2 Sujets donnés en option économique

Sujet E 1 - Exercice

Soit n un entier naturel non nul. Un jardinier plante n bulbes de tulipe(s) dans son jardin. Chaque bulbe a une probabilité $p \in]0,1[$ de donner une fleur. Lorsqu'une tulipe fleurit une année, elle refleurit toutes les années suivantes. Par contre si un bulbe n'a pas donné de fleur une année, il a toujours une probabilité p de donner une fleur l'année suivante. On suppose de plus que les floraisons des différents bulbes sont indépendantes. On pose $q = 1 - p$.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On appelle T la variable aléatoire réelle correspondant au nombre d'années nécessaires pour que tous les bulbes fleurissent.

1) Question de cours : Loi géométrique, définition, propriétés.

2) Pour tout $h \in [\![1,\, n]\!]$, on définit la variable aléatoire T_h égale au nombre d'années nécessaires pour que le h-ième bulbe fleurisse.

- **a)** Déterminer la loi de T_h.
- **b)** Exprimer T en fonction de $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots, \mathrm{T}_n$. En déduire la loi de T.

3) **a)** Calculer $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{N}\,(q^k)^{\mathrm{N}}$.

- **b)** Calculer $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} (q^k)^{j-1}$.
- **c)** En déduire $\mathbb{E}(\mathrm{T})$ sous forme d'une somme.

Sujet E 1 - Exercice sans préparation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Déterminer les endomorphismes f de E diagonalisables qui vérifient $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

Sujet E 2 - Exercice

I) Question de cours : Comparaison de fonctions au voisinage de l'infini.
II) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad g(x) = x\ln^2(x).$$

1) Montrer que g réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$.
Soit h la bijection réciproque de la restriction de g à l'intervalle $]1,+\infty[$.

2) a) Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \ln h(x) + 2\ln(\ln h(x)) = \ln(x).$$

b) En déduire un équivalent simple de $h(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

III) Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2g(|x|)} & \text{si} \quad |x| < \dfrac{1}{e} \quad \text{et} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2) Montrer que X possède une espérance et la calculer.
3) X possède-t-elle une variance ?

Sujet E 2 - Exercice sans préparation

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $f(e_1 + e_2 + e_3)$, $f(e_2)$, $f(-e_1 + e_3)$.

Montrer que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

M est-elle diagonalisable ?

Sujet E 3 - Exercice

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, avec $n \geqslant 2$ et $0 < p < 1$.

On définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ une variable aléatoire Y de la façon suivante :

- pour tout k de $[[1, n]]$, la réalisation de l'événement $[X = k]$ entraîne celle de l'événement $[Y = k]$;
- la loi conditionnelle de Y sachant $[X = 0]$ est la loi uniforme sur $[[1, n]]$.

1) Question de cours : Le modèle binomial.

2) Déterminer la loi de probabilité de Y.

3) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de Y.

4) a) Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de Y sachant $[X \neq 0]$.

b) Calculer l'espérance, notée $\mathbb{E}(Y/X \neq 0)$, de la loi conditionnelle de Y sachant $[X \neq 0]$.

Sujet E 3 - Exercice sans préparation

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n $(n \in \mathbb{N}^*)$ et vérifiant $A^k = I_n$.
Que peut-on dire de A dans les cas suivants :

- k est un entier naturel impair ?,
- k est un entier naturel pair non nul ?

Sujet E 4 - Exercice

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1) Question de cours : Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète finie ; définition et interprétation.

2) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère une variable aléatoire X (discrète ou possédant une densité) prenant toutes ses valeurs dans l'intervalle $[a, b]$ et ayant un moment d'ordre 2.

a) Montrer que pour tout réel λ, on a la relation $\mathbb{V}(X) \leqslant \mathbb{E}\left([X-\lambda]^2\right)$.

b) En déduire que $\mathbb{V}(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

3) Dans la suite X est une variable aléatoire discrète ayant un moment d'ordre 2.

a) On suppose que X suit une loi uniforme sur $\{a, b\}$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = b) = 1/2.$$

Montrer alors qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente.

b) Etude d'une réciproque : on suppose que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Montrer que $X(\Omega) = \{a, b\}$, puis que X suit une loi uniforme sur $\{a, b\}$.

4) Que signifie le résultat précédent ? (on pourra s'appuyer sur l'interprétation de la variance).

Sujet E 4 - Exercice sans préparation

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 1 & Y(\omega) \end{pmatrix}$$

1) Déterminer

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega, M(\omega) \text{ inversible }\}\right).$$

2) Déterminer

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega, M(\omega) \text{ diagonalisable }\}\right).$$

Sujet E 5 - Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et p et q deux réels de $]0,1[$ tels que $p+q=1$. On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
La loi du couple (X, Y) est donnée par :
pour tout (j,k) tels que $0 \leqslant j \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathbb{P}\left([X=j] \cap [Y=k]\right) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k=j, j \neq 0 \\ \\ \dfrac{q^n}{n} & \text{si } j=0 \\ \\ 0 & \text{si } k \neq j \text{ et } j \neq 0 \end{cases}$$

1) Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales, lois conditionnelles.

2) **a)** Déterminer les lois marginales de X et Y respectivement.

b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

3) Soit j un entier tel que $0 \leqslant j \leqslant n$.

a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X=j]$.

b) Calculer l'espérance conditionnelle, notée $\mathbb{E}(Y/X=j)$, de la loi conditionnelle de Y sachant $[X=j]$.

4) **a)** Montrer que, pour tout $q \in]0,1[$, on a :

$$\mathbb{P}\left([X=1] \cap [Y=1]\right) \neq \mathbb{P}\left([X=1]\right) \times \mathbb{P}([Y=1]).$$

Conclure.

b) Calculer $\mathbf{Cov}(X,Y)$. Montrer qu'il existe une valeur de q pour laquelle $\mathbf{Cov}(X,Y)=0$.

c) Conclure.

Sujet E 5 - Exercice sans préparation

Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

où α est un nombre réel,
1) dans le cas où $\alpha = 2$,
2) dans le cas où $\alpha \neq 2$.

Sujet E 6 - Exercice

1) Question de cours : Moment d'ordre r d'une variable aléatoire à densité ; définition, existence.

2) Montrer qu'il existe deux réels A et B, indépendants de x, tels que, pour tout réel $x > 0$, on a : $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1}$.

3) On pose :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x(x+1)} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k est un paramètre réel.

a) Déterminer k pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X.
Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

b) X admet-elle une espérance ?

4) a) Déterminer la loi de $T = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor X \rfloor$ désigne la partie entière de X.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$.

5) Déterminer la loi de $Z = \dfrac{1}{X}$.

6) a) Déterminer la loi de $Y = X - \lfloor X \rfloor$.

b) Montrer que, pour tout entier $r \geqslant 1$, Y admet un moment d'ordre r.

c) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Sujet E 6 - Exercice sans préparation

Soit $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer A^{-1}.

Sujet E 7 - Exercice

1) Question de cours : Définitions d'un estimateur, d'un estimateur sans biais d'un paramètre réel inconnu θ.

Soit Z une variable aléatoire discrète d'espérance $\mathbb{E}(Z) = \theta\,(\theta \in \mathbb{R}^*)$ et de variance $\mathbb{V}(Z) = 1$.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on dispose d'un n-échantillon $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Z, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On pose : $\overline{Z}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} Z_j$. On suppose que θ est inconnu.

2) **a)** La variable aléatoire $\overline{Z}_n$ est-elle un estimateur sans biais de θ ?
b) Quel est le risque quadratique de $\overline{Z}_n$ en θ ?

3) Soit $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ des réels non nuls et $Y_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_j Z_j$.

a) Déterminer la condition que doivent vérifier les réels $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, pour que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$, on ait : $\mathbb{E}(Y_n) = \theta$?

On suppose dans la suite que cette condition est vérifiée.

b) Calculer $\mathbf{Cov}(\overline{Z}_n, Y_n)$ et $\mathbb{V}(\overline{Z}_n)$, où **Cov** désigne la covariance et $\mathbb{V}$ la variance.
En déduire que $\mathbb{V}(\overline{Z}_n) \leqslant \mathbb{V}(Y_n)$. Interprétation.

4) Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels non nuls.
On définit la variable aléatoire U_n par : $U_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$,
et on suppose que $\mathbb{E}(U_n) = \theta$ et $\mathbb{V}(U_n) = \dfrac{1}{n}$.
Montrer que $U_n = \overline{Z}_n$ avec une probabilité égale à 1.

Sujet E 7 - Exercice sans préparation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, à valeurs réelles, par :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}.$$

1) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2) Déterminer les points critiques de f.
3) Quelle est la nature de ces points critiques ?