

Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L, constituent un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2013.

1. SUJETS DE L'OPTION SCIENTIFIQUE

Exercice principal S46

1. Question de cours : Énoncer le théorème de la bijection.
- 2.a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{8}} dt$ et en donner la valeur.
- b) Établir l'inégalité stricte : $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{8}} dt > 1$.
3. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'un unique réel u_n vérifiant $\int_{\frac{1}{n}}^{u_n} e^{-\frac{t^2}{8}} dt = \frac{1}{n}$.
- 4.a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les inégalités : $(u_n - \frac{1}{n}) e^{-\frac{u_n^2}{8}} \leq \frac{1}{n} \leq (u_n - \frac{1}{n}) e^{-\frac{1}{8n^2}}$.
- b) En déduire que u_n est équivalent à $\frac{2}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.
5. Trouver un équivalent de la différence $(u_n - \frac{2}{n})$, quand n tend vers $+\infty$, de la forme $\frac{\alpha}{n^\beta}$ où α et β sont des réels, indépendants de n , à déterminer.

Exercice sans préparation S46

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, admettant une densité f et vérifiant la propriété suivante : la variable aléatoire $X + \frac{1}{X}$ possède une espérance mathématique.

1. Établir l'inégalité : $E\left(X + \frac{1}{X}\right) \geq 2$.
2. Montrer que l'inégalité précédente n'est jamais une égalité, mais que $E\left(X + \frac{1}{X}\right)$ peut prendre des valeurs arbitrairement proches de 2.

Exercice principal S51

1. Question de cours : Développement limité d'ordre 1 d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x - y)^2 e^{2x-y}$.

2.a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifier que : $\forall A \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(A) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$.

b) Montrer que f possède une infinité de points critiques. Trouver ceux en lesquels f admet un extremum local ou global.

3. Soit (α, β) un couple de réels différent de $(0, 0)$ et g une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles vérifiant : $\forall A \in \mathbb{R}^2, \alpha \frac{\partial g}{\partial x}(A) + \beta \frac{\partial g}{\partial y}(A) = 0$.

Pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $h(u, v) = g(\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v)$.

a) Montrer que $h(u + \varepsilon, v) = h(u, v) + o(\varepsilon)$ (quand ε tend vers 0).

b) En déduire l'existence d'une fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, h(u, v) = \varphi(v)$.

4. Montrer que f est la seule fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall A \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(A) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R}, f(0, t) = t^2 e^{-t} \end{cases}.$$

Exercice sans préparation S51

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On pose : $M = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $P(X = Y)$ et $P(XY > 0)$.

2. Trouver la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

Exercice principal S52

1. Question de cours : Inégalité des accroissements finis pour une fonction réelle d'une variable réelle.

Soit f une fonction définie et continue sur $]0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ soit convergente.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n(f) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - n \int_0^1 f(t) dt$.

2.a) Proposer une interprétation de $\frac{u_n(f)}{n}$ en terme d'aires et indiquer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$, dans le cas où f admet un prolongement continu au segment $[0, 1]$.

b) On suppose dans cette question que f est la fonction $t \mapsto t^2$.

Calculer $u_n(f)$ et vérifier que la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

3. Dans cette question, f est une fonction continue positive et croissante sur $]0, 1]$.

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$.

b) Montrer que la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive et majorée.

4. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que si f admet un prolongement de classe C^1 au segment $[0, 1]$, alors la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

5. Pour tout réel α , on note f_α la fonction définie sur $]0, 1]$ par $f_\alpha(t) = t^\alpha$.

Déterminer pour quelles valeurs de α l'intégrale $\int_0^1 f_\alpha(t) dt$ est convergente et la suite $(u_n(f_\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$ bornée.

Exercice sans préparation S52

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$

1. Que peut-on dire de la matrice d'un élément $f \in \mathcal{A}(E)$ dans une base orthonormée de E ?

2. On note $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble des endomorphismes g de E qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{A}(E)$, c'est-à-dire qui vérifient :

$$\forall f \in \mathcal{A}(E), f \circ g = g \circ f.$$

a) Montrer que lorsque la dimension de E est égale à 2, $\mathcal{C}(E)$ est un plan vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $\mathcal{A}(E)$.

b) Trouver $\mathcal{C}(E)$ lorsque la dimension de E est strictement supérieure à 2.

Exercice principal S54

1. Question de cours : Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Que peut-on dire de sa matrice dans une base orthonormale ?

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ est muni du produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pour lequel la base canonique est orthonormale.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ dont M est la matrice dans la base canonique.

2.a) Montrer que la matrice M n'est pas inversible.

b) Montrer que l'endomorphisme $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ est symétrique.

3.a) Montrer que pour tout couple (x, y) de vecteurs de $\mathbb{R}^5$, on a : $\langle \varphi(x), y \rangle = -\langle x, \varphi(y) \rangle$.

b) Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme φ^2 sont négatives ou nulles.

c) En déduire que M n'est pas diagonalisable.

4.a) Montrer que le noyau de φ et l'image de φ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathbb{R}^5$.

b) Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de φ^2 et x un vecteur propre de φ^2 associé à λ , alors les deux vecteurs x et $\varphi(x)$ engendrent un plan de $\mathbb{R}^5$ qui est stable par l'endomorphisme φ .

c) Établir l'existence de deux réels non nuls α et β , et d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle la matrice de φ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice sans préparation S54

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $] -1, +1[$.

1. Trouver toutes les fonctions ϕ définies, continues et strictement monotones sur $] -1, +1[$ telles que la variable aléatoire $Y = \phi(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

2. En déduire une fonction paire ψ définie sur $] -1, +1[$ telle que la variable aléatoire $\psi(X)$ suive aussi la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice principal S55

1. Question de cours : Rappeler l'énoncé du théorème de la limite centrée.

2. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et convergeant en probabilité vers 0.

a) Établir pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité : $P(|U_n + V_n| \geq \varepsilon) \leq P(|U_n| \geq \varepsilon/2) + P(|V_n| \geq \varepsilon/2)$.

b) En déduire que la suite $(U_n + V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

Dans la suite de l'exercice, θ et ρ désignent deux paramètres réels inconnus, avec $\rho > 0$.

Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction $f_{\theta, \rho}$ définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}, f_{\theta, \rho}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\exp\left(-\frac{1}{2}(x - \theta - \rho)^2\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \theta + \rho)^2\right) \right)$, où $\exp$ désigne la fonction exponentielle.

3.a) Montrer que X admet un moment d'ordre 4.

b) Calculer l'espérance de X et montrer que la variance de X est égale à $1 + \rho^2$.

4. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X .

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 - 1$.

a) Montrer que $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs de ρ^2 . Ces estimateurs sont-ils sans biais ?

b) Proposer un intervalle de confiance de θ utilisable pour de grands échantillons de la loi de X .

Exercice sans préparation S55

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a et b deux réels tels que $ab \neq 0$. On note $M(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1.a) Calculer $M(a, b)^2$

b) Montrer que $M(a, b)^2$ est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

2. Montrer que $M(c, d) = \begin{pmatrix} 0 & c & c & \cdots & c \\ d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $M(a, b)$ si et seulement si $ab = cd$.

Exercice principal S60

1. Question de cours : Définition et propriétés des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.
2. Dans cette question, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ que l'on munit du produit scalaire usuel pour lequel la base canonique (e_1, e_2, e_3) est orthonormée.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, 2x_1 + 2x_3).$$

- a) Trouver la matrice de u dans la base canonique et en déduire que u est symétrique.
- b) Déterminer une base de $\text{Ker } u$, puis montrer que $(u(e_1), u(e_2))$ est une base orthogonale de $\text{Im } u$.
- c) Déterminer la matrice du projecteur orthogonal sur $\text{Im } u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Dans la suite de l'exercice, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien et on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E , x un vecteur de E et $y = p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F . Montrer que pour tout $z \in F$, on a : $\|x - z\| \geq \|x - y\|$, avec égalité si et seulement si $z = y$.
4. Soit u un endomorphisme symétrique de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On note p le projecteur orthogonal sur $\text{Im } u$.
 - a) Montrer que $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont supplémentaires et orthogonaux.
 - b) Soit $x \in E$. Justifier l'existence d'un vecteur $y_0 \in E$ tel que $u(y_0) = p(x)$ et trouver parmi les vecteurs $y \in E$ vérifiant $u(y) = p(x)$, celui qui a la plus petite norme ; on le note $v(x)$.
 - c) Montrer que v est linéaire, puis calculer $u \circ v$ et $u \circ v \circ u$.
 - d) Calculer $p(x)$ et $v(x)$ pour $x = (1, 1, 1)$, lorsque u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de la question 2.

Exercice sans préparation S60

Soit X une variable aléatoire possédant une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}$ et nulle hors de l'intervalle $] -1, +1[$.

1. Montrer que X possède une variance, qui est strictement comprise entre 0 et 1.
2. Montrer que toute valeur de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ est effectivement possible pour la variance de X .

Exercice principal S62

1. Question de cours : Définition de la limite d'une suite de nombres réels.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^* : v_n = \sup(u_k, k \geq n)$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

b) On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^* : S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right)$.

4.a) Montrer que pour tout entier $k \geq n$, on a : $P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.

b) Que vaut $P(S_n = k)$ lorsque $k < n$?

5. Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , bornée et de dérivée bornée sur $[1, +\infty[$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, la série $\sum_{k \geq 0} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \binom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k$ est convergente.

On pose alors pour tout $x \in]0, 1[: K_n(x) = x^n \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \binom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k$

b) Établir l'existence de $E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$ et exprimer $E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$ en fonction de $K_n(p)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq A\varepsilon + B P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right).$$

d) Soit $t \in [1, +\infty[$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left|K_n\left(\frac{1}{t}\right) - f(t)\right|$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice sans préparation S62

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

On pose : $F = \{P \in E, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$

et $H = \{P \in E, P(X) = P(-X)\}$.

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice principal S63

1. Question de cours : Théorème de transfert.

Soit p un réel vérifiant $\frac{1}{2} < p < 1$. On pose $q = 1 - p$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X_0 est la variable certaine de valeur 0 et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout t réel, on pose : $Y_n = 2X_n - n$ et $g_n(t) = E(e^{-tY_n})$, où E désigne l'espérance..

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a : $g_n(t) = (pe^{-t} + qe^t)^n$.

3.a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité : $P(Y_n \leq 0) \leq g_n(t)$.

b) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ (indépendant de n) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P(Y_n \leq 0) \leq \alpha^n$.

4. Dans cette question, soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On pose $Z_0 = 0$ et $Z_n = \min(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$.

a) Déterminer $Z_n(\Omega)$. Calculer $P(Z_n = -n)$.

b) Pour tout $k \in [0, n-1]$, on pose : $A_k = \bigcup_{j=k+1}^n [Y_j \leq 0]$. Montrer que l'on a : $P(A_k) \leq \frac{\alpha^{k+1}}{1-\alpha}$.

c) Soit $k \in [0, n-1]$ et $r \in [-n, 0]$. Établir les inégalités :

$$P(Z_n = r) \leq P(A_k \cap (Z_n = r)) + P(Z_k = r) \quad \text{et} \quad E(Z_n) \geq -n\alpha^n + E(Z_{n-1}).$$

5. Montrer que la suite $(E(Z_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice sans préparation S63

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On suppose que f n'est pas diagonalisable et qu'il vérifie : $(f - \text{id}) \circ (f^2 + \text{id}) = 0$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{id})$ et $\text{Ker}(f^2 + \text{id})$ sont supplémentaires.

2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice principal S74

1. Question de cours : Définition des valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires de E .

2. Déterminer la dimension de E^* .

3. Dans cette question uniquement, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p ($p \in \mathbb{N}$).

Soit f et g deux éléments de E^* définis par : pour tout $P \in E$, $f(P) = P(0)$ et $g(P) = \int_0^1 P(t)dt$.

Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Ker}(g)$. Les formes linéaires f et g sont-elles proportionnelles ?

4. Soit f et g deux éléments non nuls de E^* tels que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

a) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$.

b) Soit $x_0 \notin \text{Ker}(f)$. On pose : $h = g(x_0)f - f(x_0)g$. Montrer que $h = 0$. Conclusion.

5. Dans cette question, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On identifie A et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ est dit *stable* par A lorsque pour tout $X \in F$ on a $AX \in F$.

a) Soit $X \in F$ avec $X \neq 0$. Montrer que $\text{Vect}(X)$ est stable par A si et seulement si X est vecteur propre de A .

b) Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et L la forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par $L(x, y, z) = ax + by + cz$.

Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par A si et seulement si $\text{Ker}(L) \subset \text{Ker}(LA)$.

En déduire que $\mathcal{P}$ est stable par A si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de tA (transposée de A).

Exercice sans préparation S74

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi normale d'espérance m et de variance égale à 1. Soit b un réel strictement positif fixé.

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, l'application $a \mapsto P(a < X < a + b)$ admet un maximum atteint en un point a_0 que l'on déterminera.

2. Exprimer la valeur de ce maximum à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

3. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice principal S79

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée notée $\| \cdot \|$.

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles. On pose :

$$\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R}^n, f(-x) = f(x)\} \text{ et } \mathcal{I} = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R}^n, f(-x) = -f(x)\}.$$

Enfin, on note $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^n$ et telles que, pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle u, v \rangle = 0$, on a : $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

1. Question de cours : Théorème de Pythagore.

2. Établir les relations : $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ et $\mathcal{H} = (\mathcal{H} \cap \mathcal{P}) \oplus (\mathcal{H} \cap \mathcal{I})$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[n\lambda]}{n}$, où $[n\lambda]$ désigne la partie entière du réel $n\lambda$.

4. Soit $g \in \mathcal{H} \cap \mathcal{I}$.

a) En exploitant l'hypothèse $n \geq 2$, montrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $g(2x) = 2g(x)$.

b) Montrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a : $g(rx) = rg(x)$.

En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $g(\lambda x) = \lambda g(x)$.

c) Montrer que la fonction g est linéaire.

5. Soit $h \in \mathcal{H} \cap \mathcal{P}$.

a) Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\|x\| = \|y\|$. Calculer $\langle x - y, x + y \rangle$ et en déduire que $h(x) = h(y)$.

b) Justifier l'existence d'une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $h(x) = \varphi(\|x\|^2)$.

c) On admet que φ est continue. Montrer que pour tous réels positifs s et t , on a : $\varphi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t)$.

d) Établir alors l'existence d'une constante c telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $h(x) = c\|x\|^2$.

6. En déduire la forme générale de toute fonction $f \in \mathcal{H}$.

Exercice sans préparation S79

Soit $X_1, X_2, \dots, X_p$ ($p \geq 2$) des variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que pour tout $i \in [1, p]$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_i > 0$.

On pose pour tout $p \geq 2$: $S_p = \sum_{i=1}^p X_i$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle du vecteur $(X_1, X_2, \dots, X_{p-1})$ sachant $(S_p = n)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'espérance conditionnelle $E(X_1 | X_1 + X_2 = n)$ en fonction de n , λ_1 et λ_2 .

Exercice principal S82

1. Question de cours : Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n ($n \geq 2$) et φ un endomorphisme de E .

On note id_E l'endomorphisme identité de E , 0_E l'endomorphisme nul de E et on pose : $\varphi^0 = \text{id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^k = \varphi \circ \varphi^{k-1}$.

On dit que φ est cyclique s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, \varphi(x_0), \dots, \varphi^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

2. On suppose que $\varphi^n = 0_E$ et $\varphi^{n-1} \neq 0_E$.

a) Montrer que φ est cyclique.

b) Déterminer les valeurs propres de φ . L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. On suppose que φ est cyclique. Soit ψ un endomorphisme de E tel que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

En utilisant une base du type $(x_0, \varphi(x_0), \dots, \varphi^{n-1}(x_0))$, établir l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\psi = P(\varphi)$.

4. On suppose que φ est cyclique. On note x_0 un vecteur de E vérifiant les deux conditions suivantes :

$$(x_0, \varphi(x_0), \dots, \varphi^{n-1}(x_0)) \text{ est une base de } E \text{ et } \varphi^n(x_0) = x_0.$$

a) Montrer que $\varphi^n = \text{id}_E$. En déduire que φ est bijectif.

b) Quelles sont les valeurs propres possibles de φ ?

c) Montrer que φ est diagonalisable.

Exercice sans préparation S82

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose : $Y = \lfloor X \rfloor$ et $Z = X - Y$.

1. Montrer que Y est une variable aléatoire et déterminer sa loi. Que peut-on dire de $Y + 1$?

2. Montrer que Z est une variable aléatoire et déterminer sa loi.

3. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice principal S84

1. Question de cours : Donner deux conditions suffisantes et non nécessaires de diagonalisabilité d'une matrice.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [1,n]^2$, on a : $a_{i,j} = \min(i,j)$.

2.a) Soit $L = (l_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice triangulaire inférieure et $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure. On pose : $M = LU = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Montrer que pour tout $(i,j) \in [1,n]^2$, on a : $m_{i,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{i,k} u_{k,j}$.

b) En déduire l'existence d'une matrice triangulaire supérieure T telle que $A = {}^t T T$.

c) Montrer que les matrices A et T sont de même rang.

d) Justifier que A est diagonalisable et déduire des questions précédentes que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

e) Justifier l'inversibilité de A et déterminer son inverse.

3. Soit $p \in]0,1[$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p .

On pose pour tout $k \in [1,n]$, $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$.

On note Σ_S la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire $(S_1, S_2, \dots, S_n)$.

a) Montrer que les valeurs propres de Σ_S sont toutes positives.

b) Pour tout $(i,j) \in [1,n]^2$, déterminer $\text{Cov}(S_i, S_j)$.

c) Exprimer Σ_S en fonction de A .

Exercice sans préparation S84

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{n+k} \right)$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Exercice principal S85

1. Question de cours : Définition de la convergence d'une série réelle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$.

2.a) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $(u_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers 0.

b) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est absolument convergente.

3.a) Soit $x \in [-1, 1[$. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^x t^{k-1} dt$ et en déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n u_k(x) = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

b) Montrer que si $x \in [-1, 1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

c) En déduire que $\forall x \in [-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est convergente et donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

4.a) Établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-1}$ et calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n^2-1}$ est convergente et calculer sa somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$.

c) L'application f de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$ est-elle continue ?

Exercice sans préparation S85

On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois de suite de manière indépendante et on s'intéresse à l'événement $E_n =$ "au cours des n lancers, deux Pile successifs n'apparaissent pas". On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n la probabilité de E_n .

Trouver une relation entre P_n , P_{n-1} et P_{n-2} et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0$.

Exercice principal S88

1. Question de cours : Définition et propriétés d'une fonction convexe sur un intervalle.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, dérivable et décroissante. On suppose que les deux intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt$ sont convergentes. On veut montrer que pour tout réel $\mu \geq 0$, on a :

$$\mu^2 \int_{\mu}^{+\infty} f(t)dt \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt$$

On note F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$ et $G(x) = F(\sqrt{x})$.

2. Montrer que F et G sont décroissantes et convexes sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. En majorant $u^2 G(u^2)$ pour tout $u \geq 0$, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xG(x) = 0$.

4.a) Établir pour tout réel $X \geq 0$, la relation : $\int_0^X G(x)dx = XG(X) + \int_0^{\sqrt{X}} t^2 f(t)dt$.

b) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} G(x)dx$ et l'égalité : $\int_0^{+\infty} G(x)dx = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt$.

5.a) Soit OAB un triangle rectangle en O et M un point de son hypoténuse AB . On note P et Q les projections orthogonales de M sur OA et OB respectivement.

Montrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est toujours inférieure ou égale à la moitié de l'aire du triangle OAB .

b) À partir de considérations géométriques sur la courbe représentative de la fonction convexe G , démontrer l'inégalité annoncée en préambule.

Exercice sans préparation S88

1. Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prend les valeurs 0, 1 et 2 avec les probabilités p_0, p_1 et p_2 respectivement. On suppose que $E(Y) = 1$ et $E(Y^2) = 5/3$. Calculer p_0, p_1 et p_2 .

2. Soit $x_0, x_1, \dots, x_n, (n+1)$ réels distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui, à tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le $(n+1)$ -uplet $(Q(x_0), Q(x_1), \dots, Q(x_n))$.

a) Montrer que φ est une application linéaire bijective.

b) Déterminer la matrice Φ de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

3. Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $x_0, x_1, \dots, x_n$.

On suppose que $E(X), E(X^2), \dots, E(X^n)$ sont connus. Peut-on déterminer la loi de X ?