Sujet S 113 - Exercice sans préparation

On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Quelle est la loi de S_n ?

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $\mathbb{P}[S_n \geqslant n + \sqrt{n}]$?

2) On considère une variable aléatoire N_n sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendante des X_k et dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}[N_n = n] = \mathbb{P}[N_n = n+1] = \frac{1}{2} \quad .$$

a) Trouver l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n définie par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad T_n(\omega) = S_{N_n(\omega)} \quad .$$

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $\mathbb{P}[T_n \geqslant n + \sqrt{n}]$?

2 Sujets donnés en option économique

Sujet E 2203 - Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

1) Question de cours : Rappeler la définition d'une densité de probabilité.

2) Vérifier que f est une densité de probabilité.
Soit X *une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$*, dont* f *est une densité de probabilité.*

3) **a)** Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de X.

b) A-t-on, pour tout réel s, pour tout réel t tels que $t \geqslant s$,

$$\mathbb{P}_{[X>s]}([X > t]) = \mathbb{P}([X > t - s])?$$

4) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout x réel, on pose :

$$H_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)(1 + t.e^{-n|t|})\, dt.$$

Montrer que H_n est une fonction de répartition.

5) Soit X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de fonction de répartition H_n. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

Sujet E 2203 - Exercice sans préparation

Soit n un entier $\geqslant 2$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0,\dots,0)\}$.

On considère la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pose $B = X\,{}^tX$ et $A = {}^tXX$.

On désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

1) Expliciter la matrice B et la matrice A.

2) Quel est le rang de u ? Déterminer son noyau.

3) B est-elle diagonalisable ?

4) Calculer B^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Sujet E 2214 - Exercice

On admet la propriété suivante $(\mathscr{P})$:

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre réel L, alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n = \dfrac{1}{n}(u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1})$ converge aussi vers L.

On se donne deux nombres réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \frac{1+\alpha.u_n}{1+\beta.u_n}.$$

1) Question de cours : Convergence et divergence des suites réelles monotones.

2) Dans cette question seulement, on suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = x\frac{1+x}{1+2x}.$$

b) Étudier la convergence de la suite (u_n).

c) Écrire un programme en Pascal permettant le calcul de u_{10}.

3) Dans le cas général, prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1/u_n$. Prouver que la suite $(v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta - \alpha$.

5) En utilisant la propriété $(\mathscr{P})$, déduire du résultat précédent un équivalent de u_n de la forme $\dfrac{1}{q.n}$ lorsque n tend vers $+\infty$, où q est un réel strictement positif.

Sujet E 2214 - Exercice sans préparation

n souris (minimum 3) sont lâchées en direction de 3 cages, chaque cage pouvant contenir les n souris et chaque souris allant dans une cage au hasard.

1) Calculer la probabilité pour qu'une cage au moins reste vide.

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cages restées vides. Calculer l'espérance de X.

Sujet E 202 - Exercice

1) Question de cours : Variable aléatoire à densité. Propriétés de sa fonction de répartition.

On considère une densité de probabilité f, nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$, associée à une variable aléatoire X. On suppose que X est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et on note F la fonction de répartition de X.

2) Montrer que F possède une unique primitive s'annulant en 0. On note H_f cette fonction. Montrer que H_f est de classe C^1.

3) Donner H_f dans les cas suivants :

a) $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$.

b) $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ si $x > 0$.

c) $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{2(1+x)^{3/2}}$ si $x > 0$.

Dans chacun des cas, étudier l'existence d'une direction asymptotique et d'une asymptote oblique pour la courbe représentative de H_f lorsque x tend vers $+\infty$.

4) On suppose que X admet une espérance ℓ.

a) En intégrant par parties $\displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt$, montrer que $H_f(x) \sim x$ au voisinage de $+\infty$.

En déduire que la courbe représentative de H_f admet une direction asymptotique en $+\infty$.

b) A-t-on toujours une asymptote ?

Sujet E 202 - Exercice sans préparation

Soit E l'ensemble des matrices $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où (a, b) prend toute valeur de $\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel réel de dimension 2.
Calculer le produit $M_{a,b} \,.\, M_{a',b'}$ pour $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$.
Vérifier que ce produit appartient à E.

2) Calculer $M_{a,b}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Sujet E 205 - Exercice

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.

1) Question de cours : Indépendance de n variables aléatoires discrètes ($n \in \mathbb{N}^*$).

2) a) On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie. On suppose qu'à chaque lancer la probabilité d'obtenir « Pile » est égale à p. On notera « P » et « F » les événements (Obtenir « Pile »), respectivement (Obtenir « Face »).
On définit les variables aléatoires X_1 et X_2 de la façon suivante : X_1 vaut k si le premier « Pile » de rang impair s'obtient au rang $2k-1$ (entier qui représente le k-ième nombre impair de $\mathbb{N}^*$) ;
X_2 vaut k si le premier « Pile » de rang pair s'obtient au rang $2k$ (entier qui représente le k-ième nombre pair de $\mathbb{N}^*$).
Par exemple, si l'on obtient « (F , P , F , F , F , P , P , ...) », alors X_1 prend la valeur 4 et X_2 prend la valeur 1.
On posera $X_1 = 0$ (respectivement $X_2 = 0$) si « Pile » n'apparaît à aucun rang impair (respectivement à aucun rang pair).

b) Prouver que $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 0) = 0$.

c) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_2 = 1)$. Déterminer les lois de X_1 et de X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

d) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au minimum de X_1 et de X_2.

3) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

a) Montrer que la variable aléatoire $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$ suit une loi géométrique ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel x).

b) Montrer que les variables aléatoires Y et $2Y - X$ sont indépendantes.

Sujet E 205 - Exercice sans préparation

On note E_4 l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 4 et on considère l'application Δ qui, à un polynôme P de E_4 associe le polynôme $Q = \Delta(P)$ défini par : $Q(x) = P(x+2) - P(x)$.

1) Vérifier que l'application Δ est un endomorphisme de E_4.
Expliciter la matrice de Δ dans la base canonique de E_4.

2) Déterminer le noyau de Δ. On pourra prouver que si $P \in \operatorname{Ker}\Delta$, alors $P(x) - P(0)$ a une infinité de racines.

3) L'endomorphisme Δ est-il diagonalisable ?

4) Existe-t-il un polynôme Q appartenant à E_4 ayant un unique antécédent par Δ ?

Sujet E 209 - Exercice

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n. On note $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général

$$m_{i\,j} = \begin{cases} i & \text{si } j = i+1 \\ n+1-j & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ est égale à M.

1) Question de cours : Rappeler la définition d'un vecteur propre d'un endomorphisme. Énoncer la propriété relative à une famille de vecteurs propres d'un endomorphisme, associés à des valeurs propres distinctes.

2) **a)** Calculer $u(X^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

b) En déduire l'expression de $u(P)$ pour $P \in E$ en fonction notamment de P et de P'.

3) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k(X) = (X-1)^k(X+1)^{n-k}$.

a) Calculer $u(P_k)$.

b) En déduire que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Préciser ses valeurs propres et les espaces propres associés.

4) Dans cette question, on suppose que $n = 3$.

a) Expliciter M et déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $P^{-1}MP = D$.

b) Déterminer les matrices commutant avec D.

c) Existe-t-il un endomorphisme v de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $v \circ v = u$?

Sujet E 209 - Exercice sans préparation

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et telles que :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{2^i}$$

1) Reconnaître la loi de X et Y.

2) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$ et la loi de X conditionnellement à $(X + Y = k)$, k étant un entier supérieur ou égal à 2 fixé.

3) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X > Y)$.

4) Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant 2Y)$ et $\mathbb{P}_{[X\geqslant Y]}(X \geqslant 2Y)$.

Sujet E 210 - Exercice

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{n}$ (d'espérance n).
Pour tout x réel on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soient :

$$Y_n = \lfloor X_n \rfloor \quad \text{et} \quad Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$$

1) Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
2) Déterminer la loi de Y_n et son espérance.
3) Déterminer $Z_n(\Omega)$ et montrer que,

$$\forall t \in [0,1] : \quad \mathbb{P}(Z_n \leqslant t) = \frac{1 - e^{\frac{-t}{n}}}{1 - e^{\frac{-1}{n}}}.$$

4) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.
5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et N_n la variable aléatoire définie par :

$$N_n = \text{card}\left\{k \in [\![1,\, n]\!] \quad \text{tel que} \quad X_k \leqslant \frac{k}{n}\right\}$$

où card (A) désigne le nombre d'éléments de l'ensemble fini A.
a) Reconnaître la loi de N_n et donner son espérance et sa variance.
b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(N_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire N dont on précisera la loi.

Sujet E 210 - Exercice sans préparation

Soit E l'ensemble des matrices $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où (a, b) prend toute valeur de $\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel réel de dimension 2.
2) Dans le cas où soit $a = b$, soit $a = -2b$, prouver que $M_{a,b}$ n'est pas inversible.
Dans le cas contraire, calculer son inverse et montrer qu'il appartient à E.
3) Calculer $M_{a,b}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Sujet E 222 - Exercice

1) Question de cours : Estimateur, biais, risque quadratique.

Soit a, b et c trois réels strictement positifs et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 0$ si $x < 0$, $f(x) = c$ si $x \in [0, a[$ $f(x) = \dfrac{b}{x^4}$ si $x \in [a, +\infty[$.

2) Déterminer b et c en fonction de a pour que f soit une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}_+$.

On suppose b et c ainsi définis dans la suite de l'exercice et X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ de densité f.
Donner une allure de la représentation graphique de f.

3) Pour quelles valeurs $k \in \mathbb{N}^*$, X admet-elle un moment d'ordre k ?

4) Déterminer l'espérance et la variance de X si elles existent.

5) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.
On pose

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

a) Montrer que (T_n) est un estimateur de a.
b) Construire à partir de (T_n) un estimateur (S_n) sans biais de a.
c) Quel est le risque quadratique de (S_n) ?

Sujet E 222 - Exercice sans préparation

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A^2 - I$.

2) A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.