est une application surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) si et seulement si le degré du polynôme P est impair.

b) Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est injectif (c'est-à-dire que l'application $x \longmapsto P(x)$ est une application injective sur $\mathbb{R}$) si et seulement si le polynôme P' (dérivée de P) ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$ sans être identiquement nul.

3. Dans cette question, P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que si λ est une racine réelle multiple de P, alors P est annulateur de la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

b) Soit $Q = X^2 + aX + b$ un polynôme unitaire de degré 2, à coefficients réels et de discriminant strictement négatif.

Montrer que si Q est un diviseur de P, il existe deux matrices distinctes de $\text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ qui annulent le polynôme P.

c) Montrer que l'application $M \longmapsto P(M)$ n'est pas injective sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Dans cette question, soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que l'application $x \longmapsto P(x)$ soit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si M est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice $P(M)$ est diagonalisable et possède le même nombre de valeurs propres que M.

b) Montrer que l'application $M \longmapsto P(M)$ est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 147

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, centrée et admettant une variance σ^2.

1. Montrer que pour toute variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant un moment d'ordre 2, on a :

$$E(Y) \leqslant \sqrt{E(Y^2)\,P(Y > 0)}\,.$$

2. En déduire que : $\forall \varepsilon > 0,\ P(X > \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}\,.$

EXERCICE PRINCIPAL S 149

1. Question de cours : Théorème de transfert pour une variable aléatoire à densité.

Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Dans tout l'exercice, U désigne une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
Soit g une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$. On pose : $I = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire T_n par : $T_n = \dfrac{1}{n}\lfloor 1 + nU \rfloor$, où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t.

a) Déterminer la loi de T_n.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big(g(T_n)\big)$ en fonction de I.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V\big(g(T_n)\big)$ en fonction de I et J.

3. On pose : $X = g(U)$ et $Y = \dfrac{1}{2}\big(g(U) + g(1-U)\big)$.

a) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ en fonction de I.

b) Soit f et h deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose pour tout λ réel : $Q(\lambda) = \int_0^1 \big(\lambda f(t) - h(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$.

Établir l'inégalité : $\left(\int_0^1 f(t)h(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_0^1 h^2(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

c) En déduire que $V(Y) \leqslant V(X)$.

4. On suppose dans cette question que la fonction g est croissante sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère deux variables aléatoires U_n et W_n indépendantes et de même loi que la variable aléatoire T_n de la question 2.

a) Justifier l'inégalité : $E\big([g(U_n) - g(W_n)][g(1-U_n) - g(1-W_n)]\big) \leqslant 0$.

b) En déduire que $E\big(g(T_n)g(1-T_n)\big) \leqslant E\big(g(T_n)\big)E\big(g(1-T_n)\big)$.

5. Montrer que $V(Y) \leqslant \dfrac{1}{2}V(X)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 149

On note E_n l'espace vectoriel des matrices à $2n$ lignes et $2n$ colonnes de la forme :

$$\begin{pmatrix}
a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\
0 & a_2 & & 0 & 0 & & b_2 & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\
0 & 0 & & a_n & b_n & & 0 & 0 \\
0 & 0 & & b_n & a_n & & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\
0 & b_2 & & 0 & 0 & & a_2 & 0 \\
b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1
\end{pmatrix}.$$

1. Trouver la dimension et une base de E_n.
2. Justifier la diagonalisabilité des matrices de E_n et trouver leurs vecteurs-colonnes propres.
3. Quelles sont les matrices inversibles de E_n ?

EXERCICE PRINCIPAL S 151

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ un produit scalaire sur E et $x \mapsto \|x\|$ la norme euclidienne sur E qui lui est associée.
On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(v_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ de vecteurs unitaires (c'est-à-dire de norme 1) de E.

1. Question de cours : Énoncer le théorème de Pythagore.

2. On suppose que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont deux à deux orthogonaux.
Montrer que pour tout n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, on a : $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}$.

3. On ne suppose plus que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont deux à deux orthogonaux.
On lance une pièce de monnaie bien équilibrée n fois de suite et, pour $j \in [\![1,n]\!]$, on note :

$$X_j = \begin{cases} -1 & \text{si au } j\text{-ème lancer, la pièce retombe sur Face,} \\ 1 & \text{si au } j\text{-ème lancer, la pièce retombe sur Pile.} \end{cases}$$

a) Préciser un modèle $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de cette expérience tel que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ soient des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$ mutuellement indépendantes pour P. On se place dorénavant dans ce modèle.
b) Montrer que l'application $U : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par la relation : $U(\omega) = \|X_1(\omega)\, v_1 + X_2(\omega)\, v_2 + \cdots + X_n(\omega)\, v_n\|^2$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Cette variable aléatoire U pourra être notée $\|X_1\, v_1 + X_2\, v_2 + \cdots + X_n\, v_n\|^2$.
c) Déterminer $E(U)$.
En déduire qu'il existe un n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \leqslant \sqrt{n}$.
d) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
  (i) pour tout n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \ldots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}$;
  (ii) la famille $(v_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est orthonormale.
On commencera par prouver que, pour tout couple de vecteurs $(a,b) \in E^2$, $\|a+b\|^2 = \|a-b\|^2$ si et seulement si a et b sont orthogonaux. Autrement dit, les diagonales d'un parallélogramme $\mathcal{P}$ sont d'égales longueurs si et seulement si $\mathcal{P}$ est un rectangle.
e) En déduire que si les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ne sont pas deux à deux orthogonaux, il existe un n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| > \sqrt{n}$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 151

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente à termes strictement positifs et de limite nulle.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{S_n}$.

1. Étudier la nature de la série $\sum_{k \geqslant 0} v_k$ en fonction de la nature de la série $\sum_{k \geqslant 0} u_k$.

2. Quel résultat obtient-on dans le cas où $u_n = \dfrac{1}{n}$?

EXERCICE PRINCIPAL S 154

1. Question de cours : Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'un endomorphisme.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose l'existence d'un réel k tel que ${}^tA\,A + A\,{}^tA = k\,I$.

2. On pose : $S = {}^tA\,A + A\,{}^tA$, et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $q(X) = {}^tXSX$.

Étudier le signe de $q(X)$ et en déduire que $k \geqslant 0$.

3. On suppose que $k = 0$. Montrer que $A = 0$.

On suppose dorénavant que $k > 0$.

4. Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ ayant pour matrices respectives, A et ${}^tA$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Établir la relation : $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \{0\}$.

5. On pose : $B = {}^tA\,A$. Soit λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé.

a) Montrer que $\lambda \geqslant 0$.

b) Montrer que X est un vecteur propre de la matrice $A\,{}^tA$ pour une valeur propre μ que l'on précisera.
En déduire que $\lambda \in [0, k]$.

c) On suppose dans cette question que $\lambda \in]0, k[$. Montrer que les vecteurs AX et ${}^tAX$ sont des vecteurs propres de B pour la valeur propre μ.

d) On se place dans la situation de la question c). On note E_λ et E_μ les sous-espaces propres de la matrice B pour les valeurs propres λ et μ respectivement. On note φ l'application de E_λ dans E_μ définie par $\varphi(X) = AX$.
Montrer que l'application φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Que peut-on dire si $\lambda = 0$ ou $\lambda = k$?

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 154

Soit $p \in]0, 1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} E\big(\mathrm{e}^{\frac{S_n}{n}}\big)$.

2. Étudier la convergence en probabilité de la suite de variables aléatoires $\big(\mathrm{e}^{\frac{S_n}{n}}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.