2 Exercices et questions sans préparation donnés en option économique

2.1 Exercices

1. À tout triplet de nombre réels (a, b, c), on associe la matrice
$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} .$$
   (a) Une telle matrice $M(a, b, c)$ est-elle diagonalisable ? inversible ?
   (b) Calculer $(M - I_3)^n$ pour n entier naturel non nul (I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).
   (c) Déterminer M^n en fonction de I_3, M et M^2 pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.
2. (a) La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 13 & -9 & 45 \\ -3 & 3 & -11 \\ -3 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$
   est-elle diagonalisable ?
   (b) Déterminer une matrice P inversible et trois réels (a, b, c) tels que
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} .$$
3. Soit t un nombre réel et $A(t)$ la matrice
$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix} .$$
   On note $\mathcal{M}$ l'ensemble de ces matrices lorsque t décrit $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{M}$ est stable par produit matriciel.
   (b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $A(t)$ est inversible. Montrer que dans ce cas, $A(t)^{-1}$ appartient encore à $\mathcal{M}$.
   (c) Résoudre l'équation
$$X^2 = A\Big(-\frac{3}{2}\Big)$$
   d'inconnue $X \in \mathcal{M}$.
   (d) Soit $C = A(-1)$. Déterminer C^n pour n entier naturel.

4. Étudier la fonction

$$f \,:\, x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt\,.$$

Ensemble de définition, continuité, dérivée, limites, graphe.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\,(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n})}\,dx\,.$$

Étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ I_n \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x\ln(n)}$$

et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6. Soit a un réel strictement positif. On se propose de déterminer les fonctions f trois fois dérivables sur un intervalle $[0, 2a]$ à valeurs réelles et telles que

$$\forall x \in [0, 2a],\ \frac{f(x)}{2} = f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(a - \frac{x}{2}\Big)\,.$$

Montrer qu'il existe $c \in [0, 2a]$ tel que $f''(c) = \max_{t\in[0,2a]}(f''(t))$ et prouver que $f''(c) = f''\Big(\frac{c}{2}\Big)$.

Déterminer alors les solutions f.

7. On se donne n variables aléatoires mutuellement indépendantes $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

   (a) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$.

   (b) On suppose $n \geq 4$. Calculer, pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$ la probabilité de l'événement $[Y = k]$ conditionné à l'événement

$$[U_2 = 0] \cap [U_4 = 1]$$

   (c) Calculer, pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$, la probabilité de l'événement $[Y = k]$ conditionné à l'événement $[Y > 0]$.

8. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P) et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout ω de Ω, on pose $Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{2}$ si $X(\omega)$ est pair et $Y(\omega) = \frac{1-X(\omega)}{2}$ sinon.

   (a) Déterminer $[Y = 0]$ et, pour chaque k élément de $\mathbb{Z}$, $[Y = k]$.

(b) Soit $p \in]0,1[$. On suppose que la loi de X est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ P(X = k) = p\,(1-p)^k .$$

Déterminer alors la loi de Y ainsi que son espérance mathématique.

9. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages avec remise tant que les numéros obtenus forment une suite strictement décroissante.

(a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X représentant le nombre de tirages effectués.

(b) Déterminer son espérance mathématique et la limite de cette espérance quand $n \to +\infty$.

On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante : si X admet une espérance, alors $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > k)$.

2.2 Questions sans préparation

1. Extrema de
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - (x-y)^4 .$$

2. Montrer que la famille $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ définie par

$$p_{1,1} = p_{-1,1} = \frac{1}{32}$$

$$p_{-1,-1} = p_{1,-1} = p_{1,0} = p_{0,1} = \frac{3}{32}$$

$$p_{-1,0} = p_{0,-1} = \frac{5}{32}, \ p_{0,0} = \frac{8}{32}$$

et $p_{i,j} = 0$ sinon, peut être considérée comme la loi d'un couple (X, Y). Étudier l'indépendance de X et de Y ; de X^2 et de Y^2.

3. On considère la fonction définie par

$$f(x) = (x-1)^{1/(x-2)} .$$

Quel est l'ensemble de définition de f ? Quelle valeur attribuer à $f(2)$ pour prolonger f en une fonction continue en $x = 2$? Tracer l'allure du graphe de f au voisinage de $x = 2$.

4. On considère trois variables aléatoires mutuellement indépendantes U, V et W suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs α, β et γ. On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$. Calculer $cov(X, Y)$.

5. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.
Déterminer les fonctions de répartition et les espérances mathématiques des variables aléatoires
$Y = \inf(X, 1 - X)$, $Z = \sup(X, 1 - X)$ et $R = \frac{Y}{Z}$
6. Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$. À quelle condition une matrice nilpotente est-elle diagonalisable ?