HEC PARIS

ORAL HEC Paris 2019

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option économique

Concours HEC 2019

Sujet E 209

Exercice principal

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $\phi_A(M) = AM - MA$. Pour tout couple $(i,j) \in [|1,n|]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que tous ses éléments soit nul sauf celui à la ième ligne et jième colonne qui vaut 1.

1. Donner la définition d'une valeur propre. Quels sont les conditions nécéssaires et suffisantes afin qu'une matrice soit diagonalisable.
2. Montrer que 0 est valeur propre de ϕ_A.
3. **Dans cette question uniquement on suppose** $n = 2$ **et** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
   — Écrire la matrice associée à ϕ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   — Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
4. Dans cette question on suppose $n \geq 2$ et on considère une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ ainsi que l'application $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\psi(M) = PMP^{-1}$.
   — Montrer que ψ est un automorphisme.
   — Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\psi(B) = A$. Montrer que si ϕ_B est diagonalisable il en est de même de ϕ_A.
5. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Montrer que la matrice E_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ est vecteur propre de ϕ_D.
6. Montrer que si A est diagonalisable il en est de même de ϕ_A.

Exercice sans préparation

1. Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a(x+4)}{b+|x|} & \text{si} \quad x > -4 \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est une fonction de répartition.

2. Discuter l'existence d'une espérance et d'une variance pour variable aléatoire X admettant f comme fonction de répartition.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours
2. $\phi_A(I_n) = 0$ et $I_n \neq 0$ donc 0 est une valeur propre de ϕ_A.
3. La matrice demandée est : $\quad \mathrm{Mat}(\phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Le rang de cette matrice est 2 et par le théorème du rang : $\dim(E_0) = 4 - 2 = 2$.
4. (a) La linéarité est immédiate et $\phi^{-1}(M) = P^{-1}MP$.

   (b) $B = P^{-1}AP$ et si X est un vecteur propre de ϕ_B alors $\psi(X)$ est un vecteur propre de ϕ_A Ainsi, s'il existe une base de vecteurs propres de B, alors il existe une base de vecteurs propres de A.
5. Pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2\}^2$, on a :

$$\phi_D(E_{i,j}) = DE_{i,j} - E_{i,j}D = \lambda_i E_{i,j} - \lambda_j E_{i,j} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$$

   de sorte que $E_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_D.
   Par conséquent, il existe une base composée de vecteurs propres de phi_D, ce qui permet d'affirmer que l'endomorphisme ϕ_D est diagonalisable.
6. Si A est diagonalisable alors A est semblable à une matrice diagonale D ;
   d'après la question 5, ϕ_D est diagonalisable et d'après la question 4, ϕ_A aussi.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. On peut procéder par analyse-synthèse.

   • Analyse : recherche de conditions nécessaires pour que f soit une fonction de répartition.
   Comme la limite de f en $+\infty$ doit être égale à 1, on a nécessairement $a = 1$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$, avec :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{b-4}{(x+b)^2} \qquad \forall x \in]-4, 0[,\ f'(x) = \frac{b+4}{(b-x)^2} \qquad \forall x < -4,\ f'(x) = 0$$

   Comme f doit être croissante, on a nécessairement $b \geq 4$.

   • Synthèse.
   Si $a = 1$ et $b \geq 4$, f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$. Comme f tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$, il s'agit bien d'une fonction de répartition.
2. Soit g le prolongement de f' à $\mathbb{R}$ obtenu en posant $g(-4) = g(0) = 0$.
   La variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
   • Si $b \neq 4$, $xg(x)$ est équivalent à $\dfrac{b-4}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
   Par comparaison, l'intégrale est divergente et X n'a pas d'espérance.
   • Si $b = 4$ alors $P(X \in [-4, 0]) = 1$; donc X est bornée et admet une espérance et une variance.

Concours HEC 2019

Sujet E 211

Exercice principal

Pour tout nombre réel x, on pose

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \text{et} \qquad S(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. a) Question de cours : propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

   b) Donner l'allure du graphe de la fonction S.

2. Soit X une variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi normale centrée réduite.

   a) Pour tout $x > 0$, justifier l'inégalité : $\mathbb{P}(|X| > x) \leq \dfrac{1}{x^2}\,.$

   b) Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x\,.$

3. a) Justifier, pour tout réel $A > 0$, l'égalité :

$$\int_0^A S(x)\,\mathrm{d}x = A\,S(A) + \int_0^A x\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

   b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x\,.$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = S(x)\,\mathrm{e}^{x^2/2}\,.$

   a) A l'aide du théorème d'intégration par parties, montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq S(x) \leq \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}\,.$$

   b) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

EXERCICE SANS PRÉPARATION

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2.

1. Construire une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles.
2. Construire une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables.

Corrigé de l'exercice principal

1. a) Question de cours.

b) La fonction S est décroissante et son graphe se déduit aisément de celui de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite, puisque $S = 1 - \varphi$.

2. a) On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à X qui a pour espérance $E(X) = 0$ et pour variance $V(X) = 1$.

b)

• La fonction $x \mapsto 1 - \Phi(x)$ est définie, continue et positive sur $\mathbb{R}^+$.

• En utilisant la question précédente et les propriétés de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on trouve :

$$\forall x > 0,\ S(x) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(|X| > x) \leq \frac{1}{2\,x^2}\,\cdot$$

Dès lors, le critère de comparaison des intégrales de fonctions continues et positives prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)dx$ converge.

3. a) Comme la dérivée de S est $-\varphi$, on parvient au résultat en intégrant par parties.

b) En faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient, grâce à la majoration trouvée en 2.b

$$\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

On conclut que

$$\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\cdot$$

4. a) Soit $x > 0$.

• On effectue une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^A e^{-t^2/2}dt$ en posant :

$$u'(t) = te^{-t^2/2} \qquad \text{et} \qquad v(t) = \frac{1}{t}$$

les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $[x, +\infty[$. Ainsi,

$$\forall\, A > x \qquad \int_x^A e^{-t^2/2}dt = \Big[-\frac{e^{-t^2/2}}{t}\Big]_x^A - \int_x^A \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, chaque intégrale étant convergente (puisque celle de gauche l'est...),

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt \qquad (*)$$

Par théorème de positivité de l'intégrale,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x}.$$

Il reste à multiplier par $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ pour obtenir la majoration demandée.

- On effectue une nouvelle intégration par parties dans $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt$ pour obtenir

$$\forall A > x > 0 \qquad \int_x^A \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt = \Big[-\frac{e^{-t^2/2}}{t^3}\Big]_x^A - \int_x^A \frac{3e^{-t^2/2}}{t^4}dt.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, chaque intégrale étant convergente,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt = \frac{e^{-x^2/2}}{x^3} - \int_x^{+\infty} \frac{2e^{-t^2/2}}{t^4}dt \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x^3}.$$

En revenant à $(*)$, on trouve

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt \geq \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \frac{e^{-x^2/2}}{x^3}$$

Il reste à multiplier par $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ pour obtenir la minoration demandée.

b) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente, puisque $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}$ quand x tend vers l'infini.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. On propose la famille composée des quatre matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que ces quatre matrices sont inversibles (matrices triangulaires sans 0 sur la diagonale) et l'on vérifie qu'elles constituent une famille libre de quatre vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension 4.

2. On propose la famille composée des quatre matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que ces quatre matrices sont diagonalisables car elles possèdent chacune deux valeurs propres réelles distinctes. On vérifie également que ces quatre matrices constituent une famille libre.

Remarque : l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel puisqu'il n'est pas stable par addition.

Concours HEC 2019

Sujet E 214

Exercice principal

Soit (a, b) un couple de réels tels que $a^2 - 4b > 0$.
On s'intéresse ici aux fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que

$$f'' + af' + bf = 0.$$

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
On note F l'ensemble des éléments f de E tels que

$$f'' + af' + bf = 0.$$

On note enfin F_0 l'ensemble des éléments de F vérifiant de plus

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

1. Question de cours.
   Rappeler la définition de la dimension d'un espace vectoriel. Comparer cette dimension avec le cardinal d'une famille libre de vecteurs de ce même espace vectoriel.
2. Montrer que F et F_0 sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
3. Soient s et r les deux solutions réelles de l'équation

   $$x^2 + ax + b = 0.$$

   On suppose $s < r$. Soient f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = e^{rx} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = e^{sx}.$$

   Montrer que (f_1, f_2) est une famille libre d'éléments de F. Que peut-on en déduire concernant la dimension de F ?
4. Soit f un élément de F.
   (a) Montrer qu'il existe un unique couple (a_1, a_2) de réels tels que

   $$f - a_1 f_1 - a_2 f_2 \in F_0.$$

   (b) Soient g_1 et g_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_1(x) = e^{-rx}(f'(x) - sf(x)) \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = e^{-sx}(f'(x) - rf(x)).$$

   Montrer que g_1 et g_2 sont deux fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

   (c) Soit $f \in F_0$. Soient g_1 et g_2 définies comme dans la question précédente. Montrer que les fonctions g_1, g_2 et f sont identiquement nulles.
5. Soit φ l'application définie par

   $$\varphi \begin{cases} F \to \mathbb{R}^2 \\ f \to \big(f(0), f'(0)\big) \end{cases}$$

   Montrer que φ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la même loi uniforme sur $[-1, 1]$. Soit U une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé, indépendante de X et telle que

$$P(U = 1) = P(U = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S = UX$.

1. (a) Que fait la fonction *Scilab* suivante ?

```
function y=rad()
  x=rand();
  if x < = 0.5 then
        y=1
    else
        y=-1
  end
endfunction
```

   (b) Ecrire un script *Scilab* utilisant la fonction précédente qui permet de simuler la loi de S.

2. Déterminer la loi de S.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours.
2. On montre que F et F_0 sont inclus dans E, qu'ils contiennent chacun la fonction nulle et qu'ils sont stables par combinaison linéaire. On conclut donc que F et F_0 sont deux sous-espaces vectoriels de E. En tant que tels, F et F_0 sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
3. • On montre d'abord que f_1 et f_2 sont deux éléments de F. En effet, f_1 et f_2 sont dans E et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = e^{rx} \qquad f_1'(x) = re^{rx} \qquad f_1''(x) = r^2 e^{rx}$$

si bien que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_1''(x) + af_1'(x) + bf_1(x) = e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0.$$

Donc f_1 est dans F. On montre de même que f_2 est dans F.
• Il reste à montrer que la famille (f_1, f_2) est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda e^{rx} + \mu e^{sx} = 0 \qquad (*)$$

En divisant par $e^{rx} > 0$, on obtient $\lambda + \mu e^{(s-r)x} = 0$ et on fait tendre x vers $+\infty$.
Sachant que $s - r < 0$, il reste $\lambda = 0$. En reportant dans $(*)$ et en divisant par $e^{sx} > 0$, on trouve $\mu = 0$. On conclut que (f_1, f_2) est une famille libre d'éléments de F. Ainsi, par la question 1, $\dim(F) \geq 2$.

4. (a) Soit $g = f - a_1 f_1 - a_2 f_2$. Comme f, f_1 et f_2 sont dans F qui est un espace vectoriel, alors g est dans F. De plus, $g \in F_0 \iff g(0) = g'(0) = 0$, d'où :

$$g \in F_0 \iff \begin{cases} f(0) - a_1 f_1(0) - a_2 f_2(0) = 0 \\ f'(0) - a_1 f_1'(0) - a_2 f_2'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(0) = a_1 + a_2 \\ f'(0) = ra_1 + sa_2 \end{cases}$$

Ainsi, comme $s - r \neq 0$, $\quad g \in F_0 \iff \begin{cases} a_1 = \dfrac{f'(0) - sf(0)}{r - s} \\ a_2 = \dfrac{f'(0) - rf(0)}{s - r} \end{cases}$

Il existe donc un unique couple (a_1, a_2) de réels tels que $f - a_1 f_1 - a_2 f_2 \in F_0$.

(b) Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, g_1 et g_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_1'(x) = e^{-rx}\Big(f''(x) - sf'(x)\Big) - re^{-rx}\Big(f'(x) - sf(x)\Big)$$

d'où,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_1'(x) = e^{-rx}\Big(f''(x) - (s + r)f'(x) + srf(x)\Big)$$

Comme s et r sont les deux solutions réelles de l'équation du second degré $x^2 + ax + b = 0$ alors $sr = b$ et $s + r = -a$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_1'(x) = e^{-rx}\Big(f''(x) + af'(x) + bf(x)\Big) = 0 \qquad \text{car} \quad f \in F.$$

On montre de même que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_2'(x) = e^{-sx}\Big(f''(x) + af'(x) + bf(x)\Big) = 0$$

du fait que $f \in F$. On conclut que les fonctions g_1 et g_2 sont constantes sur $\mathbb{R}$.

(c) Comme $f \in F_0 \subset F$, les fonctions g_1 et g_2 définies comme dans la question précédente sont constantes sur $\mathbb{R}$.
Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_1(x) = g_1(0) = e^0\Big(f'(0) - sf(0)\Big) = 0 \qquad \text{car} \quad f \in F_0.$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_2(x) = g_2(0) = e^0\Big(f'(0) - rf(0)\Big) = 0 \qquad \text{car} \quad f \in F_0.$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$0 = g_1(x) = e^{-rx}\Big(f'(x) - sf(x)\Big) \text{ et } \qquad 0 = g_2(x) = e^{-sx}\Big(f'(x) - rf(x)\Big)$$

ce qui implique que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad sf(x) = rf(x) \qquad \Rightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad (s-r)f(x) = 0.$$

Comme $s < r$, on conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
Réciproquement, la fonction nulle est bien dans F_0, si bien que $F_0 = \{0\}$.

5. • On commence par montrer que φ est linéaire.
   • Puis, l'on montre que φ est injective. En effet,

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{f \in F,\ f(0) = f'(0) = 0\} = F_0 = \{0\} \qquad \text{d'après la question 4(c).}$$

   • On montre ensuite que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \dim(F)$.
   On sait déjà que la famille (f_1, f_2) est une famille libre de F. Il reste à vérifier que cette famille est également génératrice de F. Soit $f \in F$. Par la question 4(a), il existe un couple de réels (a_1, a_2) tel que $f - a_1f_1 - a_2f_2 \in F_0$. Or, $F_0 = \{0\}$ (question 4(c)). D'où, $f = a_1f_1 + a_2f_2$, ce qui prouve que (f_1, f_2) est une famille libre et génératrice, donc une base de F.
   • Par corollaire du théorème du rang, comme φ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, φ est bijective. On conclut que φ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. La fonction simule la loi de U.
2.
```
X=grand'1,1,'unf',-1,1) // simulation de la loi de X
U=rad() // Rademacher
S=U*X  // loi de S
```
3. On note que $S(\Omega) = [-1, 1]$. Pour tout $x \in [-1, 1]$, en utilisant le système complet d'événements $([U = 1], [U = -1])$,

$$P(S \le x) = P(UX \le x) = \frac{1}{2}P(X \le x) + \frac{1}{2}P(X \ge -x).$$

D'où,

$$P(S \le x) = \frac{1}{2}\left(P(X \le x) + 1 - P(X \le -x)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x+1}{2} - \frac{1-x}{2}\right) = \frac{x+1}{2}.$$

On en déduit que S suit une loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Concours HEC 2019

Sujet E 218

EXERCICE PRINCIPAL

Soit $\alpha > 0$ et $\sum u_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

Pour tout $n \in N^*$, on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \text{et, si } n \geq 2, \quad v_n = \frac{u_n}{(R_{n-1})^\alpha} \ .$$

1. Question de cours : énoncer le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

2. **On supposera dans cette question que $u_n = \dfrac{1}{2^n}$.**
   (a) Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer R_n.
   (b) En déduire v_n, puis donner une condition sur α pour que $\sum v_n$ converge.

Désormais, on ne suppose plus que $u_n = \frac{1}{2^n}$ et on traite le cas général.

3. Exprimer v_n en fonction de R_n, R_{n-1} et α.
4. En prenant $\alpha = 1$
   (a) Exprimer $\ln(1 - v_n)$ en fonction de $\ln(R_n)$ et de $\ln(R_{n-1})$.
   (b) en déduire la nature de $\sum v_n$.
5. On suppose $\alpha > 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $R_{n-1}^\alpha \leq R_{n-1}$
   (b) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.
6. On suppose $0 < \alpha < 1$.
   (a) Calculer $\displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^\alpha}$
   (b) En déduire la nature de $\sum v_n$.

Exercice sans préparation

Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire discrète telle que $E(X) = V(X) = a$.

1. Donner un exemple de variable aléatoire vérifiant cette condition.
2. Montrer que $P([X \geq 2a]) \leq P([(X - a + 1)^2 \geq (a + 1)^2])$.
3. Montrer que $P([X \geq 2a]) \leq \frac{1}{a + 1.}$

Corrigé de l'exercice principal

1. Cours
2. (a) $\sum u_n$ converge car somme géométrique de raison $1/2 < 1$, et

$$R_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^n}\ .$$

   (b) On en déduit $v_n = \dfrac{2^{-\alpha}}{2^{(1-\alpha)n}}$.

   La série $\sum v_n$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2^{1-\alpha}}$ donc converge si et seulement si $\alpha < 1$.

3. Pour $n \geq 1$ on a $u_n = R_{n-1} - R_n$ donc $v_n = \frac{R_{n-1}-R_n}{R_{n-1}^\alpha}$.
4. Lorsque $\alpha = 1$,

   (a) $v_n = 1 - \dfrac{R_n}{R_{n-1}}$ et $\ln(1 - v_n) = \ln(R_n) - \ln(R_{n-1})$.

   (b) Par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1 - v_k) = \ln(R_n) - \ln(R_0)$. Or $\lim R_n = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(1 - v_k) = -\infty$$

   et la série $\sum \ln(1 - v_n)$ diverge.

   Si (v_n) ne tend pas vers 0, la série $\sum v_n$ diverge ; si (v_n) tend vers 0, $\ln(1 - v_n) \sim -v_n$ et la série $\sum v_n$ étant à terme général positif, elle a même nature que $\sum \ln(1 - v_n)$, à savoir divergente.

5. (a) (R_n) est positive et tend vers 0 donc il existe un rang N à partir duquel $0 \leq R_{n-1} \leq 1$. Mais alors, si $\alpha > 1$ on a $R_{n-1}^\alpha \leq R_{n-1}$.

   (b) Pour $n \geq N$ on a donc $v_n \geq \frac{u_n}{R_{n-1}}$. D'après la question précédente la série $\sum \frac{u_n}{R_{n-1}}$ diverge, et par comparaison de séries à termes positifs il en est de même de $\sum v_n$.

6. (a) $\displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\big(R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}\big)$.

   (b) Par ailleurs, $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante donc $\displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{R_{n-1}^\alpha} = \frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}^\alpha} = v_n$ donc $0 \leq v_n \leq \frac{1}{1-\alpha}\big(R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}\big)$.

   Par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big(R_{k-1}^{1-\alpha} - R_k^{1-\alpha}\big) = R_0^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}$. Puisque $1-\alpha > 0$ et $\lim R_n = 0$ on en déduit que la série $\sum\big(R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}\big)$ converge ; par comparaison de séries à termes positifs il en est de même de $\sum v_n$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Une variable qui suit une loi de Poisson de paramètre a.
2. $[X \geq 2a] \subset [X - a + 1 \geq a + 1]$,
   or $a + 1 > 0$, donc $[X - a + 1 \geq a + 1] \subset [(X - a + 1)^2 \geq (a + 1)^2]$.

   Par conséquent :
   $$[X \geq 2a] \subset [(X - a + 1)^2 \geq (a + 1)^2]$$
   d'où l'inégalité souhaitée.

3. $X - a + 1$ admet une variance et donc un moment d'ordre 2. De plus nous avons
   $$E((X - a + 1)^2) = V(X - a + 1) + E(X - a + 1)^2 = V(X) + 1 = a + 1 \ .$$
   En appliquant l'inégalité de Markov, on obtient
   $$P([(X - a + 1)^2 \geq (a + 1)^2]) \leq \frac{E((X - a + 1)^2)}{(a + 1)^2} = \frac{1}{a + 1}$$
   d'où l'inégalité souhaitée.

Concours HEC 2019

Sujet E 219

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : énoncer le théorème de la bijection.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par la relation $f_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1} - 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$.

   b) Montrer que f_n s'annule sur $\mathbb{R}^+$ en un et un seul réel, que l'on note x_n, et montrer que $x_n > 1$.

3. a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ décroît. *On pourra rechercher le signe de* $f_{n+1}(x_n)$.

   b) Que déduit-on des divers résultats précédents ?

4. a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1.

   b) Montrer que la fonction $h : x \mapsto x\,(x-1)$ est une bijection croissante de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$.

   c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n := x_n^n$. En exprimant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h(u_n)$ en fonction de x_n, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   d) Déterminer un équivalent simple de $x_n - 1$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Une urne contient p boules numérotées de 1 à p, p étant un entier naturel non nul.
L'entier naturel n étant également non nul, on considère la variable aléatoire S égale au nombre de numéros distincts obtenus en n tirages d'une boule de l'urne, *avec* remise.
Déterminer l'espérance de S.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.

2. a) La fonction f_n est polynomiale, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.
Son coefficient dominant est 1 donc sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(x) = \big((2n+1)\,x^n - (n+1)\big)\,x^n$: en notant $\alpha_n := \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{1/n}$, on observe que f_n décroît strictement sur $[0, \alpha_n]$ et croît strictement sur $[\alpha_n, +\infty[$.

b) Comme $f_n(0) = f_n(1) = -1$, pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) < 0$ d'après l'étude précédente.
Comme f_n est continue sur $[1, +\infty[$, que $f_n(1) < 0$ et que $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, f_n admet au moins un zéro sur $]1, +\infty[$.
Comme f_n croît strictement sur $[1, +\infty[$ puisque $\alpha_n < 1$, ce zéro est unique.
On conclut que f_n s'annule sur $\mathbb{R}^+$ en un et un seul réel $x_n \in]1, +\infty[$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{2n+3} - x_n^{n+2} - 1 = x_n^2(x_n^{n+1} + 1) - x_n^{n+2} - 1 = (x_n^{n+2} + x_n + 1)(x_n - 1)$$

et par conséquent $f_{n+1}(x_n) > 0$, ce qui implique que $x_{n+1} < x_n$. La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ décroît donc.

b) La suite $(x_n)_{n\geq1}$, décroissante et minorée, converge, et sa limite ℓ vérifie $\ell \geq 1$.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \geq \ell$ donc $x_n^n \geq \ell^n$.
Si $\ell > 1$, la suite $(x_n^n)_{n\geq1}$ diverge donc vers $+\infty$ et la suite $\big(x_n^{n+1}(x_n^n - 1)\big)_{n\geq1}$ aussi, ce qui contredit qu'elle soit constante de valeur 1.
On conclut que $\ell = 1$.

b) La fonction h, polynomiale, est continue sur $[1, +\infty[$, et elle y est strictement croissante. Elle est donc bijective de $[1, +\infty[$ sur l'intervalle $J := h\big([1, +\infty[\big)$. Comme $h(1) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, $J = \mathbb{R}^+$.
On conclut que la fonction $h : x \mapsto x\,(x-1)$ est une bijection croissante de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^n \geq 1$ et $h(x_n^n) = \frac{1}{x_n}$: il s'ensuit que $u_n = h^{-1}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = 1$ et que la fonction h^{-1} est continue au point 1, la suite $(u_n)_{n\geq1}$ converge vers le réel $h^{-1}(1)$ qui n'est autre que le nombre d'or $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

d) De la relation $\dfrac{1}{x_n^{n+1}} = x_n^n - 1$, on tire que $(n+1)\ln x_n = -\ln(x_n^n - 1)$.
Or, quand n tend vers $+\infty$, $(n+1)\ln x_n \sim n\,(x_n - 1)$ alors que $-\ln(x_n^n - 1) \sim -\ln(\phi - 1) = \ln\phi$.
Il s'ensuit que, quand n tend vers $+\infty$, $n\,(x_n - 1) \sim \ln\phi$, soit que

$$x_n - 1 \sim \frac{\ln\phi}{n}.$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

On utilisera le modèle $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, Ω étant l'ensemble des n-listes d'élément de $[\![1,p]\!]$, $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω et P la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Considérons, pour $i \in [\![1,p]\!]$, la variable aléatoire X_i prenant la valeur 1 si le numéro i est l'un des numéros tirés, la valeur 0 sinon.

On constate d'abord que $S = \sum_{i=1}^{p} X_i$.

D'autre part, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$,

$$P(X_i = 0) = \frac{(p-1)^n}{p^n} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n.$$

En conséquence,

$$E(S) = \sum_{i=1}^{p} E(X_i) = \sum_{i=1}^{p} P(X_i = 1) = p\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right).$$

Concours HEC 2019

Sujet E 220

Exercice principal

Dans l'exercice, n désigne un entier strictement positif.

1. Question de cours : définition d'une matrice inversible.
2. Soit A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Démontrer l'équivalence :

$$AB \text{ est inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ et } B \text{ sont inversibles}$$

3. Pour tout élément ω de Ω, on désigne par $B(\omega)$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par :

$$B(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & X_3(\omega) \\ X_2(\omega) & X_4(\omega) \end{pmatrix}$$

   On note U l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels la matrice $B(\omega)$ est inversible, et on admet que U est un événement.

   (a) Démontrer que $P(U) = 2p^2(1-p^2)$.

   (b) En déduire que $P(U) \leq \dfrac{1}{2}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout élément ω de Ω on désigne par $B_k(\omega)$ la matrice carrée de taille 2 telle que :

$$B_k(\omega) = \begin{pmatrix} X_{4k+1}(\omega) & X_{4k+3}(\omega) \\ X_{4k+2}(\omega) & X_{4k+4}(\omega) \end{pmatrix}$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels la matrice-produit $B_0(\omega) \times B_1(\omega) \times \cdots \times B_n(\omega)$ est inversible.

   Calculer $P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big)$ et $P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big)$.

Exercice sans préparation

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{O} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\left((\ln x)^2 + 2y^2\right) .$$

1. Démontrer qu'il existe dans $\mathcal{O}$ un unique point-col pour f.
2. La fonction f admet-elle sur $\mathcal{O}$ un maximum global ? un minimum global ?

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.
2. • Si A et B sont inversibles, alors :

$$AB\,B^{-1}A^{-1} = A\,A^{-1} = I_n$$

ce qui prouve que AB est inversible et que son inverse est $B^{-1}A^{-1}$.

• Si AB est inversible, la matrice

$$A\big(B\,(AB)^{-1}\big) = \big((AB)^{-1}A\big)B = I_n$$

ce qui prouve que A et B sont inversibles, d'inverses respectives $B\,(AB)^{-1}$ et $(AB)^{-1}A$.

3. (a)

$$U = \{\omega \in \Omega\,;\ \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\}\ .$$

Il en résulte que :

$$P(U) = 2p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) = 2p^2(1-p)(1-p+2p) = 2p^2(1-p^2)$$

(b) On déduit l'inégalité demandée de l'encadrement $0 \leq p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$ ·.

4. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante (puisque l'inversibilité de la matrice $B_0B_1\dots B_{n+1}$ entraîne celle de $B_0B_1\dots B_n$), on a :

• $P\big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n\big) = P(U_0) = 2p^2(1-p^2)$.

• $P\big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n\big) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(2p^2(1-p^2)\big)^{n+1} = 0$, grâce à 3.b et au lemme des coalitions, qui permet d'affirmer l'indépendance mutuelle des événements liés aux diverses matrices B_k.

Corrigé de l'exercice sans préparation

$$\forall\,(x,y) \in \mathcal{O} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\left((\ln x)^2 + 2y^2\right)\ .$$

1. La fonction f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathcal{O}$.
Ses dérivées partielles d'ordre 1 sont données par

$$\begin{cases}\partial_1(f)(x,y) = (\ln x)^2 + 2\ln x + 2y\\ \partial_2(f)(x,y) = 4xy\end{cases}$$

et sa matrice hessienne par

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{2}{x} & 4y \\ \\ 4y & 4x \end{pmatrix} .$$

Par annulation des deux dérivées partielles d'ordre 1, on trouve exactement deux points critiques dans l'ouvert $\mathcal{O}$:

$$\begin{cases} A = (1,0) \\ B = (\mathrm{e}^{-2}, 0) \end{cases} .$$

Au point A, les deux valeurs propres de la matrice hessienne sont strictement positives (2 et 4) et f admet donc un minimum local en A.

Au point B, les deux valeurs propres de la matrice hessienne sont de signes opposés ($-2\mathrm{e}^{-2}$ et $4\mathrm{e}^{-2}$) et B est un point col de f.

L'unique point col de f est donc B.

2. La fonction f n'admet aucun maximum global puisqu'elle n'admet aucun maximum locl.

   Le point A correspond à un minimum global de f puisque $f(0,1) = 0$ et que la fonction f ne prend que des valeurs positives ou nulles sur $\mathcal{O}$.