

2. SUJETS DE L'OPTION ÉCONOMIQUE

Exercice principal E3

1. Question de cours : Définition d'une série convergente. Pour quels réels $x > 0$, la série de terme général $(\ln x)^n$ est-elle convergente ? Calculer alors sa somme.
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note f_n la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, à valeurs réelles, par : $f_n(x) = (\ln x)^n - x$.
 - a) Calculer les dérivées première et seconde f'_n et f''_n de la fonction f_n .
 - b) Montrer que la fonction f_1 ne s'annule jamais.
 - c) Justifier l'existence d'un réel $a \in]0, 1[$ vérifiant l'égalité : $f_2(a) = 0$.
3. On suppose désormais que n est un entier supérieur ou égal à 3, et on s'intéresse aux solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$. On donne : $\ln 2 \simeq 0,693$.
 - a) Dresser le tableau de variations de f_n sur $]1, +\infty[$ et montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux racines, notées u_n et v_n , sur $]1, +\infty[$ (u_n désigne la plus petite de ces deux racines).
 - b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice sans préparation E3

Soit p un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , de même loi de Bernoulli telle que :
 $\forall k \in \mathbb{N}^*, P([X_k = 1]) = p$ et $P([X_k = 0]) = q$. Pour n entier de \mathbb{N}^* , on définit pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

- 1.a) Calculer pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.
 - b) Montrer que $0 < \text{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) \leq \frac{1}{4}$.
2. Calculer pour tout couple (k, l) tel que $1 \leq k < l \leq n$, $\text{Cov}(Y_k, Y_l)$.
 3. On note ε un réel strictement positif fixé. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k - 2p \right| > \varepsilon \right] \right) = 0$.

Exercice principal E4

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.

2. Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels, on pose : $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (1-x)^p dx$.

a) Calculer $I_{n,0}$.

b) Exprimer $I_{n,p+1}$ en fonction de $I_{n+1,p}$.

c) En déduire l'expression de $I_{n,p}$ en fonction de n et p .

On dispose de N urnes ($N \geq 1$) notées U_1, U_2, \dots, U_N . Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, l'urne U_k contient k boules rouges et $N - k$ boules blanches.

On choisit au hasard une urne avec une probabilité proportionnelle au nombre de boules rouges qu'elle contient ; dans l'urne ainsi choisie, on procède à une suite de tirages d'une seule boule avec remise dans l'urne considérée. On suppose que l'expérience précédente est modélisée par un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

3. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, calculer la probabilité de choisir l'urne U_k .

Soit n un entier fixé de \mathbb{N}^* . On note E_n et R_{2n+1} les événements suivants :

E_n = "au cours des $2n$ premiers tirages, on a obtenu n boules rouges et n boules blanches" ;

R_{2n+1} = "on a obtenu une boule rouge au $(2n + 1)$ -ième tirage".

4.a) Exprimer $P(E_n)$ sous forme d'une somme.

b) Donner une expression de la probabilité conditionnelle $P_{E_n}(R_{2n+1})$.

5. Montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} P_{E_n}(R_{2n+1}) = \frac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}} = \frac{n+2}{2n+3}$.

Exercice sans préparation E4

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2.

1. Donner une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles ?

3. Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?

Exercice principal E6

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , à valeurs dans $[0, \theta]$ où θ est un paramètre réel strictement positif inconnu. Une densité f de X est donnée par : $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{si } x \in]0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Question de cours : Estimateur sans biais ; risque quadratique d'un estimateur.
2. Calculer l'espérance et la variance de X .

Pour n entier de \mathbb{N}^* , soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

- 3.a) Déterminer la fonction de répartition F de X .
b) Tracer dans un repère orthogonal, l'allure de la courbe représentative de F .
- 4.a) Déterminer un estimateur T_n de θ , sans biais et de la forme $c\bar{X}_n$, où c est un réel que l'on précisera.
b) Quels sont les risques quadratiques respectifs associés aux estimateurs \bar{X}_n et T_n de θ ?
5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
a) Déterminer la fonction de répartition G_n et une densité g_n de M_n .
b) Calculer l'espérance de M_n . En déduire un estimateur sans biais W_n de θ .
c) Entre T_n et W_n , quel estimateur doit-on préférer pour estimer θ ?
6. Soit α un réel donné vérifiant $0 < \alpha < 1$.
a) Établir l'existence de deux réels a et b tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$, vérifiant $P(M_n \leq a\theta) = \alpha/2$ et $P(b\theta \leq M_n \leq \theta) = \alpha/2$.
b) En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice sans préparation E6

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^3 + A^2 + A = 0$ (matrice nulle). On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est inversible. Déterminer A^{-1} en fonction de A et I .
2. On suppose que A est symétrique. Montrer que $A = 0$.

Exercice principal E7

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires finies.

Une puce fait une suite de sauts de longueur 1 dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ; chaque saut est effectué au hasard et avec équiprobabilité dans l'une des quatre directions portées par les axes $O\vec{i}$ et $O\vec{j}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n la position de la puce après n sauts et X_n (resp. Y_n) l'abscisse (resp. l'ordonnée) du point M_n .

On suppose qu'à l'instant initial 0, la puce est à l'origine O du repère, c'est-à-dire que $M_0 = O$. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

2. Pour tout $n \geq 1$, on pose : $T_n = X_n - X_{n-1}$. On suppose que les variables aléatoires T_1, T_2, \dots, T_n sont indépendantes.

a) Déterminer la loi de T_n . Calculer l'espérance $E(T_n)$ et la variance $V(T_n)$ de T_n .

b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n en fonction de T_1, T_2, \dots, T_n .

c) Que vaut $E(X_n)$?

d) Calculer $E(X_n^2)$ en fonction de n .

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale à la distance OM_n .

a) Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

b) Établir l'inégalité : $E(Z_n) \leq \sqrt{n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que la puce soit revenue à l'origine O après n sauts.

a) Si n est impair, que vaut p_n ?

b) On suppose que n est pair et on pose : $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). On donne la formule : $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}$.

Établir la relation : $p_{2m} = \binom{2m}{m}^2 \times \frac{1}{4^{2m}}$.

Exercice sans préparation E7

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

2.a) Montrer que pour tout entier $m \geq 1$, on a : $\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(k+1)^3} \leq \int_n^{n+m+1} \frac{dx}{x^3} \leq \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^3}$.

b) En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice principal E8

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(i) = i - j + k$, $f(j) = i + 2j$ et $f(k) = j + k$.

On note Id l'application identité de E , $f^0 = \text{Id}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

2.a) Montrer que $(2\text{Id} - f) \circ (f^2 - 2f + 2\text{Id}) = 0$ (endomorphisme nul de E).

b) L'endomorphisme f est-il un automorphisme ?

c) Déterminer les valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Soit P un sous-espace vectoriel de E défini par : $P = \{(x, y, z) \in E / ax + by + cz = 0 \text{ dans la base } \mathcal{B}\}$, où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Soit U , V et W trois vecteurs de E dont les composantes dans la base \mathcal{B} sont : $(-b, a, 0)$ pour U , $(0, c, -b)$ pour V et $(-c, 0, a)$ pour W .

a) Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par (U, V, W) est de dimension 2.

b) En déduire tous les sous-espaces vectoriels P de E qui vérifient $f(P) \subset P$.

Exercice sans préparation E8

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, de fonction de répartition Φ .

1. Montrer pour tout réel $a > 1$ et pour tout réel $x > 0$, l'encadrement suivant :

$$0 \leq x(1 - \Phi(ax)) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-ax^2/2}$$

2. En déduire que $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} x(1 - \Phi(ax)) dx = 0$.

Exercice principal E10

1. Question de cours : Convexité d'une fonction définie sur un intervalle de \mathbb{R} .

2.a) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^x e^{t^2} dt$ est convergente. On pose : $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt = \int_0^x \exp(t^2) dt$.

b) Montrer que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} . Étudier la parité et la convexité de f .

c) Étudier les variations de f sur \mathbb{R} et tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

3.a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'un unique réel u_n vérifiant $f(u_n) = \frac{1}{n}$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4.a) Établir pour tout $u \in [0, \ln 2]$, l'encadrement : $1 + u \leq e^u \leq 1 + 2u$.

b) En interprétant le résultat de la question 3.c), en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout

$n \geq n_0$, on a : $\int_0^{u_n} (1 + t^2) dt \leq \frac{1}{n} \leq \int_0^{u_n} (1 + 2t^2) dt$.

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n^3 = 0$ et en déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation E10

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (d'espérance $\frac{1}{p}$) et Y une variable aléatoire telle que :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est impair} \\ \frac{X}{2} & \text{si } X \text{ est pair} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y , puis calculer l'espérance de Y .

Exercice principal E11

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes ; lois marginales et lois conditionnelles.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit p un réel de $]0, 1[$. On pose : $q = 1 - p$.

On suppose que :

- X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
- $Y(\Omega) = \mathbb{N}$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètres n et p .

2. Déterminer la loi du couple (X, Y) .

3. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp .

4. Déterminer la loi de $X - Y$.

5.a) Établir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y .

Exercice sans préparation E11

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable ($n \geq 1$). On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$ (matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice principal E21

1. Question de cours : Définition et propriétés des fonctions de classe C^p ($p \in \mathbb{N}$).

Soit α un réel non nul et soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^{\alpha x}$ et $f_2(x) = x e^{\alpha x}$.
On note E le sous-espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} engendré par f_1 et f_2 .

Soit Δ l'application qui, à toute fonction de E , associe sa fonction dérivée.

2.a) Montrer que (f_1, f_2) est une base de E .

b) Montrer que Δ est un endomorphisme de E . Donner la matrice A de Δ dans la base (f_1, f_2) .

c) L'endomorphisme Δ est-il bijectif? diagonalisable?

3. Calculer A^{-1} . En déduire l'ensemble des primitives sur \mathbb{R} de la fonction f définie par : $f(x) = (2x - 3) e^{\alpha x}$.

4.a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n .

b) En déduire la dérivée n -ième $f^{(n)}$ de la fonction f définie dans la question 3.

Exercice sans préparation E21

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose : $Y = (-1)^X$.

1. Déterminer $Y(\Omega)$. Calculer l'espérance $E(Y)$ de Y .

2. Trouver la loi de Y .

Exercice principal E22

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale impropre.

Soit f la fonction définie pour x réel par : $f(x) = \int_0^1 t^{-x} \sqrt{1+t} dt$.

2. Montrer que le domaine de définition de f est $D =]-\infty, 1[$.

3. Déterminer le sens de variation de f sur D .

4.a) Établir pour tout $x \in D$, l'encadrement : $0 \leq \frac{1}{1-x} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{1-x}$.

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

5.a) Calculer $f(0)$.

b) Établir pour tout $x < 0$, une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

c) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Exercice sans préparation E22

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère n boules numérotées de 1 à n que l'on place au hasard dans n urnes, chaque urne pouvant recevoir de 0 à n boules.

1. Calculer la probabilité p_n que chaque urne reçoive exactement 1 boule.

2. Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.

3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.