EXERCICES SANS PRÉPARATION 2014

Question 1 HEC 2014-1-S49

1. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

2. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3 et soit D une droite vectorielle de E stable par f.

a) Montrer que D admet un supplémentaire stable par f.

b) Montrer que si P est un supplémentaire de D stable par f, la restriction de f à P définit un endomorphisme diagonalisable de P.

Question 2 HEC 2014-2-S50

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n supérieure ou égale à 2. On note $< .,. >$ le produit scalaire de E et $\|.\|$ la norme associée.

1. Soit x un élément de E. Montrer que $\|x\| = \sqrt{n}$ si et seulement si il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E vérifiant $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$.

2. Soient x et y deux vecteurs de E. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E vérifiant $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$ et $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, e_k$.

Question 3 HEC 2014-3-S56

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f - \mathrm{Id}_E$ est une projecteur.

2. Quelles sont les valeurs propres de f ?

3. Combien existe-t-il de droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

4. Combien existe-t-il de plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

Question 4 HEC 2014-4-S61

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \ln n + a \ln n + b \ln n$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.

2. Calculer alors la somme de cette série.

Question 5 HEC 2014-5-S75

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})) = \dfrac{1}{(i+j+1)!}$.

Déterminer le réel a. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Question 6 HEC 2014-6-S91

Soit α un réel donné. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$.

1. Étudier suivant les valeurs de α, la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. En cas de convergence, on précisera la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

2. Étudier la nature de la série terme général u_n.

3. Soit x un réel vérifiant $|x| < 1$. Étudier suivant les valeurs du réel α, la convergence de la série de terme général $u_n\, x^n$.

Question 7 HEC 2014-7-S93

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n+2}\, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2. a) Calculer $u_{n+2} + u_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Question 8 HEC 2014-8-S94

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $[0,1]$.

Soit N une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante de la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$, suivant la loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$ ($n \geqslant 1$ et $0 < p < 1$).

On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\forall \omega \in \Omega,\ M_n(\omega) = \mathrm{Max}(U_1(\omega), U_2(\omega), \ldots, U_n(\omega))$.

On pose encore, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $T_n = \begin{cases} U_1 & \text{si } N = 0 \text{ est réalisé} \\ M_k & \text{si } N = k \text{ est réalisé} \end{cases}$.

Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\geqslant 1}$.

Question 9 HEC 2014-9-S101

Soient n_1 et n_2 deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Soit p un réel appartenant à $]0,1[$.

On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 définie sur un espaces probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$.

1. Soit n dans $(X1 + X2)(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $\{X_1 + X_2 = n\}$.

2. Calculer l'espérance conditionnelle $E(X_1 | X_1 + X_2 = n)$.

Question 10 HEC 2014-10-S104

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $M^2 = 0_{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}$.

Montrer que M est semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 11 HEC 2014-11-S110

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes une loi normale centrée réduite.

Soit θ un réel non nul. On pose $Y_0 = X_0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \theta\, Y_{n-1} + X_n$.

1. Déterminer pour tout n dans $\mathbb{N}$, la loi de Y_n.

2. n dans $\mathbb{N}$. Calculer pour tout h dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n+h})$.

Déja vu en 2012

Question 12 **HEC 2014-12-S112**

On tire avec remise une boule d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois.

Calculer l'espérance de X et trouver un équivalent quand n tens vers $+\infty$.

Question 13 **HEC 2014-13-S113**

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de variables aléatoires discrètes centrées définies sur un même espace probabilisé et admettant une variance.

1. Justifier l'existence de $V_0 = \mathrm{Inf}\{V(X)\,;\, X \in \mathcal{E}\}$.

2. On suppose que pour tout $(X_1, X_2) \in \mathcal{E}^2$, on a $\dfrac{1}{2}\Big(X_1 + X_2\Big) \in \mathcal{E}$.

Soit $(X_1, X_2) \in \mathcal{E}^2$ avec $V(X_1) = V(X_2) = V_0$. Montrer que que $X_1 = X_2$ presque sûrement.

Question 14 **HEC 2014-14-116**

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} > 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

1. Montrer que pour tout élément non nul X : ${}^tXAX > 0$.

2. Justifier que A est diagonalisable et inversible.

Question 15 **HEC 2014-15**

E est un espace euclidien de dimension n. On note $< .,. >$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée.

Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante : $\forall (x, y) \in E^2,\ < x, y >= 0 \Rightarrow < f(x), f(y) >= 0$.

1. Montrer qu'il existe k dans $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout x dans E, $\|f(x)\| = k\,\|x\|$.

2. Déterminer des endomorphismes vérifiant cette propriété.

3. A l'aide d'une représentation géométrique donner des exemples en dimension 2.
