EXERCICES SANS PRÉPARATION 2013

Question 1 HEC 2013-1-S46

Soit X une variable aléatoire à valeurs strictement positives, admettant une densité f et vérifiant la propriété suivante : la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ possède une espérance mathématique.

Q1. Établir l'inégalité : $E\left(X + \dfrac{1}{X}\right) \geqslant 2$.

Q2 Montrer que l'inégalité précédente n'est jamais une égalité, mais que $E\left(X + \dfrac{1}{X}\right)$ peut prendre des valeurs arbitrairement proches de 2.

Question 2 HEC 2013-2-S41

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi que la loi normale centrée réduite.

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1. Calculer $P(X = Y)$ et $P(XY > 0)$.

Q2. Trouver la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

Question 3 HEC 2013-3-S52

Soit E un espace vectoriel euclidien dont le produit scalaire est noté $< .,. >$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient : $\forall (x, y) \in E^2,\ < f(x), y >= - < x, f(y) >$.

Q1. Que peut-on dire de la matrice d'un élément f de $\mathcal{A}(E)$ dans une base orthonormée de E ?

Q2. On note $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tout les éléments de $\mathcal{A}(E)$, c'est-à-dire qui vérifient : $\forall f \in \mathcal{A}(E),\ f \circ g = g \circ f$.

a) Montrer que lorsque la dimension de E est égale à 2, $\mathcal{C}(E)$ est un plan vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $\mathcal{A}(E)$.

b) Trouver $\mathcal{C}(E)$ lorsque la dimension de E est strictement supérieure à 2.

Question 4 HEC 2013-4-S54

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]-1, 1[$.

Q1. Trouver toutes les fonctions ϕ définies, continues et strictement monotones sur $]-1, 1[$ telles que la variable $Y = \phi(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

Q2. En déduire une fonction paire ψ définie sur $]-1, 1[$ telle que la variable $\psi(X)$ suive aussi la loi exponentielle de paramètre 1.

Question 5 HEC 2013-5-S55

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Dans tout le texte a et b sont deux réels tels que $ab \neq 0$.

On note $M(a,b)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donnée par : $M(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Q1. a) Calculer $\big(M(a,b)\big)^2$.

b) Montrer que $\big(M(a,b)\big)^2$ est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

Q2. c et d sont deux réels. Montrer que $M(c,d)$ est semblable à $M(a,b)$ si et seulement si $ab = cd$.

Question 6 HEC 2013-6-S60

Soit X une variable aléatoire possédant une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}$ et nulle hors de l'intervalle $]-1,1[$.

Q1. Montrer que X possède une variance, qui est strictement comprise entre 0 et 1.

Q2. Montrer que toutes valeurs de l'intervalle $]0,1[$ est effectivement possible pour la variance de X.

Question 7 HEC 2013-7-S62

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On pose :

$F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}$.

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Question 8 HEC 2013-8-S63

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On suppose que f n'est pas diagonalisable et qu'il vérifie : $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

Q1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont supplémentaires.

Q2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 9 HEC 2013-9-S74

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi normale d'espérance m et de variance égale à 1. Soit b un réel strictement positif fixé.

Q1. Montrer que l'application $a \to P(a < X < a+b)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admet un maximum atteint en un point a_0 que l'on déterminera.

Q2. Exprimer la valeur de ce maximum à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Q3. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Question 10 HEC 2013-10-S79

$p \in [\![2, +\infty[\![$. Soient X_1, X_2, ..., , X_p des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre λ_i ($\lambda_i > 0$).

On pose $S_p = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i$.

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle du vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_{p-1})$ sachant $\{S_p = n\}$.

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'espérance conditionnelle $E(X1|X1 + X2 = n)$ en fonction de n, λ_1 et λ_2.

Question 11 HEC 2013-11-S82

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). On pose $Y = \lfloor X \rfloor$ et $Z = X - Y$.

Q1. Montrer que Y est une variable aléatoire et déterminer sa loi. Que peut-on dire de $Y + 1$?

Q2. Montrer que Z est une variable aléatoire et déterminer sa loi.

Q3. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Question 12 HEC 2013-12-S84

Q1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\cdot$ Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Q2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)\cdot$ Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Question 13 HEC 2013-13

Q1. P est un élément de $\mathbb{R}_2[X]$ de degé 2 tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) + P'(x) + P''(x) \geqslant 0$.

Q2. $n \in \mathbb{N}$. P est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré n tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

a) Montrer que n est pair.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(n)}(x) \geqslant 0$.

Question 14 HEC 2013-14

a et b sont deux réels. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n) + a\ \ln(n+1) + b\ \ln(n+2)$.

Déterminer les valeurs de a et b telles que la série de terme général u_n converge.

Question 15 HEC 2013-15

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un élément k de $\mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$.

Que dire de A^2 ?

Question 16 HEC 2013-16

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q1. Pour quelle(s) valeur(s) de x B est-elle diagonalisable ?

Q2. Montrer que si B n'est pas diagonalisable, B est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 17 HEC 2013-17

Dans un sac il y a n boulles numérotées de 1 à n. On extrait au hasard du sac une poignée de boules qui peut avoir 0, 1, ..., n éléments.

Soit S la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules de la poignée (S prend la valeur 0 si la poignée est vide...).

Calculer $E(S)$.

Question 18 HEC 2013-18

f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)\,f(x-y)=\big(f(x)\big)^2$.

On suppose que f n'est pas la fonction nulle et on se propose de montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que $f(0)$ n'est pas égal à 0.

Q2. Soit a dans $\mathbb{R}$ tel que $f(a)=0$. Montrer que $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=0$.

Q3. Conclure. Donner un exemple d'une telle fonction.

Question 19 HEC 2013-19

E est l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont la diagonale est $(a_1,a_2,\dots,a_n,a_n,a_{n-1},\dots,a_1)$, "l'anti-diagonale" est $(b_1,b_2,\dots,b_n,b_n,b_{n-1},\dots,b_1)$ et les autres coefficients sont nuls.

Q1. Trouver la dimension du sous-espace vectoriel E.

Q2. A est un élément de E. Montrer que A est diagonalisable et trouver une base de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Question 20 HEC 2013-20

On considére les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X] : E_1=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\mid P(1)=P(2)=P(3)=0\}$,

$E_2=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\mid P(0)=P(1)=P(2)=0\}$ et $E_3=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\mid P(X)=P(-X)\}$.

Montrer que $\mathbb{R}_3[X]=E_1\oplus E_2\oplus E_3$.

Question 21 HEC 2013-21

$(X_1,X_2,\dots,X_p)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre λ_i.

$S_p=X_1+X_2+\cdots+X_p$ et n est un élément de $\mathbb{N}$.

Q1. Trouver la loi conditionnelle du vecteur $(X_1,X_2,\dots,X_p)$ sachant que $(S_p=n)$.

Q2. Trouver l'espérance conditionnelle de X_1 sachant que $(X_1+X_2=n)$.

La suite est oublié et Q2 n'est pas très sûr.

Question 22 HEC 2013-22

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ et $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)$.

Q1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et trouver sa limite.

Q2. Même chose pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Question 23 HEC 2013-23

X est une variable aléatoire à densité ayant une densité f continue sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}-]-1,1[$.

Q1. Montrer que X possède une variance comprise entre 0 et 1..

Q2. Montrer que tout réel compris entre 0 et 1 est la variance d'une variable aléatoire de ce type.