



**ORAL HEC 2016**

**MATHÉMATIQUES**

**EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES**

**Option économique**

### EXERCICE PRINCIPAL E 65

Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

On appelle *médiane* de  $X$  tout réel  $m$  qui vérifie les deux conditions :  $P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$  et  $P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$ .

On suppose que  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

1. Question de cours : Définition et propriétés de la loi exponentielle.

2.a) Montrer que  $X$  admet une unique médiane  $m$  que l'on calculera.

b) Soit  $M$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$ , à valeurs réelles, telle que :  $\forall x \in \mathbf{R}, M(x) = E(|X - x|)$ .

Étudier les variations de la fonction  $M$  sur  $\mathbf{R}$  et montrer que  $m$  est l'unique point en lequel  $M$  atteint son minimum.

3. On suppose que le paramètre  $\lambda$  est inconnu. Soit  $\alpha$  un réel vérifiant  $0 < \alpha < 1$ .

Pour  $n$  entier de  $\mathbf{N}^*$ , soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que  $X$ . On pose pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :  $Z_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

a) Quelle est la loi de  $Z_n$  ?

b) Établir l'existence de deux réels  $c$  et  $d$  tels que :  $P\left(\left[Z_n \leq \frac{c}{\lambda}\right]\right) = \frac{\alpha}{2}$  et  $P\left(\left[Z_n \geq \frac{d}{\lambda}\right]\right) = \frac{\alpha}{2}$ .

c) En déduire un intervalle de confiance du paramètre  $m$  au niveau de confiance  $1 - \alpha$ .

### CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 65

1. Cours.

2.a) On a :  $\forall x \geq 0, P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$  et les réels  $m$  vérifient :  $1 - e^{-\lambda m} \geq \frac{1}{2}$  et  $e^{-\lambda m} \geq \frac{1}{2}$ , donc  $e^{-\lambda m} = \frac{1}{2}$ .

Par suite, l'équation  $e^{-\lambda m} = \frac{1}{2}$  fournit l'unique solution :  $m = \frac{1}{\lambda} \ln 2$ .

b)  $\forall x \in \mathbf{R}, M(x) = E(|X - x|) = \int_0^{+\infty} |u - x| \lambda e^{-\lambda u} du = \int_x^{+\infty} (u - x) \lambda e^{-\lambda u} du - \int_0^x (u - x) \lambda e^{-\lambda u} du$ .

Des calculs (peut-être un peu longs) mais sans difficulté conduisent à :  $\forall x \in \mathbf{R}, M(x) = \frac{2}{\lambda} e^{-\lambda x} + x - \frac{1}{\lambda}$ .

L'étude de la fonction  $M$  montre bien que  $m = \frac{1}{\lambda} \ln 2$  est l'unique point en lequel  $M$  atteint son minimum.

3.a) Question classique :  $Z_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$ .

b) On note  $G_n$  la fonction de répartition de  $Z_n$ . On cherche  $c$  et  $d$  (qui sont non nuls) tels que  $G_n\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \frac{\alpha}{2}$  et  $1 - G_n\left(\frac{d}{\lambda}\right) = \frac{\alpha}{2}$ , c'est-à-dire  $1 - e^{-n\lambda c/\lambda} = \frac{\alpha}{2}$  et  $1 - e^{-n\lambda d/\lambda} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ , d'où :

$$c = -\frac{1}{n} \ln(1 - \alpha/2) \quad \text{et} \quad d = -\frac{1}{n} \ln(\alpha/2).$$

c) On a :  $P\left(\frac{c}{\lambda} \leq Z_n \leq \frac{d}{\lambda}\right) = 1 - \alpha \implies P\left(\frac{Z_n}{d} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \frac{Z_n}{c}\right) = 1 - \alpha$ . Or,  $m = \frac{\ln 2}{\lambda}$ . Par suite,

$$P\left(\frac{\ln 2}{d} Z_n \leq m \leq \frac{\ln 2}{c} Z_n\right) = 1 - \alpha.$$

Avec les valeurs de  $c$  et  $d$  calculées précédemment, l'intervalle  $\left[\frac{\ln 2}{d} Z_n, \frac{\ln 2}{c} Z_n\right]$  est un intervalle de confiance de la médiane  $m$  au niveau de confiance  $1 - \alpha$ .

### EXERCICE SANS PRÉPARATION E 65

Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  admettant  $n$  valeurs propres distinctes. Montrer qu'un endomorphisme  $g$  de  $E$  vérifie  $f \circ g = g \circ f$  si et seulement si les vecteurs propres de  $f$  sont des vecteurs propres de  $g$ .

### CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 65

Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de vecteurs propres pour  $f$  associés aux valeurs propres respectives  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Le sous-espace propre de  $f$  associé à  $\lambda_i$  est la droite engendrée par  $e_i$ .

• Si  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sont des vecteurs propres de  $g$  associés aux valeurs propres  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  (non nécessairement deux à deux distinctes), on a :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f \circ g(e_i) = f(\mu_i e_i) = \mu_i \lambda_i e_i = g(\lambda_i e_i) = g \circ f(e_i)$ .

Donc, les endomorphismes  $f \circ g$  et  $g \circ f$  coïncident sur une base et sont donc égaux.

• Réciproquement, si  $f \circ g = g \circ f$ , on a :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f \circ g(e_i) = g \circ f(e_i)$ , soit  $f(g(e_i)) = \lambda_i g(e_i)$ .

Ainsi,  $g(e_i)$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$  : le sous-espace propre étant la droite engendrée par  $e_i$ , le vecteur  $g(e_i)$  est colinéaire à  $e_i$  et par suite,  $e_i$  est un vecteur propre de  $g$ .

## EXERCICE PRINCIPAL E 82

On suppose que toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

1. Question de cours : Loi uniforme sur un intervalle  $[a, b]$  ; définition, propriétés.

2. Pour tout  $x$  réel, on note  $[x]$  la partie entière de  $x$ .

a) Pour  $n$  entier de  $\mathbf{N}^*$ , montrer que pour tout  $x$  réel, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[nx]}{n} = x$ .

b) Établir pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , l'équivalence suivante :  $[y] \leq x \iff y < [x] + 1$ .

c) Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels vérifiant  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$  et soit  $N_n(\alpha, \beta)$  le nombre d'entiers  $k$  qui vérifient  $\alpha < \frac{k}{n} \leq \beta$ . Exprimer  $N_n(\alpha, \beta)$  en fonction de  $[n\alpha]$  et  $[n\beta]$ .

3. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $Y_n$  la variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Soit  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit la

variable aléatoire  $Z_n$  par :  $Z_n = \frac{[nZ]}{n}$ . Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels vérifiant  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ .

a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\alpha < Y_n \leq \beta) = \beta - \alpha$ .

b) Comparer les fonctions de répartition respectives de  $Y_n$  et  $Z_n$ . Conclusion.

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 82

1. Cours.

2.a) Par définition,  $[nx] \leq nx < [nx] + 1 \implies x - 1/n < \frac{[nx]}{n} \leq x \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[nx]}{n} = x$ .

b) •  $[y] \leq x \implies [y] \leq [x] \implies y < [y] + 1 \leq [x] + 1$ .

•  $y < [x] + 1 \implies [y] \leq [x] \leq x$ .

c)  $\forall x > 0$ , le nombre d'entiers  $k \in ]0, x]$  est  $[x]$ . Or,  $\{k \in \mathbf{N}; n\alpha < k \leq n\beta\} = \{k; 0 < k \leq n\beta\} \setminus \{k; 0 < k \leq n\alpha\}$   
Donc,  $N_n(\alpha, \beta) = [n\beta] - [n\alpha]$ .

3.a) On a :  $\alpha < Y_n \leq \beta = \bigcup_{n\alpha < k \leq n\beta} \left[ Y_n = \frac{k}{n} \right] \implies P(\alpha < Y_n \leq \beta) = \sum_{n\alpha < k \leq n\beta} P\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} N_n(\alpha, \beta)$ .

Par suite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\alpha < Y_n \leq \beta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[n\beta] - [n\alpha]}{n} = \beta - \alpha$ .

b) On a :  $P(Y_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ . D'autre part,  $[Z_n \leq x] = \left[ \frac{[nZ]}{n} \leq x \right] = \left[ [nZ] \leq nx \right]$ .

D'après 2.b), on a :  $[Z_n \leq x] = [nZ < [nx] + 1] = \left[ Z < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} \right] \implies P(Z_n \leq x) = P\left(Z < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n}\right)$ .

Par suite,  $P(Z_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ .

Les variables aléatoires  $Y_n$  et  $Z_n$  ont la même fonction de répartition, donc elles ont la même loi.

### EXERCICE SANS PRÉPARATION E 82

Soit  $x$  réel et  $M(x)$  la matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  définie par :  $M(x) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2x & 2x \end{pmatrix}$ .

Pour quelles valeurs de  $x$  la matrice  $M(x)$  est-elle diagonalisable ?

### CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 82

Le réel  $\lambda$  est valeur propre de  $M(x)$  ssi la matrice  $A(\lambda) = M(x) - \lambda I = \begin{pmatrix} x - \lambda & -1 \\ 2x & 2x - \lambda \end{pmatrix}$  n'est pas inversible c'est-à-dire ssi  $P(\lambda) = (x - \lambda)(2x - \lambda) + 2x = \lambda^2 - 3x\lambda + 2x^2 + 2x = 0$ . Son discriminant est  $\Delta = x(x - 8)$ .

- Si  $x \in ]0, 8[$ , le polynôme  $P(\lambda)$  est toujours strictement positif et la matrice  $A(\lambda)$  est inversible, donc  $M$  n'est pas diagonalisable.
- Si  $x = 0$ , alors  $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  n'est pas diagonalisable (0 est l'unique valeur propre).
- Si  $x = 8$ , alors  $M = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 16 & 16 \end{pmatrix} \implies P(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ . Donc,  $M$  n'a qu'une valeur propre  $\lambda = 1$  et ne peut être diagonalisable.
- Si  $x \notin ]0, 8[$ , le polynôme  $P(\lambda)$  admet deux racines distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , donc  $M$  admet deux valeurs propres distinctes et est diagonalisable.

### EXERCICE PRINCIPAL E 83

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $\mathbf{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On définit l'application  $\varphi$  de  $\mathbf{R}_n[X]$  par :  $\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$ .

On pose  $H_0(X) = 1$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $H_k(X) = \frac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k!}$ .

On note  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$  la base canonique de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

2.a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme non bijectif de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

b) Justifier que la famille  $\mathcal{B}' = (H_0, H_1, \dots, H_n)$  est une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

c) Déterminer la matrice  $M'$  de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

d) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question,  $p$  est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout  $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$ , soit  $f_i$  l'application

de  $\mathbf{R}_p[X]$  dans  $\mathbf{R}$  définie par :  $\forall Q \in \mathbf{R}_p[X], f_i(Q) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} Q(k)$ .

a) Justifier que pour tout  $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$ , l'application  $f_i$  est linéaire.

b) Soit  $(i, j) \in \llbracket 0, p \rrbracket^2$ . Établir la relation :  $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ .

c) Soit  $a_0, a_1, \dots, a_p$  les réels vérifiant :  $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \dots + a_p H_p$ .

Déduire de la question précédente, la relation :  $\forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_i = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} k^p$ .

### CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 83

1. Cours.

2.a) L'application  $\varphi$  est clairement un endomorphisme de  $\mathbf{R}_n[X]$ . La linéarité est évidente ainsi que le fait que le degré de  $\varphi(P)$  est inférieur au degré de  $P$ . Cet endomorphisme n'est pas injectif (donc non bijectif) car son noyau est formé des polynômes constants.

b) La famille  $(H_0, H_1, \dots, H_n)$  est une base de  $\mathbf{R}_n[X]$  car c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés.

c) Un calcul immédiat donne :  $\varphi(H_k)(X) = H_k(X+1) - H_k(X) = H_{k-1}(X)$ .

La matrice  $M'$  de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est donc une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont tous nuls et les éléments de la sur-diagonale sont égaux à 1, les autres éléments étant nuls.

d) La matrice triangulaire  $M'$  n'admet que la valeur propre 0 ; par suite, elle n'est pas diagonalisable.

3.a) Soit  $Q$  et  $R$  deux polynômes de  $\mathbf{R}_p[X]$  et  $\alpha$  un réel. On a :

$$f_i(\alpha Q + R) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} (\alpha Q + R)(k) = \alpha \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} Q(k) + \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} R(k) = \alpha f_i(Q) + f_i(R).$$

b) Remarquons que si  $j \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ,  $H_j(j) = 1$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, j \rrbracket$ ,  $H_j(k) = 0$ .

On a alors :  $\forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket, f_i(H_i) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} H_i(k) = H_i(i) = 1$ .

De plus,  $\forall j \in \llbracket 0, p \rrbracket, f_i(H_j) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} H_j(k) = \sum_{k=j}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} H_j(k) = \sum_{k=j}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{1}{j!} \prod_{\ell=0}^{j-1} (k - \ell)$ ,

soit encore,  $\forall j \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ,  $f_i(H_j) = \sum_{k=j}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \binom{k}{j} = \sum_{k=j}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \binom{i-j}{k-j} = \binom{i}{j} \sum_{k=0}^{i-j} (-1)^{i-k-j} \binom{i-j}{k}$

soit encore,  $\forall j \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ,  $f_i(H_j) = \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \sum_{k=0}^{i-j} (-1)^k \binom{i-j}{k} = 0$  d'après la formule du binôme.

c) On a :  $f_i(X^p) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} k^p = a_0 f_i(H_0) + a_1 f_i(H_1) + \dots + a_p f_i(H_p) = a_i$ .

### EXERCICE SANS PRÉPARATION E 83

Les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Soit  $Z$  une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$  et pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $Y_n$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$  telle que  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $P\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}$ .

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $[0, 1]$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(Y_n)) = E(f(Z))$ .

### CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 83

On sait que (transfert)  $E(f(Y_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) P\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ , et d'après les "sommes de Riemann"

et la continuité de  $f$  sur  $[0, 1]$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(Y_n)) = \int_0^1 f(t) dt = E(f(Z))$ .

## EXERCICE PRINCIPAL E 85

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

1. Question de cours : Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.

Soit  $p, q$  et  $r$  des réels fixés de l'intervalle  $]0, 1[$  tels que  $p + q + r = 1$ . Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\{-1, 0, 1\}$ , indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, P(X_n = 1) = p, P(X_n = -1) = q, P(X_n = 0) = r.$$

On pose pour tout entier  $n \geq 1$  :  $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$ .

2.a) Pour tout entier  $n \geq 1$ , préciser  $Y_n(\Omega)$  et calculer  $P(Y_n = 0)$ .

b) Pour tout entier  $n \geq 1$ , calculer  $E(X_n)$  et  $E(Y_n)$ .

3. On pose pour tout entier  $n \geq 1$  :  $p_n = P(Y_n = 1)$ .

a) Calculer  $p_1$  et  $p_2$ .

b) Établir une relation de récurrence entre  $p_{n+1}$  et  $p_n$ .

c) En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :  $p_n = \frac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$ .

d) Pourrait-on à l'aide de la question 2, trouver directement la loi de  $Y_n$  ?

4.a) Établir l'inégalité :  $(p+q)^n > (p-q)^{2n}$ . Calculer  $V(Y_n)$ .

b) Calculer la covariance  $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$  des deux variables aléatoires  $Y_n$  et  $Y_{n+1}$ .

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL E 85

1. Cours.

2.a)  $Y_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ . Par indépendance et incompatibilité :  $P(Y_n \neq 0) = (p+q)^n \implies P(Y_n = 0) = 1 - (p+q)^n$ .

b) On a :  $E(X_n) = p - q$  et par indépendance du produit de variables aléatoires,  $E(Y_n) = (p - q)^n$ .

3.a) On a clairement :  $p_1 = p = \frac{(p+q) + (p-q)}{2}$  et  $p_2 = p^2 + q^2 = \frac{(p+q)^2 + (p-q)^2}{2}$ .

b) On a :  $p_{n+1} = P(Y_{n+1} = 1) = P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 1]) + P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = -1]) + P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 0])$ .

Or,  $[Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 0] = \emptyset \implies P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 0]) = 0$ ,  $[Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 1] = [X_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 1]$

et  $[Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = -1] = [X_{n+1} = -1] \cap [Y_n = -1]$ . D'après le lemme des coalitions,  $X_{n+1}$  et  $Y_n$  sont

indépendantes  $\implies p_{n+1} = P(X_{n+1} = 1)P(Y_n = 1) + P(X_{n+1} = -1)P(Y_n = -1) = p p_n + q P(Y_n = -1)$ .

Or,  $P(Y_n = -1) = 1 - p_n - P(Y_n = 0) = -p_n + (p+q)^n \implies p_{n+1} = (p-q)p_n + q(p+q)^n$ .

c) Les valeurs initiales  $p_1$  et  $p_2$ , l'hypothèse de récurrence  $p_n = \frac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$  pour un certain  $n$  et la

relation de récurrence de la question b)  $\implies \forall n \in \mathbf{N}^*, p_n = \frac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$ .

d) Puisque  $P(Y_n = 0) = 1 - (p+q)^n$  et que  $E(Y_n) = P(Y_n = 1) - P(Y_n = -1) = (p-q)^n$ , on a les équations

$$\text{suivantes : } \begin{cases} P(Y_n = 1) + P(Y_n = -1) = (p+q)^n \\ P(Y_n = 1) - P(Y_n = -1) = (p-q)^n \end{cases} \implies \begin{cases} P(Y_n = 1) = \frac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2} \\ P(Y_n = -1) = \frac{(p+q)^n - (p-q)^n}{2} \end{cases}$$

4.a) Puisque  $0 < p < 1$  et  $0 < q < 1$ , on a :  $0 \leq (p-q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq < p^2 + q^2 < p + q$ .

## EXERCICE PRINCIPAL E 86

1. Question de cours : Fonctions équivalentes au voisinage de  $+\infty$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , soit  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}_+$  par :  $\forall x \geq 0, f_n(x) = \int_0^1 t^n e^{-tx} dt$ .

2.a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $f_n$  est décroissante sur  $\mathbf{R}_+$ .

b) Étudier la suite  $(f_n(0))_{n \geq 0}$ . En déduire pour tout réel  $x \geq 0$  fixé, la limite de la suite  $(f_n(x))_{n \geq 0}$ .

3.a) Soit  $x$  un réel strictement positif. Établir pour tout entier  $n \geq 1$ , la relation :  $f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} f_n(x) - \frac{e^{-x}}{x}$ .

b) Expliciter les fonctions  $f_0$  et  $f_1$ .

c) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $f_n(x)$  est équivalent à  $\frac{n!}{x^{n+1}}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

4.a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x > 0$ , on a :  $f_n(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n e^{-u} du$ .

b) En déduire que la fonction  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$  et déterminer sa dérivée  $f'_n$ .

c) Comparer pour tout réel  $y \geq 0$ , les deux réels  $y$  et  $1 - e^{-y}$ .

En déduire que pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $f_n$  est continue en 0.

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 86

1. Cours.

2.a) Pour  $0 \leq x \leq y$ , la croissance de l'exponentielle et les bornes "bien rangées"  $\implies f_n(x) \geq f_n(y)$ .

b) Le calcul donne  $f_n(0) = \frac{1}{n+1}$  et la décroissance de  $f_n$  sur  $\mathbf{R}_+ \implies 0 \leq f_n(x) \leq f_n(0) = \frac{1}{n+1}$ .

Par encadrement, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .

3.a) Une IPP  $\implies f_{n+1}(x) = \left[ -\frac{1}{x} e^{-tx} t^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{x} e^{-tx} (n+1) t^n dt = \frac{n+1}{x} f_n(x) - \frac{e^{-x}}{x}$ .

b) On a pour tout  $x \geq 0$ ,  $f_0(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$  et  $f_1(x) = \frac{1 - e^{-x} - x e^{-x}}{x^2}$ .

c) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$ , on a bien  $f_0(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$  équivalent à  $\frac{1}{x} = \frac{0!}{x^{0+1}}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Soit un entier  $n$  tel que  $f_n(x)$  est équivalent à  $\frac{n!}{x^{n+1}}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

À l'aide de la question 3.a), on a :  $\frac{x^{n+2}}{(n+1)!} f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} f_n(x) - \frac{x^{n+1} e^{-x}}{(n+1)!}$ . Le second membre tend vers 1 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  d'après l'hypothèse de récurrence.

4.a) Le changement de variable linéaire  $u = tx \implies f_n(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n e^{-u} du$ . Le théorème fondamental de

l'intégration permet de dire que  $x \mapsto \int_0^x u^n e^{-u} du$  est dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$  et finalement, on obtient :

$$\forall x > 0, f'_n(x) = -\frac{n+1}{x^{n+2}} \int_0^x u^n e^{-u} du + \frac{1}{x^{n+1}} x^n e^{-x} = -\frac{n+1}{x} f_n(x) + \frac{e^{-x}}{x} = -f_{n+1}(x).$$

b) Un argument de convexité, par exemple, montre que  $\forall y \geq 0$ , on a :  $0 \leq 1 - e^{-y} \leq y$ .

On a :  $0 \leq |f_n(0) - f_n(x)| = \left| \int_0^1 t^n dt - \int_0^1 t^n e^{-tx} dt \right| = \int_0^1 t^n (1 - e^{-tx}) dt \leq \int_0^1 t^n t x dt = \frac{x}{n+2}$  qui tend

vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0. Par encadrement, on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = f_n(0)$  et  $f_n$  est continue en 0.

### EXERCICE SANS PRÉPARATION E 86

Soit  $c$  et  $r$  deux réels strictement positifs.

1. Justifier que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} \frac{r c^r}{x^{r+1}} & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est une densité de probabilité.
2. Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ . Identifier la loi de la variable aléatoire  $Y = \ln X - \ln c$ .
3. Compléter les lignes du code *Scilab* suivant pour que  $V$  soit un vecteur ligne contenant cent réalisations de la loi de la variable aléatoire  $X$ .

```
c=input("c=")
r=input("r=")
U=grand(?, ?, ?, ?)
V=c*exp(U)
```

### CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 86

1. La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbf{R} \setminus \{c\}$ , positive et  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r c^r}{x^{r+1}} dx = 1$
2.  $F_X(x) = 0$  si  $x \leq c$  et  $F_X(x) = 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^r$  si  $x > c$ . Or,  $X(\Omega) = ]c, +\infty[ \implies Y(\Omega) = \mathbf{R}_+^*$ .  
 $\forall y \in \mathbf{R}_+^*, P(Y \leq y) = P(X \leq c e^y) = 1 - \left(\frac{c}{c e^y}\right)^r = 1 - e^{-ry}$ , donc  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(r)$ .

```
3.c=input("c=")
r=input("r=")
U=grand(1,n,"exp",1/r) car E(Y) = 1/r.
V=c*exp(U)
```

## EXERCICE PRINCIPAL E 88

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

1. Question de cours : Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Dans tout l'exercice,  $X$  désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

2.a) On pose :  $T = [X]$  (partie entière de  $X$ ). Montrer que la loi de  $T$  est donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N}, P(T = k) = (1 - e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^k.$$

b) Quelle est la loi de  $T + 1$ ? En déduire l'espérance et la variance de  $T$ .

3. On pose :  $Z = X - [X]$ .

Montrer que  $Z$  est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de  $Z$ .

4. Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $X_n$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\frac{\lambda}{n}$ . On pose pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :  $Z_n = X_n - [X_n]$ .

Montrer que la suite de variables aléatoires  $(Z_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 88

1. Cours.

2.a)  $T(\Omega) = \mathbf{N} \implies \forall k \in \mathbf{N}, [T = k] = [k \leq X < k + 1] \implies P(T = k) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = (1 - e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^k.$

b)  $T + 1$  suit la loi géométrique (classique) de paramètre  $1 - e^{-\lambda} \implies E(T + 1) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \implies E(T) = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$

On a :  $V(T + 1) = V(T) = \frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2}.$

3.  $Z(\Omega) = [0, 1[$ , donc,  $F_Z(z) = 0$  si  $z < 0$  et  $F_Z(z) = 1$  si  $z \geq 1$ . D'autre part,  $\{T = k\}_{k \in \mathbf{N}}$  est un sce, d'où,

$\forall z \in [0, 1[, F_Z(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([Z \leq z] \cap [T = k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \leq X \leq k + z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (F_X(k + z) - F_X(k)),$  soit encore,

$\forall z \in [0, 1[, F_Z(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+z)}) = (1 - e^{-\lambda z}) \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\lambda})^k = \frac{1 - e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}.$

La fonction  $F_Z$  est continue sur  $\mathbf{R}$ , de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}$  sauf éventuellement en 0 et 1. Donc,  $Z$  est une variable aléatoire réelle à densité.

Une densité  $f_Z$  de  $Z$  est par exemple :  $f_Z(z) = \frac{\lambda e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}$  si  $0 \leq z \leq 1$  et  $f_Z(z) = 0$  sinon.

4. D'après la question 3,  $F_{Z_n}(z) = 0$  si  $z < 0$ ,  $F_{Z_n}(z) = 1$  si  $z > 1$  et  $F_{Z_n}(z) = \frac{1 - e^{-\frac{\lambda z}{n}}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}}$  si  $0 \leq z \leq 1$ .

On sait que  $1 - e^{-u}$  est équivalent à  $u$  lorsque  $u$  tend vers 0. Par suite, pour  $z \neq 0$ ,  $\frac{1 - e^{-\frac{\lambda z}{n}}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}}$  est équivalent

à  $z$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(z) = z.$

En conséquence, la suite  $(Z_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

### EXERCICE SANS PRÉPARATION E 88

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^4 = f^2$  et  $\text{rg}(f^2) = 1$ .  
Montrer que le spectre de  $f$  est  $\{0\}$  ou  $\{0, 1\}$  ou  $\{-1, 0\}$ .

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION E 88

Le polynôme  $X^4 - X^2 = X^2(X^2 - 1)$  est annulateur de  $f \implies \text{Sp}(f) \subset \{-1, 0, 1\}$ .

- Si 0 n'est pas valeur propre de  $f \implies f$  est bijective  $\implies f^2 = \text{id}$  est bijective  $\iff \text{rg}(f^2) = 3$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.
- Si 1 et  $-1$  sont valeurs propres de  $f \implies f$  est diagonalisable  $\implies f^2$  est diagonalisable et semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{rg}(f^2) = 2$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Bilan : le spectre de  $f$  est  $\{0\}$  ou  $\{0, 1\}$  ou  $\{-1, 0\}$ .

## EXERCICE PRINCIPAL E 89

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , soit  $f_n$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f_n(x) = \begin{cases} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2.a) Établir la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ . On pose :  $\forall n \in \mathbf{N}, I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ .

b) Déterminer pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , une relation entre  $I_n$  et  $I_{n+2}$ .

c) Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .

3.a) Montrer que  $f_1$  est une densité de probabilité.

b) Tracer la courbe représentative de  $f_1$  dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Dans la suite, on note  $X$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  admettant  $f_1$  pour densité.

c) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

d) Justifier l'existence de l'espérance  $E(X)$  et de la variance  $V(X)$  de  $X$ . Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

4. On pose :  $Y = X^2$ .

a) Montrer que  $Y$  est une variable aléatoire à densité.

b) Quelle est la loi de  $Y$  ?

## CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 89

1. Cours.

2.a) On a :  $0 \leq x^2 f_n(x) = x^{n+2} \exp(-x^2/2)$  qui tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , donc  $f_n(x)$  est négligeable devant  $1/x^2$  et la règle de Riemann permet de conclure à la convergence de  $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ .

b) On dérive  $x^{n+1}$  et on intègre  $x \exp(-x^2/2)$  en  $-\exp(x^2/2)$ . Une IPP sur  $[0, A]$  et un passage à la limite lorsque  $A$  tend vers  $+\infty \implies \forall n \in \mathbf{N}, I_{n+2} = (n+1)I_n$ .

c) Par référence à la loi normale centrée réduite et à la parité de  $x \mapsto \exp(-x^2/2)$  sur  $\mathbf{R}$ , on a :  $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

Une primitive de  $x \mapsto x \exp(-x^2/2)$  est  $x \mapsto -\exp(-x^2/2) \implies I_1 = 1$ .

3.a) On a :  $f_1 \geq 0$ , continue sur  $\mathbf{R}$  et  $\int_0^{+\infty} f_1(x) dx = I_1 = 1 \implies f_1$  est une densité de probabilité.

b) On a :  $f'_1(x) = (1-x^2) \exp(-x^2/2)$  et  $f''_1(x) = x(x^2-3) \exp(-x^2/2)$ .

La fonction  $f_1$  est nulle sur  $\mathbf{R}_-$ , croissante et concave sur  $[0, 1]$  et prenant ses valeurs dans  $[0, 1/\sqrt{e}]$ , puis décroît sur  $[1, +\infty[$  en restant concave sur  $[1, \sqrt{3}]$  puis convexe au-delà de  $\sqrt{3}$ .

c)  $F(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $F(x) = 1 - \exp(-x^2/2)$  si  $x \geq 0$ .

d) La justification de l'existence de  $E(X)$  et  $E(X^2)$  a été établie en 2.a).

La relation de récurrence de 2.b)  $\implies I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  et  $I_3 = 2 \implies E(X) = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  et  $V(X) = 2 - \pi/2$ .

4.a)b) On trouve classiquement :  $G(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $G(x) = 1 - \exp(-x/2)$  si  $x \geq 0$ .

La fonction de répartition  $G$  de  $Y$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}$ , donc  $Y$  est à densité et plus précisément, on reconnaît en  $Y$  une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $1/2$ .

### EXERCICE SANS PRÉPARATION E 89

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbf{R}^3$  dont la matrice  $A$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^3$  est :  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer une base de  $\text{Ker } f$  et une base de  $\text{Im } f$ .

2. On admet sans démonstration que  $A^3 = 0$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  définie par  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

a) Quelles sont les valeurs propres de  $M$ ? La matrice  $M$  est-elle diagonalisable?

b) Justifier que  $M$  est inversible et exprimer  $M^{-1}$  en fonction de  $A$  et  $I$  (matrice identité de  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ ).

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION E 89

1. Les deux premières colonnes de  $A$  sont opposées : le rang de  $A$  est égal à 2.

On a :  $\text{Im } f = \text{Vect}((-1, 0, 1), (1, 2, 1))$  et  $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 1, 0))$ .

2.a) On a :  $M = A + I$ . La matrice  $A$  est nilpotente et sa seule valeur propre est 0, donc la seule valeur propre de  $M$  est 1. Or,  $M$  n'est pas semblable (égale) à  $I$ , donc  $M$  n'est pas diagonalisable.

b) Le réel 0 n'est pas valeur propre de  $M$ , donc  $M$  est inversible.

On utilise l'identité remarquable :  $A^3 + I^3 = (A + I)(A^2 - A + I) \implies M(A^2 - A + I) = I \implies M^{-1} = A^2 - A + I$ .

## EXERCICE PRINCIPAL

Toutes les variables aléatoires utilisées dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

1. Question de cours : loi faible des grands nombres

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $U_n$  la variable aléatoire  $\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .
- Calculer la fonction de répartition de  $U_n$ .
  - Démontrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , la probabilité  $P(\{U_n \geq \varepsilon\})$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

3. Compléter la deuxième ligne du code *Scilab* suivant pour que la fonction "minu" simule la variable  $U_k$  pour la valeur  $k$  du paramètre.

```
function u=minu(k)
  x= ...
  u=min(x)
endfunction
```

4. Soit  $p \in ]0, 1[$  et  $Z$  une variable aléatoire telle que, pour tout réel  $x$  :

$$P(\{Z \leq x\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} P(\{U_k \leq x\})$$

(on admet qu'il existe une telle variable aléatoire et qu'elle possède une densité).

- Justifier, pour tout  $x \in [0, 1]$ , l'égalité :  $P(\{Z \leq x\}) = 1 - \frac{p(1-x)}{p+(1-p)x}$ .
  - En déduire une densité de  $Z$ .
5. a) Justifier que la fonction *Scilab* suivante fournit une simulation de la variable aléatoire  $Z$  de la question précédente.

```
function z=geomin(p)
  z=minu(grand(1,1,'geom',p))
endfunction
```

- b) De quel nombre réel les instructions suivantes fournissent-elles une valeur approchée et pourquoi ?

```
p=0.5;
R=[];
for k=1:10000
  R=[R,geomin(p)]
end;
disp(mean(R))
```

### CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 90

1. Cours.

2.a)  $\forall x \in [0, 1], P(U_n \leq x) = 1 - P(U_n > x) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i > x)\right) = 1 - (1-x)^n$  par indépendance des  $X_i$ .

$\forall x < 0, P(U_n \leq x) = 0$  et  $\forall x > 1, P(U_n \leq x) = 1$ .

b)  $P(U_n \geq \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \geq \varepsilon) = 0$  car  $0 < 1-\varepsilon < 1$ .

3. On peut utiliser `x=grand(1,n,'def')` ou `x=rand(1,n)`.

4.a)  $\forall x \in [0, 1], P(Z \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}(1-(1-x))^k = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} - \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}(1-x)^k$ , soit encore,

$$P(Z \leq x) = 1 - p(1-x) \sum_{k=1}^{+\infty} (q(1-x))^{k-1} = 1 - p(1-x) \frac{1}{1-q(1-x)} = 1 - \frac{p(1-x)}{p+qx} \quad (\text{avec } q = 1-p).$$

b) Par dérivation, on en déduit :  $\forall x \in [0, 1], f_Z(x) = \frac{p}{(p+qx)^2}$ .

5.a) Si  $N$  est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre  $p$ , alors  $Z$  est la variable aléatoire définie par : si  $[N = k]$  est réalisé, alors  $Z = U_k$  et  $P(U_k \leq x) = P_{[N=k]}(Z \leq x)$ .

La commande `grand(1,1,'geom',p)` génère une valeur prise par une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre  $p$ .

b) Dans le programme,  $R$  est un vecteur ligne qui contient 10000 réalisations de  $Z$  pour la valeur  $p$  du paramètre et on affiche la moyenne de ces valeurs. Le résultat affiché est donc une valeur approchée de l'espérance de  $Z$ .

$$\text{On a : } E(Z) = \int_0^1 \frac{px}{(p+qx)^2} dx = \frac{p}{q} \left( \int_0^1 \frac{dx}{p+qx} - \int_0^1 \frac{p dx}{(p+qx)^2} \right) = -\frac{p}{q^2} \ln p - \frac{p}{q}.$$

Pour  $p = 1/2$ , on a  $E(Z) = 2 \ln 2 - 1$ .

### EXERCICE SANS PRÉPARATION E 90

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , soit  $f_n$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  par :

$$\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2} dt - \int_x^1 e^{-nt^2} dt.$$

1. Montrer que la fonction  $f_n$  est strictement monotone sur  $[0, 1]$ .
- 2.a) Établir l'existence d'un unique réel de  $[0, 1]$ , noté  $c_n$ , tel que  $\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt$ .
- 3.a) Montrer que la suite  $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est convergente.

### CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION 90

1. Le théorème fondamental du calcul intégral (continuité des intégrandes) permet de dire que  $f_n$  est dérivable et on a :  $f'_n(x) = e^{nx^2} + e^{-nx^2} > 0 \implies f_n$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$ .
- 2.a) La fonction  $f_n$  continue et strictement croissante sur  $[0, 1]$  réalise une bijection de  $[0, 1]$  sur  $[f_n(0), f_n(1)]$ .  
Il est clair que  $f_n(0) = -\int_0^1 e^{-nt^2} dt \leq 0$  et  $f_n(1) = \int_0^1 e^{nt^2} dt \geq 0$ . Par suite, l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $c_n \in [0, 1]$ , c'est-à-dire :  $\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt - \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt = 0$ .
- b) On a :  $f_{n+1}(c_{n+1}) = 0$  et  $f_{n+1}(c_n) = \int_0^{c_n} e^{(n+1)t^2} dt - \int_{c_n}^1 e^{-(n+1)t^2} dt \geq 0 = f_n(c_n) = f_{n+1}(c_{n+1})$  par croissance de la fonction exponentielle. Donc,  $0 = f_{n+1}(c_{n+1}) \leq f_{n+1}(c_n)$  et puisque  $f_{n+1}$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$ , on a :  $c_{n+1} \leq c_n$ . La suite  $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.