

## B) Sujets donnés en option économique

SUJET N°13

## ■ 1 - Exercice

1° *Question de Cours*: Donner la formule de la variance d'une somme finie de variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs.

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p = \mathbb{P}([X_n = 1])$ , et on suppose que  $p \in ]0, 1[$ .

2° Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$ .

a) Déterminer les lois de  $Y_2$  et de  $Y_3$ .

b) On pose, pour  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{P}([Y_n = 1]) = p_n$ . Déterminer une relation de récurrence entre  $p_{n+1}$  et  $p_n$ , puis la valeur de  $p_n$  pour tout  $n \geq 1$ .

c) Existe-t-il des valeurs de  $n$  pour lesquelles les variables  $Y_n$  et  $Y_{n+1}$  sont indépendantes ?

3° On pose :  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Déterminer la loi de  $S_n$ , son espérance et sa variance.

(Indication : on pourra se ramener à des variables aléatoires  $X'_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) indépendantes suivant une loi de Bernoulli).

4° Écrire un programme en Pascal permettant de simuler la loi de  $S_n$ .

## ■ 2 - Exercice sans préparation

Étudier la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 \in ]0, 1[ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}.$$

Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $u_n = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ .

SUJET N°14

■ 1 - Exercice

1° *Question de Cours*: Définition et propriétés de la loi de Bernoulli et de la loi binomiale.

Une urne contient  $2n$  boules ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) de couleurs toutes différentes. La moitié d'entre elles sont marquées du chiffre zéro et les autres sont numérotées de 1 à  $n$ .

On extrait simultanément  $n$  boules de cette urne, obtenant ce qu'on appelle une poignée. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables. Pour  $i$  entier compris entre 1 et  $n$ , on note  $X_i$  la variables aléatoire réelle qui prend la valeur 1 si la boule  $i$  se trouve dans la poignée et 0 sinon.

2° Déterminer la loi de probabilité de  $X_i$ .

3° Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ , calculer la covariance du couple  $(X_i, X_j)$ .

4° On note  $S$  la variable aléatoire réelle prenant pour valeur la somme des numéros portés par les boules figurant dans la poignée.

a) Exprimer  $S$  en fonction de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

b) En déduire l'espérance et la variance de  $S$ .

5° On désigne par  $Z$  la variable aléatoire réelle donnant le nombre de boules portant le numéro zéro au sein de la poignée. Donner la loi de probabilité de  $Z$  puis son espérance.

■ 2 - Exercice sans préparation

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1.$$

1° Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de  $f$ .

2° Déterminer les points critiques de  $f$ .

3° La fonction  $f$  a-t-elle des extrema locaux ?

SUJET N°15

## ■ 1 - Exercice

1° *Question de Cours*: Donner la définition d'un estimateur et définir la notion de risque quadratique.

Une urne contient  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ . On sait que  $N$  est au moins égal à deux, mais on ne connaît pas sa valeur exacte et on cherche à l'estimer. Pour cela, on effectue  $n$  tirages avec remise ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et on note  $Z_k$  le numéro de la boule obtenue au  $k$ -ième tirage ( $1 \leq k \leq n$ ). On modélise l'expérience par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

2° On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k$ .

Donner l'expression d'un estimateur sans biais de  $N$ , fonction de  $M_n$  et dont la suite des variances converge vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

3° On note  $S_n = \text{Max}(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ .

a) Déterminer la fonction de répartition de  $S_n$ .

b) Montrer que pour toute variable aléatoire  $Y$  à valeurs dans  $\{1, 2, \dots, N\}$ , on a la relation :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^N \mathbb{P}([Y \geq k]).$$

c) En déduire que :  $\mathbb{E}(S_n) \geq N - \frac{N}{n+1}$ .

d) En déduire que  $S_n$  est un estimateur de  $N$ , dont l'espérance converge vers  $N$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## ■ 2 - Exercice sans préparation

Soit  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1° a) Trouver une relation entre  $A^2$ ,  $A$  et  $I$  (matrice identité d'ordre 2).

b) En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

2° Calculer les valeurs propres possibles de  $A$ .

3°  $A$  est-elle diagonalisable ?

SUJET N°16

■ 1 - Exercice

Dans cet exercice, on note  $C^0$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1° *Question de Cours*: Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour un endomorphisme.

Soit  $\Phi$  l'application définie sur  $C^0$  qui, à toute fonction  $f$  de  $C^0$ , associe la fonction  $g = \Phi(f)$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

2° Rappeler pourquoi, pour toute fonction  $f$  de  $C^0$ ,  $\Phi(f)$  est dérivable et expliciter sa fonction dérivée.

3° Vérifier que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $C^0$ .

4° Donner un exemple de fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et non dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
L'application  $\Phi$  est-elle surjective? Injective?

Soit  $\lambda$  un réel quelconque. On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $\Phi$  s'il existe une fonction  $f$  non nulle de  $C_0$ , telle que  $\Phi(f) = \lambda f$ . Une telle fonction  $f$  est appelée fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda$ .

5° Recherche des valeurs propres non nulles de  $\Phi$ .

On suppose, dans cette question, que  $\Phi$  admet une valeur propre  $\lambda$  non nulle.

Soit  $f$  une fonction propre associée à  $\lambda$ . Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

En dérivant la fonction  $x \mapsto f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}$ , montrer que  $f$  ne peut-être que la fonction nulle.

Conclure alors que  $\Phi$  n'admet aucune valeur propre.

6° Pour toute fonction  $f$  de  $C^0$ , on pose :  $F_0 = \Phi(f)$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_n = \Phi(F_{n-1})$ .

Montrer que  $F_n$  est de classe  $C^{n+1}$  sur  $\mathbb{R}$  et préciser la valeur de ses dérivées successives en 0.

En déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt.$

■ 2 - Exercice sans préparation

$X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et ayant la même loi de densité  $\varphi$ , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = k e^{-|x|}.$$

1° Déterminer la valeur du réel  $k$ .

2° Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

3° Justifier l'existence de  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$  et les calculer.

SUJET N°17

## ■ 1 - Exercice

Pour tout nombre réel  $a$ , on note  $A(a)$  la matrice

$$A(a) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1+a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- 1° a) *Question de Cours*: Rappeler la définition d'une matrice diagonalisable.  
 b) Montrer que si une matrice est diagonalisable, sa transposée est également diagonalisable.
- 2° a) Justifier le fait que pour tout  $a$  réel, la matrice  $A(a)$  est diagonalisable.  
 b) Montrer que  $a$  est valeur propre de  $A(a)$  et déterminer le sous-espace propre associé.
- c) Calculer  $A(a) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $A(a) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ .  
 d) Diagonaliser  $A(a)$ .

3° Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites réelles vérifiant, pour tout  $n$  entier naturel,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} = y_n + 2z_n \end{cases}$$

- a) Si l'on pose pour tout  $n$  entier naturel,  $X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$ , quelle relation a-t-on entre  $X_{n+1}$  et  $X_n$  ?  
 b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur  $x_0, y_0$  et  $z_0$  pour que les suites  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  et  $(z_n)$  soient bornées. Que peut-on dire alors de ces trois suites ?
- 4° a) Montrer que si  $B$  et  $B'$  sont deux matrices semblables de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et qu'il existe  $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $C^2 = B$ , alors il existe  $C' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $C'^2 = B'$ .  
 b) Montrer que si  $B$  et  $C$  sont deux matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $C^2 = B$ , alors  $BC = CB$ .  
 c) Si  $a \in \mathbb{R}$ , déterminer les matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  commutant avec la matrice  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .  
 d) Existe-t-il une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 = A(3)$  ?

## ■ 2 - Exercice sans préparation

- 1° Vérifier que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ , vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.  
 2° Déterminer la loi du maximum de deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , et de même loi de fonction de répartition  $F$ .  
 Généraliser à  $n$  variables.

SUJET N°18

## ■ 1 - Exercice

1° *Question de Cours*: Ecrire la formule de Taylor à l'ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) avec reste intégral pour une fonction d'une variable réelle de classe  $C^{n+1}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x^2}$  et  $F$  la primitive de  $f$  qui vérifie  $F(0) = 0$ .

2° Etudier les variations de  $F$  et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

3° a) Montrer que, pour tout  $x$  réel, l'intégrale  $\int_0^1 e^{-(xt)^2} dt$  existe.

On définit alors la fonction  $G$  par :

$$G(x) = \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt.$$

b) Démontrer que  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et que sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, G'(x) = \frac{x e^{-x^2} - F(x)}{x^2}.$$

En déduire les variations de  $G$ .

c) Montrer que  $G$  est continue en 0 et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$ .

d) Vérifier que  $G$  est dérivable en 0 et que  $G'$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

4° a) Montrer que  $G$  vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, xG'(x) + G(x) = f(x).$$

b) On veut prouver que  $G$  est l'unique fonction  $g$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, xg'(x) + g(x) = f(x) \quad (E).$$

Soit  $G_1$  une fonction réelle dérivable sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant l'équation (E). On pose  $H = G - G_1$ . Déterminer  $H(x)$  pour  $x > 0$  puis pour  $x < 0$ . Conclure en utilisant la continuité de  $H$  en 0.

## ■ 2 - Exercice sans préparation

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Soit  $a$  un réel strictement positif et  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0, 2a]$ .

1° Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $n$  variables aléatoires indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  qui ont toutes la même loi que  $X$ . On pose :

$$M_n = \text{Max}(X_1, \dots, X_n).$$

Déterminer la loi de  $M_n$  et calculer son espérance et sa variance.

2° En déduire que  $U_n = \frac{n+1}{2n} M_n$  est un estimateur sans biais de  $\mathbb{E}(X)$ .

Est-il préférable à l'estimateur  $V_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  ?