SUJET E1

Exercice principal E1

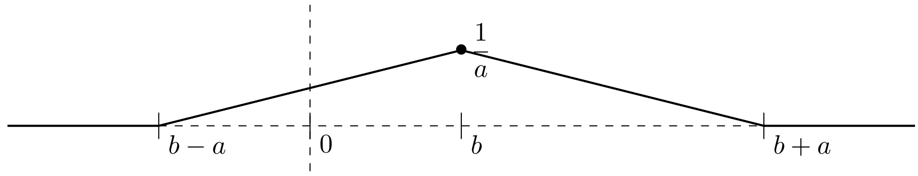
Soient a et b deux réels tels que $a > 0$ et la fonction

$$f_{a,b} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{x+a-b}{a^2} & \text{si } b-a \leq x \leq b \\ \dfrac{-x+a+b}{a^2} & \text{si } b < x \leq b+a \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. **Question de cours :** Définition d'une densité de probabilité.
2. Tracer la représentation graphique de $f_{a,b}$ pour $a = 2$ et $b = 1$. Montrer que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.
3. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $X_{a,b}$ une variable aléatoire de densité $f_{a,b}$ et X_a une variable aléatoire admettant $f_{a,0}$ comme densité.
   (a) Montrer que $X_{a,b} - b$ et X_a ont la même loi.
   (b) Quelle est l'espérance de $X_{a,b}$?
   (c) Quelle est la variance de $X_{a,b}$?
4. On suppose dans cette question que l'on observe une suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes admettant $f_{a,b}$ comme densité, où a et b sont inconnus.
   Proposer une suite d'estimateurs sans biais de b. Est-elle convergente ?
5. On suppose dans cette question que l'on observe une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes admettant $f_{a,0}$ comme densité, où a est inconnu et on veut estimer a à partir de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad T_n = \max(Y_1, ..., Y_n)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de T_n.
   (b) Montrer que l'espérance de T_n est :
   $$\mathbb{E}(T_n) = a - \frac{a}{2^n(2n+1)} - \int_0^a \big(F(x)\big)^n dx$$
   où F est la fonction de répartition de Y_1.
   (c) T_n est-il un estimateur sans biais de a ?
   (d) On admet que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^a \big(F(x)\big)^n dx = 0$. Que peut-on en déduire ?

Solution :

1. Programme ECE1 page 20
   f est densité de probabilité ssi f est continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, f est positive et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
2. Pour $a = 2$, $b = 1$, $a - b = 1$, $a + b = 1$ et le maximum de la fonction vaut $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2}$



$f_{a,b}$ est continue, positive sur $\mathbb{R}$

et la surface entre la courbe de $f_{a,b}$ et l'axe des x est un triangle d'aire $\dfrac{1}{2} \times 2a \times \dfrac{1}{a} = 1$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b} = \int_{b-a}^{b+a} f_{a,b} = 1$

Conclusion $\boxed{f_{a,b} \text{ est une densité de probabilité.}}$

3. (a) On peut remarquer que $f_{a,b}(x) = f_{a,0}(x-b)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Ainsi si l'on note F_Z la fonction de répartition de $X_{a,b} - b$, pour tout $z \in \mathbb{R}$

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(X_{a,b} - b \leqslant z) = \mathbb{P}(X_{a,b} \leqslant b+z) = \int_{-\infty}^{b+z} f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{b+z} f_{a,0}(x-b)\,\mathrm{d}x.$$

Avec un changement de variable $y = x - b$, on a $F_Z(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{z} f_{a,0}(x)\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{X_{a,b} - b \text{ et } X_a \text{ ont la même loi.}}$

(b) $f_{a,b}$ est nulle hors de $[b-a, b+a]$ donc $X_{a,b}$ admet des moments de tous ordres.

f_a est paire donc $E(X_a) = 0$ et $\boxed{E(X_{a,b}) = b.}$

(c) $\displaystyle\int_0^a x^2 f_a(x)dx = \int_0^a \frac{1}{a^2}(-x^3 + ax^2)\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{12}$ donc

$E(X_a^2) = \dfrac{a^2}{6}$ et $\boxed{V(X_{a,b}) = V(X_a) = \dfrac{a^2}{6}.}$

4. Comme $\mathbb{E}(X_{a,b}) = b$, un estimateur sans biais de b est la moyenne empirique.

Soit $(Z_n)_{n\in N*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que $X_{a,b}$, qui admet une espérance et une variance.

donc $\boxed{\text{D'après la loi faible des grands nombres, } \overline{Z_n} \text{ est un estimateur convergent de } b.}$

5. (a) T_n est à valeurs dans $[-a, a]$.

Si $x \in [-a, 0]$ $\quad f_a(x) = \dfrac{1}{a^2}(x+a)$ et

$F(x) = P(Y_1 \leq x) = \text{aire du triangle sur } [-a, x] = \dfrac{1}{2}\dfrac{(x+a)^2}{a^2}$

Si $x \in [0, a]$ $\quad f_a(x) = 1 - \dfrac{1}{a^2}(a-x)$ et

$F(x) = P(Y_1 \leq x) = 1 - \text{aire du triangle sur } [x, a] = 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{(a-x)^2}{a^2}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(T_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [Y_k \leq x]\right) = (\mathbb{P}(Y_1 \leqslant x))^n \quad \text{(indépendance des } Y_k\text{)}.$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant -a \\ \dfrac{(x+a)^{2n}}{2^n a^{2n}} & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant 0 \\ \left(\dfrac{2ax - x^2 + a^2}{2a^2}\right)^n & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant a \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant a \end{cases}}$$

(b) Soit f_{T_n} une densité de T_n.

Si $x \in [-a, 0]$ $\quad f_{T_n}(x) = \dfrac{2n(x+a)^{2n-1}}{2^n a^{2n}}$

$$\int_{-a}^{0} x f_{T_n}(x)dx = \frac{2n}{2^n a^{2n}} \int_{-a}^{0} \left((x+a)^{2n} - a(x+a)^{2n-1}\right) dx = \frac{2n}{2^n a^{2n}} \left(\frac{a^{2n+1}}{2n+1} - \frac{a^{2n+1}}{2n}\right) = \frac{-a}{2^n(2n+1)}$$

Si $x \in [0, a]$ $\quad f_{T_n}(x) = n\dfrac{a-x}{a^2}\left(F(x)\right)^{n-1}$.

En intégrant par parties :

$$\int_0^a x f_{T_n}(x)dx = [xF_T(x)]_0^a - \int_0^a F_T(x)dx = a - \int_0^a (F(x))^n dx$$

D'où

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = a - \frac{a}{2^n(2n+1)} - \int_0^a \left(F(x)\right)^n \mathrm{d}x}$$

(c) Comme $\dfrac{a}{2^n(2n+1)} > 0$ et $\displaystyle\int_0^a \left(F(x)\right)^n dx \geq 0$, $\mathbb{E}(T_n) < a$ donc $\boxed{T_n \text{ n'est pas sans biais.}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(T_n) = 0$ donc $\boxed{(T_n) \text{ est asymptotiquement sans biais.}}$

Exercice sans préparation E1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_a = \begin{pmatrix} 2+a & 0 & 4 \\ 3 & -4+a & 12 \\ 1 & -2 & 5+a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AP.
2. A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ? Donner une matrice semblable à A.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de a, A_a est-elle diagonalisable ? Pour quelle(s) valeur(s) de a, A_a est-elle inversible ?

Solution :

1. $\boxed{AP = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$
2. En notant C_k la k-ième colonne de P, on a :
   $AC_1 = 2C_1$, $AC_2 = C_1$ et $AC_3 = 0C_3$.
   Comme $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ et $C_3 \neq 0$, A admet trois valeurs propres distinctes donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.
   0 est valeur propre donc A n'est $\boxed{\text{pas inversible.}}$
   (C_1, C_2, C_3) est une base de vecteurs propres donc P est inversible.
   Une matrice semblable à A est $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ et $A = PDP^{-1}$
3. Question supplémentaire : pour quelle(s) valeur(s) de a, A_a est-elle diagonalisable ? pour quelle(s) valeur(s) de a, A_a est-elle inversible ?
   Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\boxed{A_a = A + aI \text{ est diagonalisable}}$ dans la même base de vecteur propre que A.
   ses valeurs propres sont $2+a$, $1+a$ et a, et donc $\boxed{A_a \text{ est inversible ssi } a \notin \{0; -1; -2\}}$

SUJET E2

Exercice principal E2

On désigne par I, J et A les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. **Question de cours** : Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ soit diagonalisable.

2. Exprimer les matrices A et A^2 en fonction des matrices I et J. En déduire que A est inversible et donner une expression de A^{-1} comme combinaison linéaire de A et de I.

3. Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Montrer que si x est un vecteur propre de h associé à une valeur propre non nulle, alors $x \in \operatorname{Im}(h)$.
4. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est J.

   (a) Déterminer des bases de $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$.

   (b) La matrice J est-elle diagonalisable ? La matrice J est-elle inversible ?

   (c) Déterminer $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.
5. Montrer que A est diagonalisable dans la même base de vecteurs propres que J et donner ses valeurs propres.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
   (a) On suppose dans cette question que g est diagonalisable. On construit alors $e'_1, .., e'_n$ une base de vecteurs propres de g et un entier $r \in [|0; n|]$ tels que si $k \leqslant r$, e'_k est associé à une valeur propre non nulle et si $k > r$, e'_k est associé à la valeur propre 0.
   Déterminer une base de $\operatorname{Im}(g)$ et montrer que $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$
   (b) Peut-on dire que si $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ alors g est diagonalisable ?

Solution :

1. Programme ECE2 page 8. Un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ est diagonalisable si et seulement si
   $\boxed{\text{la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 3.}}$
2. $A = -4I + J$
   $A^2 = J^2 - 8J + 16I$ or $J^2 = 3J$ donc :
   $\boxed{A^2 = -5J + 16I = -5A - 4I}$
   On en déduit que $A\left(-\frac{1}{4}A - \frac{5}{4}I\right) = I$ donc A est inversible et $\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{4}A - \frac{5}{4}I}$
3. Si x est un vecteur propre associé à $\lambda \neq 0$, $h(x) = \lambda x$ et donc $x = \frac{1}{\lambda}h(x) \in \operatorname{Im}(h)$
   $\boxed{\text{Si } x \text{ est un vecteur propre associé à } \lambda \neq 0,\ x \in \operatorname{Im}(h)}$

4. (a) Im (f) =vect$((f(e_1), f(e_2), f(e_3))$

$\boxed{\text{Im } (f)) = \text{Vect}\,(u_1) \text{ où } u_1 = (1,1,1) \text{ et } (u_1) \text{ est une base de Im } f.}$

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$x \in \ker f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$

D'après le théorème du rang, $\dim \ker f = 2$.

Une base de $\ker(f)$ est donc $\boxed{(u_2, u_3) \text{ avec } u_2 = (-1,1,0) \text{ et } u_3 = (-1,0,1)}$

(b) $\dim(\ker(f)) = 2$ donc 0 est valeur propre de f et la dimension du sous-espace propre associé est 2.

Le vecteur u_1 vérifie $f(u_1) = 3u_1$ et est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 3. La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre (concaténation de bases de sous-espaces propres)

La somme des dimensions des sous-espaces propres de f vaut 3 donc f est diagonalisable, $\boxed{\text{donc } J \text{ est diagonalisable.}}$

$\boxed{\text{Ker } (f) \neq \{0\}, \text{ donc } J \text{ n'est pas inversible.}}$

(c) Comme dim(Im $(f)) = 1$, alors dim((Im $(f) \cap$ Ker $(f)) \in \{0; 1\}$

Or, si dim((Im $(f) \cap$ Ker $(f)) = 1$ alors Im $(f) \cap$ Ker $(f) =$ Im (f) et donc $f(u_1) = 0$. Ce n'est pas le cas.

$\boxed{(\text{ Im } (f) \cap \text{ Ker } (f)) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$

5. Soit X un vecteur propre de J, il existe un réel $\lambda \in \{0; 3\}$ tel que $JX = \lambda X$.

Or $A = -4I + J$ donc $AX = (-4I + J)X = -4X + \lambda X = (-4 + \lambda)X$

Comme X est non nul $\boxed{X \text{ est bien un vecteur propre de A.}}$

J est diagonalisable donc il existe une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de J, qui sont aussi vecteurs propres de A. $\boxed{\text{Donc } A \text{ est diagonalisable.}}$

Ses valeurs propres sont $-4 + 3 = -1$ et $-4 + 0 = -4$.

6. (a) Im $(g) = \text{Vect}\,(g(e'_1), ...g(e'_n)) = \text{Vect}\,(\lambda_1 e'_1, \cdots, \lambda_r e'_r, 0, ..0)) = \text{Vect}\,(e'_1, \cdots, e'_r)$

Mais alors si $x \in$ Im $(g) \cap$ Ker (g), il existe $x_1, ..x_r \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x = \sum_{k=1}^{r} x_k e'_k \text{ et } g(x) = \sum_{k=1}^{r} x_k f(e'_k) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k e'_k = 0.$$

Ainsi pour tout $k \in [|1, r|]$, $\lambda_k x_k = 0$ et comme $\lambda_k \neq 0$, $x_k = 0$.

$\boxed{\text{Si } g \text{ est diagonalisable, alors Ker } (g) \cap \text{ Im } (g) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}}$

(b) $\boxed{\text{Non}}$, il suffit de prendre un endomorphisme non diagonalisable tel que Ker $(g) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, par exemple l'endomorphisme induit par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice sans préparation E2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

1. On suppose dans cette question que
   — $\forall n \in \mathbb{N}\ X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$
   — $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n admet une espérance et $\lim \mathbb{E}(X_n) = 0$.
   La suite de variables aléatoires (X_n) converge-t-elle en loi ?
2. On suppose maintenant
   — $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n admet une espérance et $\lim \mathbb{E}(X_n) = 0$
   La suite de variables aléatoires (X_n) converge-t-elle en loi ?
3. On suppose dans cette question que
   — $\forall n \in \mathbb{N}\ X_n(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$
   — $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n admet une espérance et $\lim \mathbb{E}(X_n) = 0$.
   La suite de variables aléatoires (X_n) converge-t-elle en loi ?

Solution :

1. D'après l'inégalité de Markov $\mathbb{P}\left(X_n \geqslant \dfrac{1}{2}\right) \leqslant 2E(X_n)$.

   Donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_n \geqslant \dfrac{1}{2}\right) = 0$.

   En considérant l'événement contraire, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_n < \dfrac{1}{2}\right) = 1$.

   Or X_n ne prend que des valeurs entières. Donc $\mathbb{P}\left(X_n \geqslant \dfrac{1}{2}\right) = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1$.

   Ainsi $\boxed{X_n \text{ converge en loi vers la variable aléatoire certaine égale à } 0.}$
2. Pour tout entier n, on note X_n la variable aléatoire telle que :
   $X_n(\Omega) = \{-n; n\}$ et $\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{2}$.
   Alors X_n admet une espérance et $\mathbb{E}(X_n) = 0$.
   Mais $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $-n \leqslant x < n$. Donc $\mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \dfrac{1}{2}$.
   Or la fonction constante égale à $1/2$ n'est pas une fonction de répartition.
   $\boxed{\text{Donc } (X_n) \text{ ne converge pas nécessairement en loi.}}$
3. Soit x un réel strictement positif.
   D'après l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}(X_n \geqslant x) \leqslant \dfrac{E(X_n)}{x}$.
   Or $\mathbb{P}(X_n > x) \leqslant \mathbb{P}(X_n > x)$. Donc $\mathbb{P}(X_n > x) \leqslant \dfrac{E(X_n)}{x}$.
   Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n > x) = 0$.
   En passant à l'événement contraire, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = 1$.
   Soit x un réel strictement négatif.
   Pour tout entier n, comme X_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}(X_n \leqslant x) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
   Or cette dernière fonction est la fonction de répartition d'une variable aléatoire certaine égale à 0.
   $\boxed{\text{Nécessairement, } (X_n) \text{ converge en loi}}$

SUJET E3

Exercice principal E3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p où $p \in]0,1[$. On pose pour tout entier n non nul, $Y_n = X_{n-1}X_n$ et $Z_n = Y_nY_{n+1}$.

1. **Question de cours :** Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Montrer que pour tout entier n non nul, Y_n suit une loi de Bernoulli de paramètre à déterminer.
3. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sont-elles deux à deux indépendantes, mutuellement indépendantes ?
4. Pour tout entier n non nul, déterminer la loi de Z_n.
5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Écrire une fonction Scilab d'entrée (n, p) et donnant en sortie une simulation de la variable aléatoire T_n.
6. (a) Montrer que pour tout entier n non nul, T_n admet une espérance et la déterminer.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 2,
   $$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Z_k) + (n-1)(n-2)p^4.$$

   (c) En déduire que T_n admet une variance et la déterminer.
7. Montrer que T_n est un estimateur convergent de p^2.

Solution :

1. Programme officiel ECE2 p17.
   Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et une variance.
   Alors $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.}$
2. Soit n un entier naturel non nul.
   Alors $Y_n(\Omega) = \{0,1\}$. Et $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}\big((X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 1)\big)$.
   Or X_n et X_{n-1} sont indépendantes. Donc $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}\big(X_{n-1} = 1\big)\mathbb{P}\big(X_n = 1\big) = p^2$.
   Ainsi $\boxed{Y_n \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p^2.}$
3. Soit k et ℓ deux entiers distincts tels que $k < \ell$.
   Si $k < \ell - 1$, alors comme X_{k-1}, X_k, $X_{\ell-1}$ et X_ℓ sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes. Donc Y_k et Y_ℓ sont indépendantes.
   Si $k = \ell - 1$, alors $\mathbb{P}\big((Y_k = 1) \cap (Y_\ell = 1)\big) = \mathbb{P}\big((X_{k-1} = 1) \cap (X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 1)\big) = p^3$ car $p^4 - p^3 = p^3(1-p)$ et $p \in]0,1[$.
   Or $\mathbb{P}(Y_k = 1)\mathbb{P}(Y_\ell = 1) = p^4$. $\boxed{\text{Donc } Y_k \text{ et } Y_\ell \text{ ne sont pas indépendantes.}}$
   Donc les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ ne sont pas mutuellement indépendantes.
4. Soit n un entier naturel non nul.
   Alors $Z_n(\Omega) = \{0,1\}$. Et $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}\big((Y_{n+1} = 1) \cap (Y_n = 1)\big) = p^3$ $\boxed{Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p^3)}$.
5.
```
function Tn=T(n,p)
X=grand(n+1,1,"bin",1,p)
    Tn=0
```

```
    for i=1:n
        Tn=Tn+X(i,1)*X(i+1,1)
    end;
    Tn=Tn/n;
endfunction
```

6. (a) Les variables aléatoires Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_n ont même loi et admettent une espérance p^2. Donc T_n admet une espérance.

   Et $\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p^2 = p^2}$

   (b) **Initialisation** Si $n = 2$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{2} Y_k\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(Y_1^2 + Y_2^2 + 2Y_1Y_2\right) \\
&= \mathbb{E}(Y_1^2) + \mathbb{E}(Y_2^2) + 2\mathbb{E}(Z_1) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \mathbb{E}(Y_k) + 2\sum_{k=1}^{2-1} \mathbb{E}(Z_k) + (2-1)(2-2)p^4
\end{aligned}$$

   Hérédité Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

   Supposons que $\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Z_k) + (n-1)(n-2)p^4.$

$$\begin{aligned}
\text{Alors } \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n+1} Y_k\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 + Y_{n+1}^2 + 2Y_{n+1}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right) + \mathbb{E}(Y_{n+1}^2) + 2\mathbb{E}\left(Y_{n+1}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right) + \mathbb{E}(Y_{n+1}^2) + 2\mathbb{E}\left(Y_{n+1}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\
&\underset{HR}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Z_k) + (n-1)(n-2)p^4 + \mathbb{E}(Y_{n+1}^2) + 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_{n+1}Y_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Y_{n+1}Y_k) + (n-1)(n-2)p^4 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k) + 2(n-1)p^4 + (n-1)(n-2)p^4 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k) + n(n-1)p^4
\end{aligned}$$

   Ainsi pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\boxed{\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(Z_k) + (n-1)(n-2)p^4.}$

(c) Comme T_n prend un nombre fini de valeurs, T_n admet une variance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(T_n) &= \mathbb{E}(T_n^2) - (\mathbb{E}(T_n))^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right) - p^4 \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(Y_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(Z_k) + (n-1)(n-2)p^4\right) - p^4 \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} p^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} p^3 + (n-1)(n-2)p^4\right) - p^4 \\
&= \frac{p^2}{n} + \frac{2(n-1)}{n^2}p^3 + \frac{(n-1)(n-2)-n^2}{n^2}p^4 \\
&= \frac{p^2}{n} + \frac{2(n-1)}{n^2}p^3 + \frac{2-3n}{n^2}p^4
\end{aligned}$$

7. D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev appliqué à T_n, $\mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(T_n)}{\varepsilon^2}$. Or d'après la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(T_n) = 0$. Donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|T_n - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

   Ainsi $\boxed{T_n \text{ est un estimateur convergent de } p^2.}$

Exercice sans préparation E3

Soit n un entier naturel non nul et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Soit B et C deux éléments de E tels que $B^2 = C^2 = I$ où I est la matrice identité.
On pose $A = BC$.

1. Montrer que la matrice A est inversible. Quelle est son inverse ?
2. Montrer que A est semblable à A^{-1}.
3. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne. Montrer que si X est vecteur propre de A, il l'est aussi de A^{-1}.

Solution :

1. $B^2 = C^2 = I$ donc B et C sont inversibles et $B^{-1} = B$ et $C^{-1} = C$.
   $\boxed{\text{Donc } BC \text{ est inversible et } A^{-1} = C^{-1}B^{-1} = CB.}$
2. $A = BC = CCBC = CA^{-1}C = C^{-1}A^{-1}C$ donc $\boxed{A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables.}}$
3. Si X est vecteur propre, $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda X$ donc $X = \lambda A^{-1}X$
   Et comme A est inversible, $\lambda \neq 0$ donc $A^{-1}X = \dfrac{1}{\lambda}X$, et comme $X \neq 0$
   $\boxed{\text{X est un vecteur propre de } A^{-1}}$
4. Question supplémentaire éventuelle : Montrer que BX est aussi vecteur propre de A.
   $ABX = BCBX = B(CB)X = BA^{-1}X = B(\dfrac{1}{\lambda}X) = \dfrac{1}{\lambda}BX$
   ($\lambda \neq 0$). De plus BX$\neq 0$ car B est inversible
   $\boxed{BX \text{ est aussi vecteur propre de } A.}$

SUJET E4

Exercice principal E4

1. **Question de cours** : énoncés des inégalités des accroissements finis.

   Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On définit la fonction

$$g : \left\{ \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{x^2}^{x^4} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. \right.$$

2. Pour quelles valeurs du réel x a-t-on $x^2 \leqslant x^4$?
3. (a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Que vaut $g(1)$?
   (b) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in]0;1]$, $|g(x)| \leqslant M\left|x^3 - x\right|$.
   (c) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On appelle encore g la fonction prolongée. Préciser la valeur de $g(0)$.
4. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donner $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$.
   On admet provisoirement que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = -f(0)$.
5. Applications :
   (a) Soit f telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = 1$. Vérifier les résultats obtenus ci-dessus et tracer la courbe représentative de g.
   (b) Soit f une densité de probabilité, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.
      i. Étudier le signe de g et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
      ii. On admet de plus que g' s'annule seulement en deux valeurs α et β sur $\mathbb{R}_+^*$
      Tracer l'allure de la courbe représentative de g.
6. On va maintenant prouver que g est dérivable en 0. On note $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
   (a) Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour F en 0.
   (b) En déduire des équivalents quand x tend vers 0 de $F(x^4)$ et de $F(x^2)$ et conclure.

Solution :

1. Programme officiel ECE1, page 14.
   Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
   Si $\forall x \in I$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ alors, pour $a, b \in I$ vérifiant $a \leqslant b$, $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$
   Si $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$ alors, pour $a, b \in I$, $|f(b) - f(a)| \leqslant k\,|b-a|$
2. $x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$
   D'où le tableau de signe

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x^4 - x^2$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

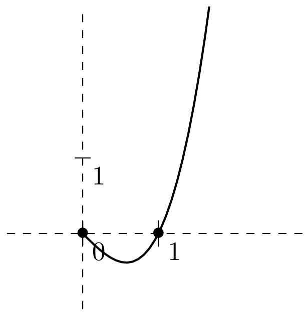
3. (a) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$. F est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $g(x) = \dfrac{F\left(x^4\right) - F\left(x^2\right)}{x}$.
   Donc $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$ (quotient de fonctions continues sur R_+^*, le dénominateur ne s'annulant pas.)
   De plus $g(1) = 0$

(b) Si $x \in]0,1]$, $x^4, x^2 \in [0;1]$
$F' = f$ et f est continue sur $[0,1]$, qui est un intervalle fermé borné. Donc $|f|$ est bornée sur [0,1].
Ainsi $\exists M \geqslant 0$ tel que : $\quad \forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \leqslant M$
Donc avec l'inégalité des accroissements finis
$\forall x \in]0,1] \quad \left|F(x^4) - F(x^2)\right| \leqslant M\left|x^4 - x^2\right|$.
Et comme $x > 0$: $\boxed{|g(x)| \leqslant M\left|x^3 - x\right|}$

(c) Et par encadrement : $\quad \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.
$\boxed{\text{Conclusion : } g \text{ est prolongeable par continuité en 0. Et } g(0) = 0.}$

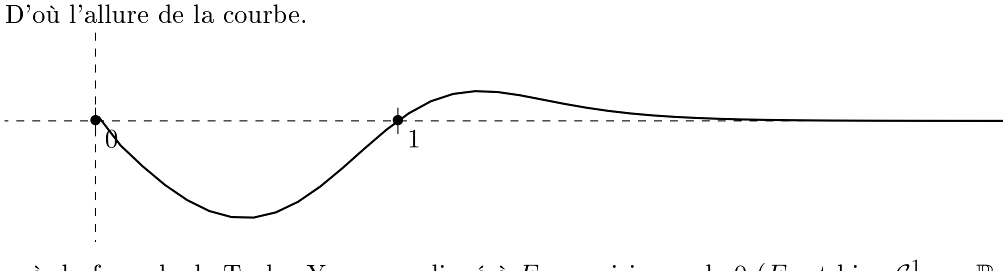
4. F est dérivable (c'est une primitive) donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\boxed{g'(x) = \frac{-1}{x} g(x) + \frac{1}{x}\left(4x^3 f\left(x^4\right) - 2x f\left(x^2\right)\right)}$

5. (a) $g(x) = x^3 - x$; $\quad g'(0) = -1 = -f(0)$; $\quad g(1) = 0$; $\quad g'(1) = 2 \quad$ et $\quad g$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$
$g'(x) = 3x^2 - 1$, on a un minimum en $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $g(x_0) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$



(b) i. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire de densité f. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$
$g(x) = \frac{1}{x}\left(F\left(x^4\right) - F\left(x^2\right)\right)$
F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ d'où $g(x) \leqslant 0$ si $x \in [0,1] \quad$ et $\quad g(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 1$ $\lim\limits_{+\infty} F = 1$
donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0}$

ii. $g(0) = 0$; $\quad g'(0) = -f(0) < 0$; $\quad g(1) = 0$; $\quad g'(1) = 2f(1) > 0$
Comme g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et g admet un seul minimum local et un seul maximum local sur $\mathbb{R}_+^*$
Nécessairement on doit avoir $\alpha \in]0;1[$ et $\beta \in]1;+\infty[$
Preuve rigoureuse (si ils ont l'intuition, commencer par leur laisser tracer la courbe)
-> le minimum de g sur $[0;1]$ est strictement négatif car $g'(0) < 0$ et $g(0) = 0$, il est donc dans $]0;1[$ et il vaut α
-> On doit avoir $\beta > 1$, car sinon, g' étant continue, on aurait g' de signe constant sur $]1;+\infty[$ et g serait strictement croissante sur $]1;+\infty[$ ce qui est incompatible avec les valeurs trouvées.
D'où l'allure de la courbe.



6. (a) D'après la formule de Taylor-Young appliqué à F au voisinage de 0 (F est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$) :
$F(x) = F(0) + f(0)x + o(x)$ quand x tend vers 0.

(b) Donc $F(x) \underset{0^+}{\sim} f(0)x$ (car $f(0) \neq 0$) et $F(x^2) \underset{0^+}{\sim} f(0)x^2$ et $F(x^4) \underset{0}{\sim} f(0^+)x^4$
Or, $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{F(x^4) - F(x^2)}{x^2} = \frac{F(x^4)}{x^2} - \frac{F(x^2)}{x^2}$
Le premier terme tend vers 0, le deuxième vers $-f(0)$
$\boxed{g \text{ est dérivable en 0 et } g(0) = -f'(0)}$

Exercice sans préparation E4

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{9\ln(3)}{3^t} & \text{si } t \in [2;+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On admet que g est une densité de probabilité.
On note Y une variable aléatoire admettant g comme densité.

1. On note Z la variable aléatoire égale à la partie entière de Y. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
   Déterminer la loi de probabilité de Z.
2. On note U la variable définie par $Y - Z$. Déterminer sa fonction de répartition.

Solution :

1. Comme $P(Y \geq 2) = 1$ alors $Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
   Pour tout entier $k \geqslant 2$: $(Z = k) = (k \leq Y < k+1)$
   Donc $\mathrm{P}(Z = k) = \mathrm{P}(k \leq Y < k+1) = \displaystyle\int_k^{k+1} g(t)\,dt$

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= \int_k^{k+1} 9\ln(3)\, e^{-t\ln(3)}dt = 9\ln(3)\left[\frac{-1}{\ln(3)}e^{-t\ln(3)}\right]_k^{k+1} \\ &= 9\left[-e^{-(k+1)\ln(3)} + e^{-k\ln(3)}\right] \\ &= 9\left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^{k+1}}\right) = \frac{1}{3^{k-2}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

2. Comme si $(Z = k)$ $(k \leqslant Y < k+1)$ on a toujours $Y - Z \in [0;1]$
   Donc si on note F_U la fonction de répartition de U, $F_U(u) = 0$ si $u \leqslant 0$ et $F_U(u) = 1$ si $u \geqslant 1$.
   Pour $u \in]0;1[$ on utilise la formule des probabilités totales
   $\mathbb{P}(U \leqslant u) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}((Z = k) \cap (U \leqslant u))$
   Or, $(Z = k \cap U \leqslant u)$ ssi $(Z = k) \cap (Y - Z \leqslant u)$ ssi $(Z = k) \cap (Y - k \leqslant u)$ ssi $(Z = k) \cap (Y \leqslant k + u)$ ssi $(k \leqslant Y \leqslant k + u)$
   Or, $\mathbb{P}(k \leqslant Y \leqslant k+u) = 9\ln(3)\left[\dfrac{-1}{\ln(3)}e^{-t\ln(3)}\right]_k^{k+u} = \left[-e^{-(k+u)\ln(3)} + e^{-k\ln(3)}\right] = 9\left(1 - \dfrac{1}{3^u}\right) \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^k$
   Ainsi $\mathbb{P}(U \leqslant u) = 9\left(1 - \dfrac{1}{3^u}\right)\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{3^k}\right) = 9\left(1 - \dfrac{1}{3^u}\right) \times \dfrac{1}{9(1-1/3)}$
   $\boxed{\forall u \in]0;1[,\ F_U(u) = \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^u}\right)}$
   On peut remarquer que cette variable est bien à densité

SUJET E5

Exercice principal E5

1. **Question de cours** : Théorème de la bijection

2. Déterminer l'ensemble D des réels x tels que $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 0$.

   On définit la fonction
$$f : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) \end{cases}$$
   On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3. (a) Sans chercher à le calculer, prouver l'existence d'un unique réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$ et montrer que $\alpha < 1$.
   (b) Compléter le programme SCILAB suivant permettant d'avoir une valeur approchée par défaut de α à 0.01 près.

```
 a=  0;
 b=  1;
while
    if
    then b=(a+b)/2;
    else a=(a+b)/2;
    end;
end;
 disp(a)
```

   (c) Calculer la valeur explicite de α.
4. (a) Donner la position relative de la droite (Δ) d'équation $y = x$ par rapport à (C).
   (b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ et tracer sur un même graphe la courbe (C) et la droite (Δ)
5. Soit λ un réel, on note g_λ la fonction définie par :
$$g_\lambda \ : \ \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \dfrac{\lambda}{\mathrm{e}^{2x} - 1} & \text{si } x \geqslant \alpha \end{cases} \end{cases}$$
   (a) On pose $h \ : \ x \mapsto f(x) - x$. Après avoir calculé $h'(x)$, déterminer λ en fonction de α pour que g_λ soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.
   (b) Donner la fonction de répartition G_λ de X.
6. Montrer qu'au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalent à $\ln(x)$.

Solution :

1. Programme officiel ECE1 page 12. Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I défi nit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
2. $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$. Donc $\boxed{D = \mathbb{R}_+^*.}$

3. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$
f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\lim\limits_{x \to 0} \ln\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = +\infty$.
f étant continue, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus $f(1) = \ln(e - e^{-1}) > 0$ (en effet $e > 2$, $e^{-1} < 1$, donc $e - e^{-1} > 1$ et donc $f(1) > 0$. Comme f est strictement croissante, $\boxed{\alpha < 1.}$

(b) On reconnaît une dichotomie.

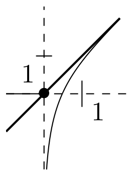
```
a=0;
b=1;
while b-a>0.01
    if log(exp((a+b)/2)-exp(-(a+b)/2))>0
    then b=(a+b)/2;
    else a=(a+b)/2;
    end;
end;
disp(a)
```

(c) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = e^x \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 1 = 0$

Soit $X = \mathrm{e}^x$. L'équation $X^2 - X - 1 = 0$ du second degré a pour discriminant 5 et pour racines : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$. Donc l'unique solution est $\boxed{\alpha = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$

4. (a) $f(x) - x = \ln\left(\mathrm{e}^x\left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\right)\right) - \ln(\mathrm{e}^x) = \ln\left(1 - e^{-2x}\right) < 0$
$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est en dessous de la droite } (\Delta).}$

(b) $\boxed{f(x) - x = \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\right) \to 0}$



(c) *Le mot asymptote n'est pas dans le programme*

5. (a) h est dérivable sur D et $h'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} - 1 = \dfrac{2\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x} - 1} = \dfrac{2}{\lambda} g_\lambda(x)$
Pour $\lambda > 0$ on a $g_\lambda \geq 0$ et continue sur $\mathbb{R} - \{\alpha\}$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$:
— En $-\infty$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\alpha} g = \int_{-\infty}^{\alpha} 0 = 0$
— En $+\infty$: $\displaystyle\int_{\alpha}^{M} g_\lambda(t)\,dt = \left[\frac{\lambda}{2} h(x)\right]_{\alpha}^{M} = \frac{\lambda}{2}\left(h(M) - h(\alpha)\right)$
Or $h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = -\alpha$ et $f(M) - M \to 0$ quand $M \to +\infty$
Donc $\displaystyle\int_{\alpha}^{M} g(t)\,dt \to \frac{\lambda\alpha}{2}$
— Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g$ converge et vaut $\dfrac{\lambda\alpha}{2}$
$\boxed{\text{Donc } g_\lambda \text{ est une densité si et seulement si } \lambda = 2/\alpha}$.

(b) $\boxed{\text{On a } G_\lambda(t) = 0 \text{ si } t \leq \alpha \text{ et } G_\lambda(t) = \frac{1}{\alpha}\left(h(t) + \alpha\right) \text{ si } t \geq \alpha.}$

6. On fait un DL à l'ordre 2, $e^x - e^{-x} = 2x + o(x)$ est équivalent à $2x$
Donc $f(x) = \ln\left(x \times \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{x}\right)$
Le premier terme tend vers l'infini, le deuxième vers $\ln(2)$, le premier est prépondérant.
$\boxed{f(x) \text{ est équivalent à } \ln(x) \text{ quand } x \text{ tend vers } 0}$

Exercice sans préparation E5

Soit λ un réel strictement positif.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramétre λ, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On note $V = \max(X, 1-X)$ le maximum de X et de $1-X$, et l'on admet que V est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Déterminer $V(\Omega)$, l'ensemble des valeurs possibles pour la variable aléatoire V.
2. Déterminer la fonction de répartition de V. V est-elle une variable aléatoire à densité ?

Solution :

1. Si $x \geqslant (1-x)$ ssi $x \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   Si $X(\omega) \geqslant \dfrac{1}{2}$, alors $V(\omega) = X(\omega)$, donc $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[\subset V(\Omega)$
   Si $X(\omega) \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors $V(\omega) = 1 - X(\omega)$. Or, si l'on note $g : x \mapsto 1-x$, l'image de $]0; \dfrac{1}{2}]$ par g vaut $\left]\dfrac{1}{2}; 1\right[$
   $\boxed{V(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}; 1\right[= \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[}$
2. Attention, les variables X et $1-X$ ne sont pas indépendantes.
   Si $v \leqslant \dfrac{1}{2}$, $F_V(v) = 0$, et si $v > \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(V \leqslant v) = \mathbb{P}(X \leqslant v \cap 1 - X \leqslant v) = \mathbb{P}(X \leqslant v \cap X \geqslant 1 - v)$
   Ainsi $F_V(v) = \mathbb{P}(1 - v \leqslant X \leqslant v)$ (en effet, comme $v \geqslant \dfrac{1}{2}$, on a bien $1 - v \leqslant v$)
   Ainsi $F_V(v) = F_X(v) - F_X(1-v)$. Et il faut faire attention. A-t-on $1 - v > 0$?
   Si $v \in [\dfrac{1}{2}; 1]$, $F_V(v) = \exp(\lambda(1-v)) - \exp(-\lambda v)$.
   Mais si $v > 1$, $F_V(v) = 1 - \exp(-\lambda v)$.
   F_V est bien continue sur $\mathbb{R}$ (en particulier en $\dfrac{1}{2}$ et en 1, et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé de $\dfrac{1}{2}$ et de 1.)
   $\boxed{\text{V est une variable à densité}}$

SUJET E6

Exercice principal E6

Le jeu de mémory est composé de n (n étant un entier naturel non nul) paires d'images deux à deux distinctes, sur une seule des n paires sont représentés des chatons. Ces images sont réparties en deux tas : chaque paire aura une de ses images dans chaque tas. Les images sont posées face cachée. A chaque étape, une carte de chaque tas est retournée. Si les deux cartes retournées forment la paire de chatons, alors le jeu s'arrête, sinon les cartes sont retournées et les tas à nouveau mélangés.
Deux joueurs A et B jouent en parallèle. Ils possèdent chacun leur propre jeu de mémory et jouent indépendamment, mais réalisent leurs étapes en même temps. Soit X (respectivement Y) le nombre d'étapes de jeu effectuées par le joueur A (respectivement B) lorsqu'il trouve la paire de chatons. Soit $M = \max(X, Y)$. On admet que M est une variable aléatoire.

1. **Question de cours :** Énoncer la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
2. Donner la loi de X, son espérance et sa variance
3. Pour tout entier naturel k, déterminer $\mathbb{P}(M \leqslant k)$.
4. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(M > k)$ converge.
5. Montrer que pour tout entier naturel K non nul, $\sum_{k=1}^{K} k\mathbb{P}(M = k) = -K\mathbb{P}(M > K) + \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{P}(M > k)$.
6. En déduire que M admet une espérance.
7. Montrer que la suite $\big(K\,\mathbb{P}(M > K)\big)_{K\geqslant 0}$ converge vers 0.
8. Déterminer $\mathbb{E}(M)$.

Solution :

1. Programme officiel ECE1 page 19.
On dit que la variable aléatoire discrète X telle que $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet une espérance quand la série $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} x_n\mathbb{P}(X = x_n) \text{ converge absolument.}}$

   En cas de convergence, on appelle espérance de X le réel $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X = x_n)$.
2. $\boxed{X \text{ suit une loi géométrique de paramètre } \frac{1}{n^2}.\ \mathbb{E}(X) = n^2 \text{ et } \mathbb{V}(X_n) = n^2(n^2-1).}$
3. Soit k un entier naturel.
Remarquons que $(M \leqslant k) = (X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)$.
Par indépendance des variables aléatoires, $\mathbb{P}(M \leqslant k) = \mathbb{P}(X \leqslant k)\mathbb{P}(Y \leqslant k)$.
Or X et Y ont même loi. Donc $\mathbb{P}(M \leqslant k) = \mathbb{P}(X \leqslant k)^2$.
Or $\mathbb{P}(X \leqslant k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{i-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{k}$.
Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(M \leqslant k) = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{k}\right)^{2}.}$

4. D'après la question précédente pour tout entier naturel k, $\mathbb{P}(M > k) = 2\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^k - \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{2k}$.

   Or $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) \in [0,1[$ et $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^2 \in [0,1[$.

   Donc les séries géométriques $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2k}$ convergent.

   Ainsi par combinaison linéaire, la série $\boxed{\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(M > k) \text{ converge.}}$

5. Soit K un entier naturel non nul.
   Rappelons que pour tout entier naturel k non nul, $\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M > k-1) - \mathbb{P}(M > k)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} k\mathbb{P}(M = k) &= \sum_{k=1}^{K} k\left(\mathbb{P}(M > k-1) - \mathbb{P}(M > k)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{K} k\Big(\mathbb{P}(M > k-1) - \sum_{k=1}^{K} k\mathbb{P}(M > k)\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{K} k\ \mathbb{P}(M > k-1) - \sum_{k=1}^{K} k\ \mathbb{P}(M > k)\\
&= \sum_{k=0}^{K-1} (k+1)\mathbb{P}(M > k) - \sum_{k=1}^{K} k\mathbb{P}(M > k)\\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{P}(M > k) - K\mathbb{P}(M > K)}
\end{aligned}$$

6. Pour tout entier naturel K non nul, $K\ \mathbb{P}(M > K) \geqslant 0$.

   Donc $\forall K \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{K} k\ \mathbb{P}(M = k) \leqslant \sum_{k=0}^{K-1}\mathbb{P}(M > k)$.

   Or la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(M > k)$ est une série convergente à termes positifs.

   Donc $\forall K \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{K-1}\mathbb{P}(M > k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(M > k)$.

   Donc $\forall K \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{K} k\ \mathbb{P}(M = k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(M > k)$.

   Ainsi la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k\ \mathbb{P}(M = k)$ est majorée. Donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k\ \mathbb{P}(M = k)$ converge absolument (car les termes sont positifs.).

   Ainsi $\boxed{M \text{ admet une espérance.}}$

7. Soit K un entier naturel non nul.

   $\mathbb{P}(M > K) = \displaystyle\sum_{k=K}^{+\infty}\mathbb{P}(M = k)$.

   Or $\forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant K$, $K\mathbb{P}(M = k) \leqslant k\mathbb{P}(M = k)$.

   Comme X admet une espérance, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(M = k)$ converge.

   Donc $0 \leqslant K\displaystyle\sum_{k=K}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k) \leqslant \sum_{k=K}^{+\infty} k\mathbb{P}(M = k)$.

   Comme reste d'une série convergente, $\displaystyle\lim_{K\to+\infty}\sum_{k=K}^{+\infty} k\mathbb{P}(M = k) = 0$.

   Donc par encadrement $\boxed{\displaystyle\lim_{K\to+\infty} K\mathbb{P}(M > K) = 0.}$

8. D'après les questions précédentes

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(M > k) \\
&= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2k} \\
&= \frac{2}{1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} - \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2} \\
&= 2n^2 - \frac{n^4}{2n^2 - 1} \\
&= \boxed{n^2 \frac{3n^2 - 2}{2n^2 - 1}}
\end{aligned}$$

Exercice sans préparation E6

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note ${}^tA$ la transposée de A et O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose ${}^tAA = A{}^tA$ et qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$.

1. Montrer que ${}^tAA = O_n$.
2. Que peut-on en déduire concernant la matrice A ?

Solution :

1. La matrice ${}^tAA$ est symétrique. En tant que matrice symétrique réelle, ${}^tAA$ est diagonalisable (programme officiel de ECE2, page 8). Ainsi, il existe une matrice inversible P telle que
$$ {}^tAA = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}. $$
Comme A et sa transposée commutent, $({}^tAA)^p = ({}^tA)^p A^p = O_n$. Ainsi,
$$ O_n = ({}^tAA)^p = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p)P^{-1}. $$
On en déduit que chaque λ_i est nul, puis que $\boxed{{}^tAA = O_n.}$
2. On note a_{ij} le coefficient générique de A et b_{ij} le coefficient générique de $B = {}^tAA$. Par la formule du produit matriciel, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
$$ 0 = b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 $$
Il suit que pour tout couple $(i, k) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ik} = 0$. $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est donc la matrice nulle.}}$

Question supplémentaire éventuelle. Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$ A{}^tAA{}^tAA = I_n. $$

Réponse. On commence par remarquer que A est inversible avec $A^{-1} = {}^tAA{}^tAA$.
Donc A^{-1} est symétrique réelle, et par suite A l'est aussi. Ainsi, A est diagonalisable et vérifie $A^5 = I_n$. On trouve alors que la seule matrice solution est $\boxed{A = I_n.}$

SUJET E7

Exercice principal E7

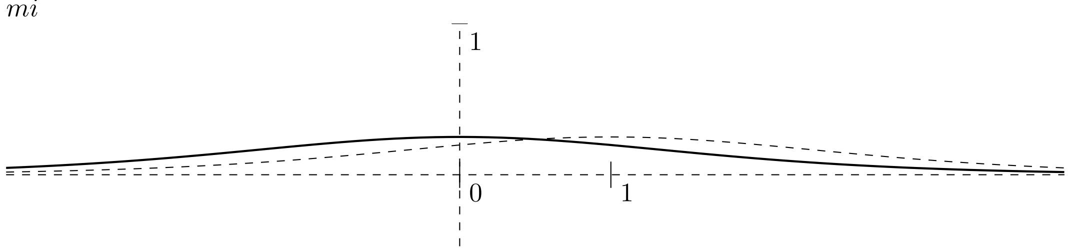
Dans tout l'exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient m un réel et

$$f_m : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^{-x+m}}{(1+e^{-x+m})^2} \end{cases}$$

1. **Question de cours** : convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
2. On pose $f = f_0$. Vérifier que f est paire et tracer sa courbe représentative.
   Comment en déduire la courbe représentative de f_m pour m réel ?
3. Vérifier que f_m est une densité de probabilité.
4. On note, pour $m \in \mathbb{R}$, X_m une variable aléatoire de densité f_m.
   (a) Soit $m \in \mathbb{R}$, quelle est la fonction de répartition de X_m ?
   (b) La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?
5. Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que X_m admet une espérance et donner sa valeur.
   On note maintenant, pour $m \in \mathbb{R}$, $Y_m = \ln\left(1 + e^{X_m}\right)$.
6. (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Y_0 ?
   (b) La suite $(Y_{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?

Solution :

1. Programme officiel ECE2 page 17.
   Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires converge en loi vers X si $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout réel x où F_X est continue.
   f est densité de probabilité ssi f est continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, f est positive et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
2. f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^{-2x}e^x}{e^{-2x}(1+e^x)^2} = f(x)$ donc f est paire.
   La dérivée de $u \mapsto \dfrac{u}{(u+1)^2}$ est $u \mapsto \dfrac{1-u}{(1+u)^3}$.
   Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{-e^{-x}(1-e^{-x})}{(1+e^{-x})^3}$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{4}$
   Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m(x) = f(x-m)$, la courbe de f_m se déduit de celle de f par la translation de vecteur $m\vec{i}$



3. Vu que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m(x) = f(x-m)$, il suffit de vérifier que f est une densité de probabilité. f est continue, positive sur $\mathbb{R}$.
$$\forall A \in \mathbb{R}_+ \int_0^A f(x)dx = \left[\frac{-1}{1+e^{-x}}\right]_0^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{-A}}$$
$\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A f(x)dx = \dfrac{1}{2}$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ $\boxed{f \text{ est donc bien une densité de probabilité.}}$

4. (a) Soit F_{m} la fonction de répartition de X_m. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{F_m(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x+m}}.}$

   (b) Pour x fixé, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = 0$.
   Mais la fonction nulle n'est pas la fonction de répartition d'une variable aléatoire
   $\boxed{\text{La suite } (X_m) \text{ ne converge pas en loi.}}$

5. On remarque $X_m = X_0 + m$. On étudie l'espérance de X_0.
   $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, positive sur $\mathbb{R}_+$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 f(x) = 0$ donc $xf(x) = \circ\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$ et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge, $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge
   Comme f est paire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge et $E(X_0) = 0$. $\boxed{\text{D'où : } \quad E(X_m) = m.}$

6. (a) Y_0 prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit F_{Y_0} la fonction de répartition de Y_0.
   $\forall y \leqslant 0 \quad F_{Y_0}(y) = 0$
   $\forall y > 0 \quad F_{Y_0}(y) = \mathbb{P}\left(\ln\left(1+e^{X_0}\right) \leqslant y\right) = \mathbb{P}\left(e^{X_0} \leqslant e^y - 1\right) = \mathbb{P}\left(X_0 \leqslant \ln\left(e^y - 1\right)\right)$
   $$\forall y > 0 \quad F_{Y_0}(y) = \frac{1}{1+e^{-\ln(e^y-1)}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^y-1}} = 1 - e^{-y}$$
   $\boxed{Y_0 \text{ suit la loi exponentielle de paramètre 1.}}$

   (b) De même : $F_{Y_{\frac{1}{n}}}(y) = 0$ si $y \leqslant 0$
   Si $y > 0$, $F_{Y_{\frac{1}{n}}}(y) = \mathbb{P}(X_{\frac{1}{n}} \leqslant \ln(e^y - 1)) = \dfrac{1}{1+e^{-\ln(e^y-1)+\frac{1}{n}}} = \boxed{= \dfrac{e^y - 1}{e^{\frac{1}{n}} + e^y - 1}}$
   Donc pour $y \leqslant 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(y) = 0$, pour $y > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Y_{\frac{1}{n}}}(y) = 1 - e^{-y} = F_{Y_0}(y)$
   $\boxed{\text{La suite } (Y_{\frac{1}{n}}) \text{ converge en loi vers } Y_0}$

Exercice sans préparation E7

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n^3+6n^2-5n-2}{n!}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.
   (On pourra remarquer que $(X(X-1)(X-2), X(X-1), X, 1)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.)
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et écrire un programme SCILAB qui pour un réel $\varepsilon > 0$ donné par l'utilisateur propose une valeur de n tel que $|u_n| < \varepsilon$

Solution :

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3+6n^2-5n-2 = n(n-1)(n-2)+9n(n-1)+2n-2$

   D'après la décomposition précédente, pour tout entier naturel $N \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + \sum_{n=0}^{N}\frac{9n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^{N}\frac{2n}{n!} + \sum_{n=0}^{N}\frac{-2}{n!}\\ &= \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n!} + 9\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n!} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n!} - 2\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{N-3}\frac{1}{n!} + 9\sum_{n=0}^{N-2}\frac{1}{n!} + 2\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n!} - 2\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

   On reconnaît une somme de séries exponentielles, donc la série converge et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 10e}$

2. Comme la série de terme général u_n converge, on a bien $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

   On propose le script

```
eps=input("Choisir la valeur de epsilon");
n=0;
u=-2;
fac=1;
while abs(u)>=eps
      n=n+1;
      fac=fac*n;
      u=(n*n*n+6*n*n*-5*n-2)/fac;
     end;
disp(n)
```

SUJET E8

Exercice principal E8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} \,\mathrm{d}x \ \text{ et } \ v_n = \ln\left(n^{1/3} A_n\right).$$

1. **Question de cours** : Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

2. Montrer que les suites (A_n) et (v_n) sont bien définies.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   (a) Justifier que $A_n = A_{n+1} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}} \,\mathrm{d}x$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer A_{n+1} en fonction de A_n.

4. (a) Déterminer trois réels a, b, c tels que lorsque n tend vers $+\infty$: $v_{n+1} - v_n = a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   (b) Étudier la convergence de la suite (v_n).

5. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ converge-t-elle ?

6. On pose $b_k = \dfrac{A_k}{A_1}$.
   Écrire un programme SCILAB qui pour une valeur de A réelle donnée par l'utilisateur renvoie une valeur de N pour laquelle on a :

$$\forall n \geqslant N,\ \sum_{k=1}^{n} b_k \geqslant A.$$

Solution :

1. Programme officiel ECE2 page 9. $\boxed{\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)}$

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^3)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. En $+\infty$, comparaison avec une intégrale de Riemann :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{(1+x^3)^n} \leqslant \dfrac{1}{x^{3n}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3n}} \,\mathrm{d}x$ converge.
   De plus, par positivité de l'intégrale, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n > 0$
   $\boxed{\text{Donc } A_n \text{ et } v_n \text{ sont bien définis pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{1+x^3}{(1+x^3)^{n+1}} \,\mathrm{d}x$
   $A_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}} \,\mathrm{d}x + \int_0^{\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}} \,\mathrm{d}x$
   $\boxed{A_n = A_{n+1} + \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}} \,\mathrm{d}x}$

(b) $A_n = A_{n+1} + \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \times x^2}{(1+x^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$

Par intégration par parties :

$$A_n = A_{n+1} + \left[\ x \times \frac{-1}{3n} \times \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}\ \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{3n} \times \frac{1}{(1+x^3)^n}\,\mathrm{d}x$$

$A_n = A_{n+1} + \dfrac{1}{3n} A_n$. Ainsi $\boxed{A_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} A_n}$

4. (a) $\forall n \geqslant 1, v_{n+1} - v_n = \ln\left((n+1)^{1/3} A_{n+1}\right) - \ln\left(n^{1/3} A_n\right)$

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/3}\right) + \ln\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right)$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \left(-\frac{1}{3n} - \frac{1}{18n^2}\right) + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad v_{n+1} - v_n = -\frac{2}{9n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\boxed{a = 0, b = 0, c = -\dfrac{2}{9} \text{ conviennent.}}$

(b) Par comparaison (les termes sont de signe constant), la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge. Cette série est téléscopique :

Or, en posant pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = v_{n+1} - v_1$

Comme (S_n) converge vers une limite ℓ, (v_{n+1}) converge vers $\ell + v_1$, et donc $\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ converge}}$

5. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln\left(n^{1/3} A_n\right)$. Si on note L la limite de la suite (v_n) en $+\infty$, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n^{1/3} A_n = \mathrm{e}^L$. Donc $A_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^L}{n^{1/3}}$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ diverge car $\dfrac{1}{3} < 1$ et les séries sont à termes positifs, donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \text{ diverge.}}$

6. On pose $\dfrac{A_{k+1}}{A_1} = \dfrac{3k-1}{3k} \times \dfrac{A_k}{A_1}$, donc $b_{k+1} = \dfrac{3k-1}{3k} b_k$

On cherche donc à trouver N tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} b_k \geqslant N$.

(comme les b_k sont positifs, l'inégalité sera vraie pour $n \geqslant N$)

```
A=input("Donnez la valeur de A");
b=1;
k=1;
S=1;
while S<A
    b=(3*k-1)/(3*k)*b;
    k=k+1;
    S=S+b;
end;
disp(k);
```

Exercice sans préparation E8

On considère une variable aléatoire Y admettant une densité f, nulle sur $]-\infty;0[$, continue sur $[0;+\infty[$ et strictement positive sur $[0;+\infty[$. On note alors F la fonction de répartition de Y.
Soit

$$g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{cl}-f(x)\ln(1-F(x)) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leqslant 0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Établir que g définit bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire Z.

Solution :

* Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ alors $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f=0$ sur $\mathbb{R}_-$ et $1-F(x)>0$ sur $\mathbb{R}_-$.
D'autre part, F est dérivable là où la densité f est continue. F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $F'=f>0$.
F est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus $\lim\limits_{+\infty} F=1$ alors $F<1$ sur $\mathbb{R}_+$ d'où $1-F(x)>0$ sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, pour tout réel $x, 1-F(x)>0$ et g est bien définie

* g est nulle, donc positive sur $\mathbb{R}_-^*$.
Sur $\mathbb{R}_+ : 0<1-F(x)\leqslant 1$ (car $F(x)$ est une probabilité donc inférieure ou égale à 1)
Donc $\ln(1-F(x))\leqslant 0$ et $g(x)=-f(x)\ln(1-F(x))\geqslant 0$
Ainsi, g est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

* F est continue sur $\mathbb{R}$ et $1-F(x)>0$ donc $x\rightarrow\ln(1-F(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$.
f est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $[0,+\infty[$
Donc g est continue sur sur $]-\infty,0[$ et sur $[0,+\infty[$ comme produit de fonctions continues.

* Pour tout réel $M\geqslant 0$:

$$\int_0^M g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^M -f(x)\ln(1-F(x))\,\mathrm{d}x$$

Soit $u'(x)=-f(x) : u(x)=1-F(x) : v(x)=\ln(1-F(x)) : v'(x)=\dfrac{-f(x)}{1-F(x)}$ et u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ $(1-F(x)>0$) donc

$$\begin{aligned}\int_0^M g(x)\,\mathrm{d}x &= [(1-F(x))\ln(1-F(x))]_0^M-\int_0^M(1-F(x))\frac{-f(x)}{1-F(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= (1-F(M))\ln(1-F(M))-(1-F(0))\ln(1-F(0))+\int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Or, $F(0)=\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x=0$ donc $\ln(1-F(0))=0$
$F(M)\rightarrow 1$ quand $M\rightarrow+\infty$ et comme $x\ln(x)\rightarrow 0$ quand $x\rightarrow 0$ alors $(1-F(M))\ln(1-F(M))\rightarrow 0$
Enfin, $\displaystyle\int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x\rightarrow\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } 1.}$

$\boxed{g \text{ définit bien une densité de probabilité}}$

SUJET E9

Exercice principal E9

Pour tout entier n non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ et $v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

1. **Question de cours :** Énoncer les critères de comparaison des séries.
2. (a) Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge, puis que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\geqslant 1}$ converge. On notera γ sa limite.
3. (a) Montrer que la suite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante et que la suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est croissante.

   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
4. (a) Montrer que pour tout entier n non nul, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2) + \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$.

   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Solution :

1. Programme officiel ECE2 page 8.
   Soient $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes positifs.
   Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
   Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ et que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
   Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sont de même nature.
2. (a) Rappelons que $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   Donc $v_n = \dfrac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   Ainsi $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}}$.

   (b) La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$). Donc par critère d'équivalence, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

   Par définition de la convergence d'une série, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

   Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - (\ln(k+1) - \ln(k))\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=0$

Donc $\boxed{\text{la suite } \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$

3. (a) ◇ Pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)}-S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}\\ &= \frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

Ainsi $S_{2(n+1)}-S_{2n}\leqslant 0$.

$\boxed{\text{Donc la suite } (S_{2n})_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$

◇ Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1}-S_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3}\frac{(-1)^k}{k}-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}\\ &= \frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}\end{aligned}$$

Ainsi $S_{2(n+1)+1}-S_{2n+1}\geqslant 0$.

Donc $\boxed{\text{la suite } (S_{2n+1})_{n\geqslant 0} \text{ est croissante.}}$

(b) • Remarquons que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_{2n+1}-S_{2n}=-\dfrac{1}{2n+1}$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_{2n+1}-S_{2n}=0$.

• Les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont monotones et de monotonies différentes

Donc les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.

Donc les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent vers une même limite.

Alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Donc par définition $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n} \text{ converge.}}$

4. (a) D'après la question 2(b), la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\ln(2n)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers γ.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=\ln(2n)+\gamma+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

ou encore $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=\ln(2)+\ln(n)+\gamma+\underset{n\to+\infty}{o}(1).}$

(b) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}+\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{-1}{2k+1}\\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}\\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

(c) Pour tout entier n non nul, $2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}$.

Alors $\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}=\ln(n)+\gamma-\ln(2)-\ln(n)-\gamma+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$. Donc $\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}=-\ln(2)+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Ainsi, puisque cette série converge $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}\boxed{=-\ln 2.}$

Exercice sans préparation E9

Soient $p \in]0,1[$ et la fonction SCILAB `X` suivante

```
function x=X(p)
    k=1;
    y=0;
    a=rand();
    while a>p
        y=y+1;
        k=k+1;
        a=rand();
    end;
    while a<=p
       k=k+1;
      a=rand()
    end;
    x=k-1-y;
endfunction
```

En s'aidant d'un lancer d'une pièce dont la probabilité d'obtenir "face" est p.

1. Interpreter ce que simule la fonction `X` ?
2. Soit X la variable aléatoire simulée par la fonction ci-dessus.
   — Quelle est la loi de X ?
   — Quelle est l'espérance de X si elle existe ?

Solution :

1. La fonction détermine $\boxed{\text{la longueur de la première séquence de "face".}}$
   y est le nombre de "pile" précédant la première séquence de "face".
2. Soit $q = 1 - p$
   Posons $X = 0$ si "face" n'apparaît jamais. $X(\Omega) = \mathbb{N}$
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$
   $[X = k] = \bigcup_{y=0}^{+\infty} \Big(B_y \cap A_{y+1,k} \Big)$ (union disjointe).
   où B_y est l' événement : " y piles sont apparus avant la première séquence de faces "
   $A_{y+1,k}$ est l'événement : " face est apparu aux rangs $y+1, ..., y+k$ et pile au rang $y+k+1$."
   $\mathbb{P}(X = k = \sum_{y=0}^{+\infty} q^y p^k q$ les jets de pièces étant supposés indépendants.
   $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{qp^k}{1-q} = qp^{k-1}$
   $\boxed{X \text{ suit donc la loi géométrique de paramètre } q}$
   Ce résultat était prévisible : X et le rang du premier "pile" à partir de l'obtention du premier "face" et la loi géométrique est "sans mémoire"

   Donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{q}}$

SUJET E10

Exercice principal E10

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et k un entier naturel inférieur ou égal à n.
Sur le segment $[0,1]$, on place au hasard n points, on les ordonne dans l'ordre croissant et, pour n fixé, on appelle X_k la variable aléatoire égale à l'abscisse du k-ième point.

On définit pour $x \in]0,1[$, Y_x le nombre de points qui ont été placés dans le segment $[0;x]$

1. **Question de cours** : L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Déterminer la loi de Y_x pour $x \in]0;1[$.
3. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall q \in \mathbb{N}; \quad I_{p,q} = \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}$$

   En déduire l'expression de $I_{p,q}$.
4. Soit $k \in [|1;n|]$ fixé.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X_k (on pourra laisser l'expression sous la forme d'une somme.)
   (b) Montrer que X_k est une variable à densité dont une densité f est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{k-1}(1-x)^{n-k} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X_k)$ de X_k.
   On admet que la variance de X_k est donnée par

$$V(X_k) = \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)}$$

6. (a) k étant toujours un entier naturel non nul fixé, on définit pour tout n entier vérifiant $n \geqslant k$, la variable aléatoire Z_n par $Z_n = X_k$. Montrer l'inclusion d'événements suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \big[\,|Z_n| > \varepsilon\big] \subset \big[(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| + |\mathbb{E}(Z_n)|) > \varepsilon\big]$$

   Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
   On admet que, comme $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n) = 0$, pour n assez grand $|\mathbb{E}(Z_n)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et donc $\varepsilon - |\mathbb{E}(Z_n)| > \dfrac{\varepsilon}{2}$
   (b) Montrer que pour n assez grand, $\mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{4V(Z_n)}{\varepsilon^2}$.

Solution :

1. programme officiel ECE2 page 17.
   Si X est une variable aléatoire admettant une espérance et une variance :
   $\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$
2. $\boxed{Y_x \text{ une binomiale de paramètres } n \text{ et } x}$

3. On obtient l'égalité $I_{p,q} = \dfrac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}$ à l'aide d'une intégration par parties.

   Par itérations :

   $I_{p,q} = \dfrac{p(p-1)\dots 1}{(q+1)(q+2)\dots(q+p)} I_{0,p+q} = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{p+q}\,\mathrm{d}x$

   $\boxed{I_{p,q} = \dfrac{1}{(p+q+1)\begin{pmatrix} p+q \\ p \end{pmatrix}}}$

4. (a) Si l'on note F_k la fonction de répartition

   $F_k(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $F_k(x) = 1$ si $x \geqslant 1$.

   Pour $x \in]0;1[$, $F_k(x) = \mathbb{P}(X_k \leqslant x) = \mathbb{P}(Y_x \geqslant k)$

   $\boxed{\forall x \in]0;1[,\ F_k(x) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} x^i(1-x)^{n-i}}$

   (b) F_k est continue sur $\mathbb{R}$ et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ donc X_k est à densité et une densité est donnée par : * $f_k(x) = 0$ si $x < 0$ ou $x > 1$

   * si $0 < x < 1$ et $k < n$:

   $f_k(x) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \left(ix^{i-1}(1-x)^{n-i} - (n-i)x^i(1-x)^{n-i-1}\right)$

   $= k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{k-1}(1-x)^{n-k} + \displaystyle\sum_{i=k}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ i+1 \end{pmatrix} (i+1)x^i(1-x)^{n-i-1} - \sum_{i=k}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} (n-i)x^i(1-x)^{n-i-1}$

   or $(i+1)\begin{pmatrix} n \\ i+1 \end{pmatrix} = (n-i)\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$

   donc $f_k(x) = k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{k-1}\left(1 - x^{n-k}\right)$

   si $k = n, F_n(x) = x^n$ donc $f_n(x) = nx^{n-1}$ et $f_k(x) = k\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$

   Donc, dans tous les cas : $\boxed{f_k(x) = k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{k-1}(1-x)^{n-k}}$

5. $\mathbb{E}(X_k)$ existe car X_k est bornée

   $\mathbb{E}(X_k) = k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x = k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \int_0^1 x^k(1-x)^{(n+1)-(k+1)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{(k+1)\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}}$

   Ainsi $\boxed{\mathbb{E}(X_k) = \dfrac{k}{n+1}}$

6. (a) Par inégalité triangulaire. $|Z_n| \leqslant |Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| + |\mathbb{E}(Z_n)|$

   Donc, si $|Z_n| > \varepsilon$, alors $|Z_n - E(Z_n)| + |E(Z_n)| > \varepsilon$

   On a bien l'inclusion demandée $\boxed{[|Z_n| > \varepsilon] \subset [|Z_n - E(Z_n)| + |E(Z_n)| > \varepsilon]}$

   (b) On obtient donc

   $\mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|Z_n - E(Z_n)| > \varepsilon - |E(Z_n)|)$

   Mais pour n assez grand $|\mathbb{E}(Z_n)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et donc $\varepsilon - |E(Z_n)| > \dfrac{\varepsilon}{2}$

   $\mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| > \mathbb{E}(Z_n) - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| > \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$

   Or d'après Bienaymé-Tchébytchev $\mathbb{P}\left(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| > \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \dfrac{4V(Z_n)}{\varepsilon^2}$.

   Ains i $\boxed{\mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{4V(Z_n)}{\varepsilon^2}}$

Exercice sans préparation E10

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3.
On note Id_E et $O_{\mathcal{L}(E)}$ les applications identité de E dans E, et constante nulle de E dans E.
On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq O_{\mathcal{L}(E)}, \quad f^2 + Id_E \neq O_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } f \circ (f^2 + Id_E) = O_{\mathcal{L}(E)}$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. Déterminer $\text{sp}(f)$. L'application f est-elle diagonalisable ?
2. L'application $f^2 + Id_E$ est-elle bijective ?

Solution :

1. Le polynôme $X(X^2+1)$ est un polynôme annulateur de f et son unique racine est 0. 0 est donc la seule valeur propre possible de f.
   $f^2 + Id_E \neq O_{\mathcal{L}(E)}$ donc il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $\left(f^2 + Id_E\right)(x_0) \neq 0$.
   $f \circ (f^2 + Id_E) = O_{\mathcal{L}(E)}$ donc $f\left((f^2 + Id_E)(x_0)\right) = 0$. Le vecteur $(f^2 + Id_E)(x_0)$ est donc un vecteur non nul du noyau de f
   Ainsi, $\boxed{\text{Sp}(f) = \{0\}.}$
   Par l'absurde, si f était diagonalisable, elle serait représentée dans une base de vecteurs propres par la matrice nulle, donc f serait nulle, ce qui n'est pas le cas.
   $\boxed{\text{Donc } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$
2. Si $f^2 + Id_E$ était bijective, on pourrait composer à droite par son inverse dans la relation $f \circ (f^2 + Id_E) = O_{\mathcal{L}(E)}$ et obtenir que $f = O_{\mathcal{L}(E)}$, ce qui est absurde.
   $\boxed{f^2 + Id_E \text{ n'est pas bijectif.}}$

SUJET E11

Exercice principal E11

Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum a_n$ converge.

1. Question de cours.
   Rappeler les conditions de convergence des séries géométriques, géométriques dérivées et des séries exponentielles. En cas de convergence, rappeler la valeur de la somme de ses séries.

2. (a) La suite $A_1 = \left(\dfrac{1}{n!}\right)$ appartient-elle à $\mathcal{C}$?
   (b) La suite $A_2 = ((-1)^n)$ appartient-elle à $\mathcal{C}$?
   (c) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

   Pour toute suite $A = (a_n) \in \mathcal{S}$, on dit que la suite $A = (a_n)$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si
   (i) pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum a_n x^n$ converge.
   (ii) $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ admet une limite finie lorsque x se rapproche de 1 par valeurs inférieures.
   On note alors
   $$\ell(A) = \lim_{x\to 1-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \in \mathbb{R}.$$

3. (a) La suite $A_1 = \left(\dfrac{1}{n!}\right)$ vérifie-t-elle la propriété $\mathcal{P}$? Si oui, déterminer $\ell(A_1)$.
   (b) La suite $A_2 = ((-1)^n)$ vérifie-t-elle la propriété $\mathcal{P}$? Si oui, déterminer $\ell(A_2)$.
   (c) Soit $A_3 = (n^2)$ vérifie-t-elle la propriété $\mathcal{P}$? Si oui, déterminer $\ell(A_3)$.
4. Soit $A = (a_n)$ une suite de $\mathcal{S}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$ et que la suite vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \ell(A)$.
   (b) En déduire que la suite A appartient à $\mathcal{C}$.
5. Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+3} = a_n.$$
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit dans $\mathcal{C}$.
   (b) Montrer que la suite A vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si $a_0 + a_1 + a_2 = 0$.

Solution :

1. Programme officiel ECE1, page 16.
   Les séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent ssi $|q| < 1$ et dans ce cas :
   $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q},\ \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}}$$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge et $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$

2. (a) Comme la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge (en tant que série exponentielle), on conclut que :

   $\boxed{\text{la suite } \left(\frac{1}{n!}\right) \text{ appartient à } \mathcal{C}.}$

   (b) La série $\sum(-1)^n$ $\boxed{\text{diverge grossièrement}}$, donc :
   la suite $((-1)^n)$ n'appartient pas à $\mathcal{C}$.

   (c) On note que $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est non vide car il contient la suite nulle et l'ensemble $\mathcal{C}$ est stable par combinaisons linéaires.
   On conclut ainsi que $\boxed{\mathcal{C} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{S}.}$

3. (a) Pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et a pour somme e^x. Par suite, $\lim_{x\to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = \mathrm{e}^1 \in \mathbb{R}$.

   Donc, la suite $A_1 = \left(\frac{1}{n!}\right)$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$, avec $\boxed{\ell(A_1) = \mathrm{e}.}$

   (b) La série géométrique $\sum(-x)^n$ converge si et seulement si $|-x| < 1$, donc si et seulement si $x \in]-1,1[$.
   De plus, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \frac{1}{1+x}$ qui a pour limite $\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1^-. On conclut que la suite $A_2 = ((-1)^n)$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ avec $\boxed{\ell(A_2) = \frac{1}{2}.}$

   (c) Pour tout $x \in]-1,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $n^2x^n = x^2\, n(n-1)x^{n-2} + x\, n\, x^{n-1}$. La série $\sum n^2x^n$ converge comme combinaison linéaire de deux séries géométriques dérivées convergentes et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

   Cette quantité n'a pas de limite finie quand x tend vers 1^-.
   On conclut que la suite $\boxed{A_3 \text{ ne vérifie pas la propriété } \mathcal{P}.}$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, somme partielle de rang n de la série $\sum a_k$. Par positivité de la suite (a_k), la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Montrons qu'elle est majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$, $\sum_{k=0}^{n} a_kx^k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_kx^k$. Comme la suite A vérifie la propriété $\mathcal{P}$, on peut fair tendre x vers 1^- dans cette inégalité et l'on obtient :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \ell(A).}$$

   (b) La suite (S_n) est croissante et majorée, donc elle converge. Ainsi, la série $\sum a_k$ converge, ce qui prouve que :
   $\boxed{\text{la suite } A \text{ appartient à } \mathcal{C}.}$

5. (a) Supposons que A soit un élément de $\mathcal{C}$. Alors, la série $\sum a_n$ converge et, par suite, $\lim_{n\to+\infty}(a_n) = 0$. En tant que suite extraite de (a_n), pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty}(a_{3n+i}) = 0$. Or, pour tout $i \in \{0,1,2\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{3n+i} = a_i$.
   La suite $\boxed{A \text{ est donc la suite nulle.}}$

   Réciproquement, la suite nulle est bien élément de $\mathcal{C}$ et vérifie l'hypothèse.

   (b) • La suite $(|a_n|)$ est bornée par le réel $M = \max\{|a_0|,|a_1|,|a_2|\}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $|a_nx^n| \leqslant M|x|^n$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum a_nx^n$ converge absolument, donc converge.
   • Pour tout $x \in]-1,1[$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{3N-1} a_nx^n = \sum_{i=0}^{N-1} \left(a_{3i}x^{3i} + a_{3i+1}x^{3i+1} + a_{3i+2}x^{3i+2}\right).$$

$$S_N(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(a_0 x^{3i} + a_1 x^{3i+1} + a_2 x^{3i+2}\right) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \sum_{i=0}^{N-1} \left(x^3\right)^i.$$

$$\lim_{N \to +\infty} (S_N(x)) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 - x^3} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}.$$

Il suit que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ admet une limite finie quand x tend vers 1^- si et seulement si 1 est racine de $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, donc $\boxed{\text{si et seulement si } a_0 + a_1 + a_2 = 0.}$

Exercice sans préparation E11

Soit C un réel, λ un réel strictement positif et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} Ce^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Exprimer C en fonction de λ pour que f soit une densité de probabilité.
   Soit alors, pour cette valeur de C, une variable aléatoire X admettant f pour densité.
2. Exprimer X simplement à l'aide d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle.
3. On a obtenu les moyennes de 5 expériences de 10^5 réalisations indépendantes de X :
   1.5016443 1.501896 1.4995983 1.5003972 1.4982147
   Que pensez-vous de la valeur de λ ?
   Écrire des lignes de code Scilab qui demande λ à l'utilisateur, 5 expériences de 10^5 réalisations indépendantes de X, affiche leurs 5 moyennes, puis propose une estimation de λ.

Solution :

1. f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}, f \geqslant 0 \Rightarrow C \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1 \Rightarrow \boxed{C = \lambda e^{\lambda}.}$
2. Pour $x \geqslant 1$, $f(x) = \lambda e^{\lambda}.e^{-\lambda x} = \lambda \exp(-(\lambda(x-1)) = g(x-1)$ où g est la densité d'une variable aléatoire Y suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Ce résultat reste vrai si $x < 1$
   Ainsi $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} g(t-1)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x-1} g(t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{P}(Y \leqslant x-1) = \mathbb{P}(Y+1 \leqslant x)$.
   On peut écrire $\boxed{X = Y + 1 \text{ où Y suit une loi exponentielle de paramètre } \lambda.}$
3. Chaque moyenne obtenue est la moyenne empirique des 10^5 réalisations : une valeur de l'espérance de X est environ 1.5 (on peut invoquer la loi des grands nombres)
   Or, $\mathbb{E}(X) = 1 + \dfrac{1}{\lambda}$, donc $\boxed{\lambda \text{ est voisin de } \dfrac{1}{1.5-1} = 2.}$
   On propose

```
lambda= input('lambda=');
A=grand(5,100000,"exp",1/lambda);
A=1+A;
V=mean(A,'c');
disp(V');
disp(1/(mean(V)-1));
```

   Explications :
   `grand(5,100000,"exp",1/lambda)` génère 5×100000 réalisations indépendantes d'une variable de loi exponentielle de paramètre λ.
   `A=1+A` ajoute 1 à chaque élément de A.
   `V=mean(A,'c')` : V est une matrice colonne dont le i-ème élément est la moyenne des éléments de la $i$ème ligne de A.
   `V'` transpose V.