R.

Question 1 **HEC 2012-1-S7** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $]0,1]$.

On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $X_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} U_i^{\frac{1}{n}}$ et $Y_n = (e\,X_n)^{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\ln Y_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Question de cours. *Définition et proppriétés des fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\ln Y_n = \ln\left((eX_n)^{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}\,[\ln e + \ln X_n] = \sqrt{n}\,[1 + \ln \prod_{i=1}^{n} U_i^{1/n}]$

$\ln Y_n = \sqrt{n}\left[1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right] = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{n} \ln U_i + n\right] = \frac{S_n + n}{\sqrt{n}}$ où $S_n = \sum_{i=1}^{n} \ln U_i$.

Posons $T = \ln U_1$. Utilisons le théorème de transfert pour montrer l'existence de $E(T)$ et $V(T)$ et les calculer.

Posons $\forall t\in[0,1]$, $f(t)=1$ et $\forall t\in\mathbb{R}-[0,1]$, $f(t)=0$.

- f est une densité de U_1 ;
- U_1 prend ses valeurs dans $]0,1]$;
- $\ln$ est continue sur $]0,1]$;

Alors $E(\ln U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ est absolument convergente.

$t\mapsto \ln t\, f(t)$ est continue sur $]0,1]$.

$\forall \varepsilon\in]0,1]$, $\int_\varepsilon^1 \ln t\, f(t)\,dt = \int_\varepsilon^1 \ln t\,dt = [t\ln t - t]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon$.

$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln t\, f(t)\,dt = -1$. Donc $\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ converge et vaut -1

Alors $\int_0^1 -\ln t\, f(t)\,dt$ converge également donc $\int_0^1 |\ln t\, f(t)|\,dt$ converge.

$\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ converge absolument donc $E(\ln U_1)$ existe.

$E(T)$ existe et $E(T) = E(\ln U_1) = \int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt = -1$.

$T^2 = (\ln U_1)^2 = \ln^2 U_1$.

- f est une densité de U_1
- U_1 prend ses valeurs dans $]0,1[$
- $\ln^2$ est continue sur $]0,1[$.

Alors $E(\ln^2 U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln^2 t\, f(t)\,dt$ est absolument convergente.

$\forall t \in]0,1[$, $\ln^2 t\, f(t) = \ln^2 t \geq 0$.

Donc $E(\ln^2 U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln^2 t\, dt$ converge.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. $\int_\varepsilon^1 \ln^2 t\, dt = [t \ln^2 t]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 t \times 2 \times \frac{1}{t} \times \ln t\, dt = -\varepsilon \ln^2 \varepsilon - 2\int_\varepsilon^1 \ln t\, dt$.

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln^2 t\, dt = 0 - 2\int_0^1 \ln t\, dt = 2$. $\int_0^1 \ln^2 t\, dt$ existe et vaut 2.

Alors $E((\ln U_1)^2)$ existe et $E((\ln U_1)^2) = \int_0^1 \ln^2 t\, f(t)\,dt = \int_0^1 \ln^2 t\, dt = 2$.

$E(T^2)$ existe et vaut 2 donc $V(T)$ existe et vaut $2 - 1^2$ c'est à dire 1.

Appliquons alors le théorème de la limite centrée.

1) $(\ln U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes car $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes

2) Toutes les variables aléatoires de la suite $(\ln U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont même loi.

3) Les variables aléatoires de cette suite ont pour espérance -1 et pour variance 1 $(1 > 0\,!)$.

Alors la suite de terme général $\dfrac{\sum_{i=1}^n \ln U_i - E(\sum_{i=1}^n \ln U_i)}{\sqrt{V(\sum_{i=1}^n \ln U_i)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\sum_{i=1}^n \ln U_i = S_n$. $E(\sum_{i=1}^n \ln U_i) = \sum_{i=1}^n E(\ln U_i) = \sum_{i=1}^n (-1) = -n$.

$V(\sum_{i=1}^n \ln U_i) = \sum_{i=1}^n V(\ln U_i) = \sum_{i=1}^n 1 = n$.

par indépendance

Alors $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \ln U_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right)}{\sqrt{V\left(\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right)}} = \dfrac{S_n - (-n)}{\sqrt{n}} = \dfrac{S_n + n}{\sqrt{n}} = \ln Y_n$.

Ainsi la suite $(\ln Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Remarque.. Pour calculer l'espérance et la variance de $\ln U_1$ on aurait pu remarquer que $-\ln U_1$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Ainsi $E(-\ln U_1) = \frac{1}{1}$ et $V(-\ln U_1) = \frac{1}{1^2}$.

Alors $E(\ln U_1) = -1$ et $V(\ln U_1) = 1$.

R

Question 2 **HEC 2012-2-S9** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit $U = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On suppose $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

Q1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer les valeurs propres de A

Q2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A n'est pas nécessairement diagonalisable.

Question de cours. *Sommes de Riemann.*

Q1 Supposons que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A est symétrique donc <u>A est diagonalisable.</u>

qui peut le plus peut le moins. Pour donner plus d'épaisseur à Q2 nous allons chercher les valeurs propres de A dans le cas général c'est à dire avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notons $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour tout j dans $[\![1,n]\!]$ notons $C_j(A)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) = \dim \operatorname{Vect}\left(a_1E_n, a_2E_n, \dots, a_{n-1}E_{n}, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right)$.

Comme $a_1 \neq 0$: $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}\left(E_n, a_2E_n, \dots, a_{n-1}E_n, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right) = \dim \operatorname{Vect}\left(E_n, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right)$.

Finalement $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(E_n, V)$ avec $V = \sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} a_k E_k$. Notons que (E_n, V) est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\alpha E_n + \beta V = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

$\alpha E_n + \sum_{k=1}^{n-1} \beta a_k E_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. La liberté de $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ donne : $\alpha = \beta a_1 = \beta a_2 = \dots = \beta a_{n-1} = 0$

Comme $a_1 \neq 0$: $\alpha = \beta = 0$. Ceci achève de montrer que (E_n, V) est libre.

Alors $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(E_n, V) = 2 < n$. A n'est pas inversible donc 0 est valeur propre de A.

De plus $\dim SEP(A,0) = n - \operatorname{rg} A = n-2$.

<u>0 est valeur propre de A et $\dim SEP(A,0) = n-2$.</u> Cherchons les valeurs propres non nulles de A. Soit $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} a_1 x_n = \lambda x_1 \\ a_2 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!], \ x_k = \dfrac{a_k}{\lambda} x_n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i \times \frac{a_i}{\lambda} x_n + a_n x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall i \in [\![1, n-1]\!], \ x_i = \dfrac{a_i}{\lambda} x_n \\ \text{et} \\ \left(\lambda^2 - a_n \lambda - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \right) x_n = 0 \end{cases}$$

1er cas : $\lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$.

Alors $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k\in [\![1,n-1]\!],\ x_k = \frac{a_k}{\lambda} x_n \\ \text{et} \\ x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \Leftrightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Donc λ n'est pas valeur propre de A.

2ème cas : $\lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$.

$AX=\lambda X \Leftrightarrow \forall k\in [\![1,n-1]\!],\ x_k = \frac{a_k}{\lambda} x_n$.

$X_0 = \begin{pmatrix} a_1/\lambda \\ a_2/\lambda \\ \vdots \\ a_{n-1}/\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX_0 = \lambda X_0$. De plus $AX=\lambda X \Leftrightarrow X = x_n X_0$.

Ainsi λ est valeur propre de A et $SEP(A,\lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a_1/\lambda \\ a_2/\lambda \\ \vdots \\ a_{n-1}/\lambda \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi 1) les sous-espaces propres associés à des valeurs propres non nulles de A, s'il en existe, sont des droites vectorielles

2) Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda \in \mathrm{Sp}\,A \Leftrightarrow \lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$ (1)

Envisageons deux cas.

1° * $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. (1) $\Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{a_n}{2}\right)^2 = \frac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2$.

(1) $\Leftrightarrow \lambda = \frac{a_n}{2} + \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$ ou $\lambda = \frac{a_n}{2} - \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$.

$0^2 - 0\times\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 > 0$ car $a_1 \neq 0$ donc 0 n'est pas solution de (1)

Alors $\frac{a_n}{2} + \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$ et $\frac{a_n}{2} - \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$ sont deux réels non nuls.

De plus ces réels sont distincts car $\sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2} > 0$.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, A admet exactement trois valeurs propres distinctes qui sont :

$$0,\quad \frac{a_n}{2}+\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}\quad \text{et}\quad \frac{a_n}{2}-\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}$$

. Ceci achève Q1.

(Q2) Supposons $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

0 solution de (1) $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$.

Si $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$ la seule solution non nulle de (1) est a_n.

Alors $Sp\,A=\{0,a_n\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,a_n)=n-2+1=n-1<n$.

Ainsi A n'est pas diagonalisable.

Supposons $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$. 0 n'est pas solution de (1).

Le discriminant de (1) est $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2$.

1er cas : $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$. (1) admet une solution et une seule : $\frac{a_n}{2}$

Alors $Sp\,A=\{0,\frac{a_n}{2}\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,\frac{a_n}{2})=n-2+1=n-1<n$.

A n'est pas diagonalisable.

2ème cas : $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$ (1) admet deux solutions distinctes λ_1 et λ_2 et ces solutions ne sont pas nulles.

Alors $Sp\,A=\{0,\lambda_1,\lambda_2\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,\lambda_1)+\dim SEP(A,\lambda_2)=n-2+1+1=n$.

A est diagonalisable.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$: A est diagonalisable si et seulement si $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$ et $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$

Par exemple

pour $a_1=i$, $a_2=a_3=\dots=a_{n-1}=0$ et $a_n=2$: A n'est pas diagonalisable.

Ainsi si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, A n'est pas nécessairement diagonalisable.

R.

Question 3 **HEC 2012-3-S12** $\boxed{\textbf{F 1}}$ **C. GRASSET**

f est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien $(E, <.,.>)$.

On suppose l'existence d'une constante réelle α positive ou nulle telle que $\forall x \in E,\ ||f(x)|| = \alpha\, ||x||$.

Montrer que $f^2 = \alpha^2\ \mathrm{Id}_E$.

Question de cours *Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.*

Soit $(x,y) \in E^2$. $\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right]$.

$\langle f(x),f(y)\rangle = \frac{1}{2}\left[\|f(x)+f(y)\|^2-\|f(x)\|^2-\|f(y)\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\|f(x+y)\|^2-\alpha^2\|x\|^2-\alpha^2\|y\|^2\right]$.

$\langle f(x),f(y)\rangle = \frac{1}{2}\left[\alpha^2\|x+y\|^2-\alpha^2\|x\|^2-\alpha^2\|y\|^2\right] = \alpha^2\,\frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right] = \alpha^2\langle x,y\rangle$.

$\underline{\forall (x,y)\in E^2,\ \langle f(x),f(y)\rangle = \alpha^2\langle x,y\rangle.}$ Posons $g = f^2-\alpha^2\,\mathrm{Id}_E$

$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle g(x),y\rangle = \langle f^2(x),y\rangle - \alpha^2\langle x,y\rangle = \langle f(x),f(y)\rangle - \alpha^2\langle x,y\rangle = 0$.

↑ f est symétrique.

$\forall x\in E, \forall y\in E, \langle g(x),y\rangle = 0$. $\forall x\in E,\ g(x)\in E^{\perp}=\{0_E\}$. $\forall x\in E,\ g(x)=0_E$. $g=0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi $f^2-\alpha^2\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\underline{f^2=\alpha^2\,\mathrm{Id}_E.}$

__Remarque__.. __Rapidement__ une autre approche.

- f est symétrique donc f^2 est symétrique. Ainsi $g = f^2-\alpha^2\,\mathrm{Id}_E$ est symétrique.
- $\forall x\in E,\ \langle g(x),x\rangle = \langle f^2(x),x\rangle - \alpha^2\langle x,x\rangle = \langle f(x),f(x)\rangle - \alpha^2\|x\|^2 = \|f(x)\|^2-\alpha^2\|x\|^2 = 0$.

  $\forall x\in E,\ \langle g(x),x\rangle = 0$. ceci montre que g est antisymétrique (classique !).

Ainsi g est symétrique et antisymétrique donc g est l'endomorphisme nul.

On retrouve ainsi $f^2=\alpha^2\,\mathrm{Id}_E$.

R.

Question 4 **HEC 2012-4-S16** $\boxed{\text{F } 1^-}$ **P. KONIECZNY**

$n \in [\![2, +\infty [\![$. On considère le polynôme P_n de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par $P_n = X^n + 1$.

Pour quelles valeurs de n, P_n est-il divisible par $X^2 + 1$?

Question de cours. *Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, dans le cas où les deux variables sont à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et dans le cas où elles possèdent une densité.*

$X^2+1=(X-i)(X+i)$. Donc X^2+1 divise P_n si et seulement si i et $-i$ sont racines de P_n.

Or $\forall z \in \mathbb{C}$, $P_n(\bar{z}) = \bar{z}^n + 1 = \overline{z^n} + 1 = \overline{z^n+1} = \overline{P_n(z)}$. Donc si z est racine de P_n alors $\bar{z}$ est racine de P_n. Ainsi X^2+1 divise P_n si et seulement si i est racine de P_n autrement dit si et seulement si $i^n = -1$.

Soit r le reste dans la division par 4 de n. $r \in \{0,1,2,3\}$ et $\exists q \in \mathbb{N}$, $n = 4q+r$.

$$i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q\, i^r = 1^q\, i^r = i^r = \begin{cases} 1 & \text{si } r=0 \\ i & \text{si } r=1 \\ -1 & \text{si } r=2 \\ -i & \text{si } r=3 \end{cases}.$$ Donc $i^n = -1 \iff r = 2$.

<u>X^2+1 divise P_n si et seulement si le reste dans la division de n par 4 est 2.</u>

<u>X^2+1 divise $P_n \iff n \equiv 2\ [4]$.</u>

P.

Question 5 **HEC 2012-5-S20** $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $F = T(f)$ définie par :

$$F(0) = f(0) \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, \ F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt.$$

Q1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

Q2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Question de cours. *Théorème de la limite centrée.*

Q1 • Soit $f \in E$. Posons $F = T(f)$ et montrons que $F \in E$.

Posons $\forall x \in [0, +\infty[$, $P_f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. P_f est la primitive de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0 (f est continue sur $[0, +\infty[$).

P_f est donc de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. De plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Alors par produit $F = T(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Donc F est largement continue sur $]0, +\infty[$.

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt\right) = \lim_{x \to 0} \frac{P_f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{P_f(x) - P_f(0)}{x - 0} = P_f'(0) = f(0)$. Ainsi F est continue en 0.

F est donc continue sur $[0, +\infty[$. $F \in E$.

$\forall f \in E$, $T(f) \in E$. <u>T est une application de E dans E.</u>

• Notons que T est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(f, g) \in E^2$.

→ $T(\lambda f + g)(0) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda T(f)(0) + T(g)(0) = (\lambda T(f) + T(g))(0)$.

→ Soit $x \in]0, +\infty[$. $T(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (\lambda f + g)(u)\,du = \lambda \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x} \int_0^x g(t)\,dt$.

$T(\lambda f + g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x) = (\lambda T(f) + T(g))(x)$.

Ainsi $\forall x \in [0, +\infty[$, $T(\lambda f + g)(x) = (\lambda T(f) + T(g))(x)$. $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f, g) \in E^2$, $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$. <u>$T$ est linéaire.</u>

Finalement <u>T est un endomorphisme de E</u>

• Soit $f \in \text{Ker}\, T$. $T(f) = 0_E$. $\forall x \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt = 0$. $\forall x \in]0, +\infty[$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$.

Mais $\forall x \in [0,+\infty[$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$. En dérivant on obtient : $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x)=0$. $f = 0_E$.

Ainsi $\operatorname{Ker} T = \{0_E\}$. <u>T est injectif.</u>

<u>Remarque</u>.. Nous avons vu que si $f \in E$, $T(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

les éléments de $\operatorname{Im} T$ sont donc de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Pour $\forall x \in [0,+\infty[$, $h(x) = |x-1|$.

h est continue sur $[0,+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 1. Ainsi $h \in E$ mais $h \notin \operatorname{Im} T$

Alors T n'est pas surjectif.

<u>Exercice</u>.. Montrer que $\operatorname{Im} T$ est l'ensemble des éléments g de E tels que :

1° g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$;

2° $\lim_{x \to 0^+} (x g'(x)) = 0$.

(Q2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\mathcal{E}_\lambda = \{f \in E \mid T(f) = \lambda f\}$. Notons que $\mathcal{E}_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

Si $\lambda = 0$: $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_0 = \operatorname{Ker} T = \{0_E\}$. Donc nous supposerons dans ce qui suit $\lambda \neq 0$.

<u>Analysons un peu</u>. Partons d'un élément f appartenant à $\mathcal{E}_\lambda$.

Notons de nouveau P_f la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0.

$T(f)(0) = \lambda f(0)$ donc $f(0) = \lambda f(0)$; $(\lambda-1) f(0) = 0$. Notons que si $\lambda \neq 1$: $f(0) = 0$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $P_f'(x) = f(x) = \frac{1}{\lambda x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{\lambda x} P_f(x)$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $P_f'(x) - \frac{1}{\lambda x} P_f(x) = 0$.

Notons que $x \mapsto \frac{1}{\lambda} \ln x$ est une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction continue sur $]0,+\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{\lambda x}$.

Le cours permet de dire que : $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $P_f(x) = c\, e^{\frac{1}{\lambda}\ln x}$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = P_f'(x) = \frac{1}{\lambda x} P_f(x) = c \frac{1}{\lambda x} e^{\frac{1}{\lambda}\ln x} = c \frac{1}{\lambda x} x^{1/\lambda} = \frac{c}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

<u>Donc $\exists d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = d\, x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ et $f(0) = 0$ si $\lambda \neq 1$</u>. Poursuivons l'analyse.

f est continue en 0 avec $f(0) = \lim_{x \mapsto 0^+} \left(\alpha x^{\frac{1}{\lambda}-1}\right)$. Notons que cette limite est finie !

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$ $\lim_{x \mapsto 0^+} \left(x^{\frac{1}{\lambda}-1}\right) = +\infty$ donc nécessairement $\alpha = 0$.

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0$ $f(0) = \lim_{x \mapsto 0^+} (\alpha x^0) = \alpha$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \alpha x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \alpha x^0 = \alpha$.

donc $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \alpha$. Posons $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_1(x) = 1$. $\underline{f = \alpha f_1}$

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$ Alors $f(0) = 0$ car $\lambda \neq 1$ et ainsi $f(0) = \alpha \times 0$.

de plus $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \alpha \times x^{\frac{1}{\lambda}-1}$

Posons $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. $\underline{f = \alpha f_\lambda}$.

Résumons cette analyse.

Si $\lambda = 0$: $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$: $\mathcal{S}_\lambda \subset \{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0$ donc si $\lambda = 1$:

$\mathcal{S}_1 \subset \mathrm{Vect}(f_1)$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$, $\mathcal{S}_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$.

Notons que $0_E \in \mathcal{S}_\lambda$, que $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \lambda \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et

$\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda \in]0, 1[$.

Alors 1) $\forall \lambda \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$, $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$.

2) $\mathcal{S}_1 \subset \mathrm{Vect}(f_1)$ où $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_1(x) = 1$.

3) $\forall \lambda \in]0, 1[$, $\mathcal{S}_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Reste à envisager deux réciproques.

Notons que $\mathcal{S}_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}_E)$ donc $\mathcal{S}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de E ceci pour tout λ dans $\mathbb{R}$.

f_1 est continue sur $[0, \infty[$. $f_1 \in E$. $T(f_1)(0) = f_1(0)$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $T(f_1)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x 1\, dt = \frac{1}{x} \times x = 1 = f_1(x)$.

Alors $\forall x \in [0, +\infty[$, $T(f_1)(x) = 1 \times f_1(x)$. $T(f_1) = 1 \times f_1$. $f_1 \in \mathcal{S}_1$.

Donc $\mathrm{Vect}(f_1) \subset \mathcal{E}_1$. Alors $\mathcal{E}_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$.

Soit $\lambda \in]0,1[$. $\mathcal{E}_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$. Pour montrer que $\mathrm{Vect}(f_\lambda) \subset \mathcal{E}_\lambda$ il suffit de montrer que $f_\lambda \in \mathcal{E}_\lambda$ car $\mathcal{E}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de E.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$.

f_λ est continue sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\lambda}-1} \underset{\frac{1}{\lambda}-1>0}{=} 0 = f_\lambda(0)$ donc f_λ est continue en 0.

Ainsi f_λ est continue sur $[0,+\infty[$. $f_\lambda \in E$.

$T(f_\lambda)(0) = f_\lambda(0) = 0 = \lambda f_\lambda(0)$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

Soit $\varepsilon \in]0,+\infty[$. $\int_\varepsilon^x f_\lambda(t)\,dt = \int_\varepsilon^x t^{\frac{1}{\lambda}-1}\,dt = \left[\frac{t^{1/\lambda}}{1/\lambda}\right]_\varepsilon^x = \lambda\left[x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}\right]$.

Alors $\int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+}\left(\lambda\left[x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}\right]\right) = \lambda x^{1/\lambda}$ car $\frac{1}{\lambda} > 0$.

Alors $T(f_\lambda)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \frac{1}{x}\lambda x^{1/\lambda} = \lambda\, x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda f_\lambda(x)$.

Finalement $\forall x \in [0,+\infty[$, $T(f_\lambda)(x) = \lambda f_\lambda(x)$. $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$; $f_\lambda \in \mathcal{E}_\lambda$.

Alors $\mathrm{Vect}(f_\lambda) \subset \mathcal{E}_\lambda$ et finalement $\mathcal{E}_\lambda = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$.

<u>Conclusion</u> :
- $\forall \lambda \in]-\infty,0] \cup]1,+\infty[$, $\mathcal{E}_\lambda = \{0_E\}$
- $\mathcal{E}_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$ où f_1 est l'élément de E défini par $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_1(x) = 1$
- $\forall \lambda \in]0,1[$, $\mathcal{E}_\lambda = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où f_λ est l'élément de E défini par :

  $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

Ainsi
- $\mathrm{Sp}\, T =]0,1]$
- $\mathrm{SEP}(T,\lambda) = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ pour tout $\lambda \in]0,1]$.

<u>Remarque</u>. - On aurait sans doute pu poser $\forall \lambda \in]0,1]$, $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ ...

R.

Question 6 **HEC 2012-6-S23** **F 1** **I. KARDASZEWICZ**

a, b sont deux réels strictement positifs. α est réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant les conditions suivantes :

- $P(X=0)=0$;
- $P(X>0)=\alpha$;
- $P_{\{X>0\}}(X \leqslant x) = \begin{cases} 1-e^{-ax} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$;
- $P_{\{X<0\}}(-X \leqslant x) = \begin{cases} 1-e^{-bx} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. *Je mettrais plutôt* $P_{\{X<0\}}(-X < x) = \begin{cases} 1-e^{-bx} & si\ x>0 \\ 0 & si\ x \leqslant 0 \end{cases}$.

Q1. Déterminer la fonction de répartition de X.

Q2. La variable aléatoire X est-elle à à densité ?

Q3. Établir l'existence de $E(X)$. Calculer $E(X)$.

Question de cours. *Développement limité d'ordre 1 au point a de $\mathbb{R}^n$ pour une fonction numérique f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.*

Q1 $(\{X>0\}, \{X=0\}, \{X<0\})$ est un système complet d'événements.

Alors $1 = P(X>0) + P(X=0) + P(X<0) = \alpha + 0 + P(X<0)$. $P(X<0) = 1-\alpha$.

soit $x \in]-\infty, 0]$

$P(X \leq x) = P(\{X \leq x\} \cap \{X<0\}) + P(\{X \leq x\} \cap \{X=0\}) + P(\{X \leq x\} \cap \{X>0\})$.

$\{X \leq x\} \cap \{X>0\} = \emptyset$ donc $P(\{X \leq x\} \cap \{X>0\}) = 0$ ... car $x \leq 0$

$\{X \leq x\} \cap \{X=0\} \subset \{X=0\}$. Alors $0 \leq P(\{X \leq x\} \cap \{X=0\}) \leq P(X=0) = 0$.

donc $P(\{X \leq x\} \cap \{X=0\}) = 0$.

Alors $P(X \leq x) = P(\{X \leq x\} \cap \{X<0\}) = P(\{-X \geq -x\} \cap \{X<0\})$

$P(X \leq x) = P(X<0)\, P_{\{X<0\}}(-X \geq -x) = (1-\alpha)\,(1 - P_{\{X<0\}}(-X < -x)) = (1-\alpha)\left[1-(1-e^{-b(-x)})\right]$

$-x \geq 0$ donc clair si $-x>0$ et encore vrai si $-x=0$!!

$P(X \leq x) = (1-\alpha)\, e^{bx}$ si $x \in]-\infty, 0]$.

soit $x \in]0, +\infty[$.

$P(X \leq x) = P(\{X \leq x\} \cap \{X<0\}) + P(\{X \leq x\} \cap \{X=0\}) + P(\{X \leq x\} \cap \{X>0\})$.

$P(\{X \leq x\} \cap \{X<0\}) = P(X<0) = 1-\alpha$ et comme plus haut $P(\{X \leq x\} \cap \{X=0\}) = 0$ car $P(X=0)=0$.

Ainsi $P(X \leq x) = 1-\alpha + P(X>0)\, P_{\{X>0\}}(X \leq x) = 1-\alpha+\alpha(1-e^{-ax}) = 1-\alpha\, e^{-ax}$.

La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} (1-\alpha)e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1-\alpha e^{-ax} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}.$$

(Q2) $(1-\alpha)e^{b\times 0} = 1-\alpha = 1-\alpha e^{-a\times 0}$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} (1-\alpha)e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1-\alpha e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

$x \mapsto (1-\alpha)e^{bx}$ et $x \mapsto 1-\alpha e^{-ax}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc F_X est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. Ceci suffit pour dire que :

1) F_X est continue sur $\mathbb{R}$

2) F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{0\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Ainsi <u>X est une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F'_X(x) = (1-\alpha)b e^{bx}$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ F'_X(x) = \alpha a e^{-ax}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} \alpha a e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ (1-\alpha)b e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$.

f_X est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide sur $\mathbb{R}-\{0\}$, donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points, avec F'_X donc <u>f_X est une densité de X.</u>

(Q3) Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$.

g est une densité d'une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. Alors $\int_0^{+\infty} x g(x)\,dx$ converge et vaut $E(Y)$.

Donc <u>$\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{\lambda}$.</u> (1) $-Y$ est aussi une variable aléatoire à densité et $h : x \mapsto \frac{1}{|-1|} g(-x)$ en est une densité.

$E(-Y)$ existe et vaut $-E(Y)$ donc $-\frac{1}{\lambda}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, h(x)\,dx$ existe et vaut $-\frac{1}{\lambda}$. où $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Donc $\int_{-\infty}^{0} \lambda x e^{\lambda x}\,dx$ existe et vaut $-\frac{1}{\lambda}$. ②

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x f_X(x) = \begin{cases} \alpha a x e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ (1-\alpha) b x e^{bx} & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi • $\int_{0}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $\alpha \times \frac{1}{a}$ (d'après ①).

• $\int_{-\infty}^{0} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $(1-\alpha)\left(-\frac{1}{b}\right)$ (d'après ②).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{\alpha}{a} - \frac{1-\alpha}{b}$.

Donc X possède une espérance et $E(X) = \frac{\alpha}{a} - \frac{1-\alpha}{b}$.

R.

Question 7 **HEC 2012-7-S27** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Q1. On suppose que la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ admet une espérance. Montrer que X admet une espérance.

Q2. La réciproque est-elle vraie ?

Question de cours. Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

Q1 X est une variable aléatoire à densité qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc X possède une densité f définie sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $]-\infty, 0]$.

- X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$;
- $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$;
- f est une densité de X ;
- $E(X + \frac{1}{X})$ existe.

Alors le théorème de transfert montre que $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) f(t)\, dt$ est absolument convergente donc convergente.

$\int_{-\infty}^0 t f(t)\, dt$ existe et vaut 0. $\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leqslant t \leqslant t + \frac{1}{t}$ et $f(t) \geqslant 0$.

donc $\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leqslant t f(t) \leqslant (t + \frac{1}{t}) f(t)$ et $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) f(t)\, dt$ converge.

Alors $\int_0^{+\infty} t f(t)\, dt$ converge.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ converge. Donc <u>X possède une espérance.</u>

Q2 La réciproque est fausse. Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

- <u>X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$</u> (non ?).
- <u>$E(X)$ existe.</u>
- <u>la fonction g définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$</u> <u>est une densité de X</u>

$t \mapsto t + \frac{1}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc, d'après le théorème de transfert, $X + \frac{1}{X}$ possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) g(t)\, dt$ est absolument convergente.

Or $(t + \frac{1}{t}) g(t) \underset{0}{\sim} \frac{\lambda}{t}$; $\forall t \in]0,+\infty[$, $\frac{\lambda}{t} \geqslant 0$ et $\int_0^1 \frac{\lambda}{t}\, dt$ diverge. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^1 (t + \frac{1}{t}) g(t)$ diverge. Alors $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) g(t)\, dt$ diverge. <u>$X + \frac{1}{X}$ n'a pas d'espérance.</u>

R .

Question 8 **HEC 2012-8-S28** $\boxed{\textbf{F 2}}$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$. On note $P = (p_{i,j})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.

Q1. Exprimer P^{-1} en fonction de P.

Q2. Établir l'inégalité $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\right| \leqslant n$.

Question de cours. *Soit p un paramètre réel inconnu vérifiant $0 < p < 1$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variable aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli d'espérance p. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.*

Rappeler comment l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de définir à partir de $\overline{X_n}$, un intervalle de confiance de risque α $(0 < \alpha < 1)$ pour le paramètre p.

Q1 P est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ donc P est une matrice orthogonale.
Alors **P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.**

Q2 Soit U élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Posons $V = PU = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $v_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \times 1 = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}$.

Notons $<.,.>$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|.\|$ la norme associée.

$<U, PU> = \sum_{i=1}^{n} 1 \times v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}$.

$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\right| = |<U, PU>| \leqslant \|U\|\,\|PU\|$ d'après Cauchy-Schwarz.

$\|PU\|^2 = <PU, PU> = {}^t(PU)PU = {}^tU\,{}^tP P U = {}^tU I_n U = {}^tU U = \|U\|^2$ donc $\|PU\| = \|U\|$.

Alors $\|U\|\,\|PU\| = \|U\|^2 = \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n$.

Ainsi $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\right| \leqslant n$.

R.

Question 9 HEC 2012-9-S33 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit D une matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

Question de cours. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. Rappeler la signification de la relation : $v_n = \mathrm{o}(u_n)$.*

Montrer que si $v_n = \mathrm{o}(u_n)$ et si la série de terme général u_n est convergente, la série de terme général v_n l'est et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = \mathrm{o}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - 2M = D$.

Alors $MD = M(M^3-2M) = M^4 - 2M^2 = (M^3-2M)M = DM$. M et D commutent.

Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -a & 4b \\ -c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 4c & 4d \end{pmatrix}$; $\begin{cases} 4b = -b \\ -c = 4c \end{cases}$; $b = c = 0$.

Donc si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et si $M^3 - 2M = D$, M est diagonale. Cherchons donc les matrices diagonales solutions du problème. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Posons $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

$\Delta^3 - 2\Delta = D \iff \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & \beta^3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha^3 - 2\alpha = -1 \\ \beta^3 - 2\beta = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^3 - 2\alpha + 1 = 0 \\ \beta^3 - 2\beta - 4 = 0. \end{cases}$

α (resp. β) est un zéro de $P = X^3 - 2X + 1$ (resp. $Q = X^3 - 2X - 4$).

$P = (X-1)(X^2 + X - 1) = (X-1)\left[\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right] = (X-1)\left(X + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

$Q = (X-2)(X^2 + 2X + 2) = (X-2)\left((X+1)^2 + 1\right)$.

Les racines réelles de P sont : 1, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. 2 est la seule racine réelle de Q.

Ainsi $\Delta^3 - 2\Delta = D \iff \begin{cases} \alpha \in \left\{1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right\} \\ \beta = 2 \end{cases}$.

<u>L'équation $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $M^3 - 2M = D$ admet trois solutions :</u>

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

R.

Question 10 **HEC 2012-10-S34** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire défine sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Q1. a) Montrer que pour tout entier n strictement supérieur à $\lambda - 1$, on a : $P(X \geqslant n) \leqslant P(X = n)\,\dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

b) En déduire que $P(X \geqslant n) \underset{n \to +\infty}{\sim} P(X = n)$.

Q2. Montrer que $P(X > n) = \mathrm{o}\left(P(X = n)\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Question de cours. Donner deux conditions suffisantes de diagonalisibilité d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les deux cas, préciser les propriétés des sous-espaces propres .

Q1 a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n > \lambda - 1$.

$$P(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \times \frac{n!}{k!} = P(X=n) \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \frac{n!}{k!}.$$

Soit $k \in [\![n+1, +\infty [\![$, $\dfrac{n!}{k!} = \dfrac{1}{k(k-1)\cdots(n+1)} = \displaystyle\prod_{i=n+1}^{k} \frac{1}{i} \leqslant \prod_{i=n+1}^{k} \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k-n}$.

Notons que $\forall k \in [\![n+1, +\infty [\![$, $\dfrac{n!}{k!} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^{k-n}}$ et $\lambda^{k-n} \geqslant 0$.

Donc $\forall k \in [\![n+1, +\infty [\![$, $\lambda^{k-n} \dfrac{n!}{k!} \leqslant \left(\dfrac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n}$. Notons que ceci vaut encore pour $k=n$.

Alors $\forall k \in [\![n, +\infty [\![$, $\lambda^{k-n} \dfrac{n!}{k!} \leqslant \left(\dfrac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n}$. Or $0 \leqslant \dfrac{\lambda}{n+1} \overset{n > \lambda - 1}{<} 1$ donc la série de terme général $u_i = \left(\dfrac{\lambda}{n+1}\right)^i$ converge.

Ainsi $P(X \geqslant n) = P(X=n) \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \frac{n!}{k!} \overset{P(X=n) \geqslant 0}{\leqslant} P(X=n) \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n} = P(X=n) \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^i$.

$$P(X \geqslant n) \leqslant P(X=n) \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n+1}} = P(X=n) \frac{n+1}{n+1-\lambda}.$$

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N},\quad n > \lambda - 1 \Rightarrow \quad P(X \geqslant n) \leqslant P(X=n) \frac{n+1}{n+1-\lambda}.}$$

b) Posons $n_0 = \max(0, \mathrm{Ent}(\lambda))$. Alors $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_0 \geqslant \mathrm{Ent}(\lambda) > \lambda - 1$.

Soit $n \in [\![n_0, +\infty [\![$. $n \geqslant n_0$ donc $n > \lambda - 1$.

Ainsi $\quad P(X \geqslant n) \leqslant P(X=n) \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

De plus $\{X=n\} \subset \{X \geq n\}$. Alors par croissance de P : $P(X=n) \leq P(X \geq n)$.

Finalement : $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $P(X=n) \leq P(X \geq n) \leq P(X=n)\dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$ et $P(X=n)>0$.

Donc $\forall n \in [\![n_0,+\infty [\![$, $1 \leq \dfrac{P(X\geq n)}{P(X=n)} \leq \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$ Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n+1-\lambda} = 1$.

Alors, par encadrement, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P(X\geq n)}{P(X=n)} = 1$. Donc $P(X\geq n) \underset{n\to+\infty}{\sim} P(X=n)$.

(12) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P(X>n)}{P(X=n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P(X\geq n)-P(X=n)}{P(X=n)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{P(X\geq n)}{P(X=n)} - 1\right) = 0$

Ainsi $P(X>n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(P(X=n)\right)$.

R.

Question 11 **HEC 2012-11-S36** $\boxed{\textbf{F 1}}$

n appartient à $\mathbb{N}^*$ et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1. Établir l'existence d'un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q2. On suppose que la matrice A est inversible. Montrer que A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.

Question de cours. *Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.*

Q1 $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$ et $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2})$ est une famille de n^2+1 éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est donc liée.

$\exists (a_0, a_1, \ldots, a_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$, $(a_0, a_1, \ldots, a_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$. $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

<u>Il existe un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.</u>

Q2 Supposons que A est inversible. $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$

$\{k \in [\![0, n^2]\!] \mid a_k \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. Elle possède donc un plus petit élément que nous notons r (r est la valuation de P).

Alors $a_r \neq 0$ et $\displaystyle\sum_{k=r}^{n^2} a_k A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. En multipliant par $(A^{-1})^r$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=r}^{n^2} a_k A^{k-r} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ ("en clair" : $a_r I_n + a_{r+1} A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2-r} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$).

Si $r = n^2$: $a_{n^2} A^0 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Donc $a_{n^2} I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Alors $a_{n^2} = 0$. $a_r = 0$.

Ainsi $a_r = 0$. Ce qui n'est pas. Par conséquent $r < n^2$.

Alors $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = a_r I_n + \displaystyle\sum_{k=r+1}^{n^2} a_k A^{k-r} = a_r I_n + A\left(\sum_{k=r+1}^{n^2} a_k A^{k-r-1}\right)$.

Ainsi $A\left(\displaystyle\sum_{k=r+1}^{n^2}\left(-\frac{a_k}{a_r}\right) A^{k-r-1}\right) = I_n$. En multipliant à gauche par A^{-1}

on obtient : $A^{-1} = \displaystyle\sum_{k=r+1}^{n^2}\left(-\frac{a_k}{a_r}\right) A^{k-r-1}$

Par conséquent <u>A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.</u>

Question 12 HEC 2012-12-S39 $\boxed{\text{F 1}}$

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de poisson de paramètre λ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, $P(Y = 1) = P(Y = 2) = \dfrac{1}{2}\cdot$ On pose $Z = XY$.

Q1. Déterminer la loi de Z.

Q2. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

Question de cours. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Q1 $Z(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$. $(\{Y=1\},\{Y=2\})$ est un système complet d'événements.

$P(Z=k)=P(\{Y=1\}\cap\{Z=k\})+P(\{Y=2\}\cap\{Z=k\})$. d'après la formule des probabilités totales.

$P(Z=k)=P(\{Y=1\}\cap\{X=k\})+P(\{Y=2\}\cap\{X=\frac{k}{2}\})$. Ce qui donne par indépendance :

$P(Z=k)=P(Y=1)P(X=k)+P(Y=2)P(X=\frac{k}{2})=\frac{1}{2}\left[P(X=k)+P(X=\frac{k}{2})\right]$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ P(Z=k)=\frac{1}{2}\left[P(X=k)+P(X=\frac{k}{2})\right]$.

$P(X=\frac{2k+1}{2})=0$

Alors $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(Z=2k)=\frac{1}{2}\left[P(X=2k)+P(X=k)\right]$ et $P(Z=2k+1)=\frac{1}{2}P(X=2k+1)$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ P(Z=2k)=\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}+\frac{\lambda^k}{k!}\right]e^{-\lambda}$ et $P(Z=2k+1)=\frac{1}{2}\,\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\,e^{-\lambda}$.

Q2 Soit A l'événement Z prend une valeur paire. $A=\bigcup_{k=0}^{+\infty}\{Z=2k\}$

Par incompatibilité il vient $P(A)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z=2k)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left[P(X=2k)+P(X=k)\right]$.

$P(A)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=2k)+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)}_{=1}$ car ces deux séries convergent

$P(A)=\frac{e^{-\lambda}}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}+\frac{1}{2}$. Calculons $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$. $e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$ et $e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!}$.

$e^{\lambda}+e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k+(-\lambda)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^k}{k!}\lambda^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{2k}}{(2k)!}\lambda^{2k}=2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$.

$(1+(-1)^k=0$ si k est impair

Ainsi $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}=\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}$. Alors $P(A)=\frac{e^{-\lambda}}{2}\times\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+e^{-2\lambda}}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda}$

La probabilité pour que Z prenne des valeurs paires est $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda}$

Exercice... Calculer $E(Z)$ ... de deux manières différentes ...

R.

Question 13 HEC 2012-13-S40 $\boxed{\text{F 2}}$

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

Déterminer toutes les fonctions g continues et strictement monotones de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)$ telles que la variable aléatoire $Y = g(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

Question de cours. *Comparaison des séries à termes positifs.*

- **Analyse.** Soit g une application continue et strictement monotone de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

  1/ $I = g(]0,1[)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

  2/ g définit une bijection de $]0,1[$ sur I.

Supposons encore que $Y = g(X) = g \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Notons F_Y (resp. F_X) la fonction de répartition de Y (resp. X)

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[. \end{cases}$

$\forall x \in]0,1[,\quad F_Y(g(x)) = P(Y \leq g(x)) = P(g \circ X \leq g(x)).$

1er cas. g est strictement croissante sur $]0,1[$.

soit $x \in]0,1[$, $F_Y(g(x)) = P(g \circ X \leq g(x)) = P(X \leq x) = F_X(x) = x$ ($x \in]0,1[$)

de plus $F_Y(g(x)) = 0$ ou $1 - e^{-g(x)}$. Donc $x = 0$ ou $x = 1 - e^{-g(x)}$.

Or $x \in]0,1[$. Ainsi $x = 1 - e^{-g(x)}$. $e^{-g(x)} = 1 - x$; $-g(x) = \ln(1-x)$; $g(x) = -\ln(1-x)$.
$\qquad\qquad x \in]0,1[$

$\underline{\forall x \in]0,1[,\ g(x) = -\ln(1-x).}$

2ième cas. g est strictement décroissante sur $]0,1[$.

soit $x \in]0,1[$, $F_Y(g(x)) = P(g \circ X \leq g(x)) = P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leq x)$

Mais $F_Y(g(x)) = 1 - x$ car $x \in]0,1[$. Or $F_Y(g(x)) = 0$ ou $1 - e^{-g(x)}$.

comme $x \neq 1$: $1 - x = F_Y(g(x)) = 1 - e^{-g(x)}$; $x = e^{-g(x)}$; $\ln x = -g(x)$.

$\underline{\forall x \in]0,1[,\ g(x) = -\ln(x).}$

- **Synthèse.** Posons $\forall x \in]0,1[$, $g_1(x) = -\ln(1-x)$ et $g_2(x) = -\ln x$.

  Notons que g_1 et g_2 sont continues et strictement monotones

sur $]0,1[$ et que, $g_1 \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $g_2 \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Posons $Y_1 = g_1 \circ X$ et $Y_2 = g_2 \circ X$.

$u : x \to 1-x$ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$, $\forall x \in]0,1[$, $u(x) \in]0,1[$,

$-\ln$ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$.

Par composition g_1 est continue et strictement croissante sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$, $g_1(x) = -\ln(1-x) \in]0,+\infty[$. Alors $Y_1 = g_1 \circ X$ prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$.

Soit F_{Y_1} la fonction de répartition de Y_1. $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_{Y_1}(x) = 0$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

$F_{Y_1}(x) = P(g_1 \circ X \leq x) = P(-\ln(1-X) \leq x) = P(\ln(1-X) \geq -x) = P(1-X \geq e^{-x})$.

$$F_{Y_1}(x) = P(X \leq 1-e^{-x}) = 1-e^{-x} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1-e^{-x} \in]0,1[\text{ car } x \in]0,+\infty[\\ X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[). \end{array} \right.$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ou $F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x \in]0,+\infty[. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. g_1 est solution.

$\forall x \in]0,1[$, $g_2(x) = -\ln x$. g_2 est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$, $g_2(x) = -\ln x = -\ln(1-(1-x)) = g_1(1-x)$. $Y_2 = g_1(1-X)$.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$. Rappelons alors que $1-X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$. Mais alors, d'après ce qui précède (« $X \leftarrow 1-X$ » !), $g_1(1-X) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. g_2 est solution.

Les fonctions g continues et strictement monotones de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)$ telles que la variable aléatoire $Y = g(X)$ suit la loi exponentielle sont les fonctions g_1 et g_2 définies par $\forall x \in]0,1[$, $g_1(x) = -\ln(1-x)$ et $g_2(x) = -\ln x$.

R.

Question 14 **HEC 2012-14-S42** $\boxed{\textbf{F1}}$

α est un réel positif ou nul. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

Q1. Montrer que si $\alpha = 2$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

Q2. Montrer que si $0 \leqslant \alpha < 1$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Question de cours. Définition de la covariance et du coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y, prenant chacune au moins deux valeurs avec une probabilité strictement positive. Indiquer dans quels cas $\rho_{X,Y}$ vaut 1 ou -1

Q1 Ici $\alpha = 2$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln u_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln u_n = n \times \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)$. Posons $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = \ln(1+t^2)$.

f est continue sur $[0,1]$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = I$ où $I = \int_0^1 f(t)\,dt$.

Notons que f est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$. Ainsi $I > 0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right) = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)\right) = +\infty$.

$\lim_{n\to+\infty}(\ln u_n) = +\infty$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\ln u_n}\right) = +\infty$. $\underline{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Q2 Ici $0 \leqslant \alpha < 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right) \geqslant 1$.

Alors $0 \leqslant \ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right) \underset{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \ln x \leqslant x-1}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^2} \underset{\alpha \geqslant 0}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^\alpha}{n^2} = n \times \frac{n^\alpha}{n^2} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$.

De plus $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}} = 0$ car $1-\alpha > 0$. Donc par encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty}(\ln u_n) = 0$

Par continuité de la fonction exponentielle en 0 il vient $\lim_{n\to+\infty} e^{\ln u_n} = e^0$.

Ainsi $\underline{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

Exercice.. Étudier $\lim_{n\to+\infty} u_n$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Q.

Question 15 **HEC 2012-15** $\boxed{\text{F1}}$ **N. KARPIEL**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes une loi normale centrée réduite.

Soit θ un réel. On pose $Y_0 = X_0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \theta\, Y_{n-1} + X_n$.

Q1. Donner la loi de Y_n.

Q2. Calculer $\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n-k})$ pour $n > k > 0$.

Déjà vu en 2007.

Question de cours *Théorème de d'Alembert.*

Q1 $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k = \theta Y_{k-1} + X_k$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{Y_k}{\theta^k} - \dfrac{Y_{k-1}}{\theta^{k-1}} = \dfrac{X_k}{\theta^k}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{Y_n}{\theta^n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{Y_k}{\theta^k} - \frac{Y_{k-1}}{\theta^{k-1}}\right) + \frac{Y_0}{\theta^0} \underset{Y_0 = X_0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{\theta^k} + \frac{X_0}{\theta^0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{X_k}{\theta^k}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \theta^{n-k} X_k$. Notons que ceci vaut également pour $n = 0$ car $Y_0 = X_0$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \theta^{n-k} X_k$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\theta^{n-k} X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0, (\theta^{n-k})^2)$.

De plus $\theta^n X_0, \theta^{n-1} X_1, \dots, \theta^0 X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes car $X_0, X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Le théorème de stabilité sur les lois normales montre que Y_n suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\theta^{n-k})^2\right)^{1/2}$ ou $\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \theta^{2i}\right)^{1/2}$.

Q2 Ici $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ et $0 < k < n$. bilinéarité de la covariance.

$\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = \mathrm{cov}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \theta^{n-i} X_i, \sum_{j=0}^{n-k} \theta^{n-k-j} X_j\right) \overset{\downarrow}{=} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \theta^{n-i} \theta^{n-k-j} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$

Or $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} V(X_j) \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ (indépendance).

Alors $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

donc $\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = \sum_{j=0}^{n-k} \theta^{n-j}\,\theta^{n-k-j} = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-k}}_{\ell = n-k-j} \theta^{n-(n-k-\ell)}\,\theta^{\ell} = \theta^{k} \sum_{\ell=0}^{n-k} (\theta^2)^{\ell}$.

Si $\theta^2 \neq 1$ $\sum_{\ell=0}^{n-k} (\theta^2)^{\ell} = \dfrac{1-\theta^{2(n-k+1)}}{1-\theta^2}$ et $\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = \dfrac{\theta^{k} - \theta^{2n-k+2}}{1-\theta^2}$.

Si $\theta = 1$ $\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = 1 \times \sum_{\ell=0}^{n-k} 1 = n-k+1$

Si $\theta = -1$ $\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = (-1)^{k} \sum_{\ell=0}^{n-k} 1 = (n-k+1)(-1)^{k}$

$$\text{donc } \underline{\underline{\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n-k})}} = \begin{cases} \dfrac{\theta^{k} - \theta^{2n-k+2}}{1-\theta^2} & \text{si } \theta \neq 1 \text{ et } \theta \neq -1 \\ n-k+1 & \text{si } \theta = 1 \\ (n-k+1)(-1)^{k} & \text{si } \theta = -1 \end{cases}.$$

__Remarque__ : ceci vaut encore pour $k=0$ ... et pour $k=n$ ... et pour $(k,n)=(0,0)$.

R.

Question 16 **HEC 2012-16** $\boxed{\textbf{F1}}$ **T. PILEWICZ**

A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$.

Montrer que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$.

Une deuxième question non lue.

Question de cours *Définition et propriétés de la loi exponentielle.*

Posons $E = \mathbb{C}^2$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E = \mathbb{C}^2$ et f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$. Nous avons $f^5 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et nous devons montrer que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Si A est inversible, A^5 est inversible comme produit de cinq matrices inversibles ! ce qui n'est pas car $A^5 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$. Donc A n'est pas inversible. Alors f n'est pas bijectif. Comme $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\dim E < +\infty$, f n'est pas injectif. Il existe donc un vecteur non nul u appartenant à $\operatorname{Ker} f$. (u) est une famille libre de E que l'on peut compléter en une base $\mathcal{B}' = (u, v)$ de E. Posons $C = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$. $C^5 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$ et il s'agit de montrer que $C^2 = 0$. $f(u) = 0_E$ donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Alors $\operatorname{Sp} C \overset{*}{=} \{0, \beta\}$. Or X^5 est un polynôme annulateur de C dont 0 est la seule racine, $\operatorname{Sp} C \subset \{0\}$. Ainsi $\beta = 0$. $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $\underline{\underline{A^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}}}$.

* C est triangulaire supérieure.

<u>Remarque</u>.. Le résultat vaut encore si l'on remplace $A^5 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$ par A est nilpotente autrement dit par : $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $A^r = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$.

R.

Question 17 **HEC 2012-17** **F1** **M. ARNOLD**

f et g sont deux endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

Q1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.

Q2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$.

Question de cours *Définition et propriétés de la loi Poisson.*

Q1 Lemme.. Soient u et v deux endomorphismes de E.
$\mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}\, u$

▲ Preuve du lemme. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, v$. $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$.

$\forall x \in \mathrm{Ker}\, v$, $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$. $\mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)$.

$v(E) \subset E$ donc $u(v(E)) \subset u(E)$. $\mathrm{Im}(u \circ v) = (u \circ v)(E) = u(v(E)) \subset u(E) = \mathrm{Im}\, u$.

Ainsi $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}\, u$. ▼

D'après le lemme : $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.

$f \circ g = \mathrm{Id}_E$ donc $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

Alors $\mathrm{Ker}(g \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f \circ (g \circ f)) = \mathrm{Ker}(f \circ g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$

et $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}(g \circ f \circ g) = \mathrm{Im}((g \circ f) \circ g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$ ... en appliquant le lemme.

Ainsi $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(g \circ f) \subset \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$.

donc $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.

Q2 Version 1. Posons $h = g \circ f$.

• h est un endomorphisme de E comme composé de deux endomorphismes de E

• $h \circ h = (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ \mathrm{Id}_E \circ f = g \circ f = h$; $h^2 = h$.

Ainsi h est un projecteur de E.

Alors $E = \mathrm{Ker}(h) \oplus \mathrm{Im}\, h = \mathrm{Ker}(g \circ f) \oplus \mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$.

$E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$.

Version 2. Soit $x \in E$. Montrer par analyse-synthèse que :

$$\exists!(y,z) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} g,\ x = y+z.$$

- Analyse / Unicité.

Supposons que $x = y+z$ avec $y \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Im} g$.

$f(x) = f(y) + f(z) = f(z)$;

$\exists t \in E$, $z = g(t)$ car $z \in \operatorname{Im} g$ donc $f(x) = f(z) = f(g(t)) = (f \circ g)(t) \overset{f\circ g = Id_E}{=} t$. $t = f(x)$.

Alors $z = g(t) = g(f(x))$ et $y = x - z = x - g(f(x))$.

$y = x - g(f(x))$ et $z = g(f(x))$. D'où l'unicité.

- Synthèse / Existence.

Posons $y = x - g(f(x))$ et $z = g(f(x))$.

→ $y + z = x - g(f(x)) + g(f(x)) = x$. $x = y+z$.

→ $f(y) = f(x) - f(g(f(x))) = f(x) - (f\circ g)(f(x)) \overset{f\circ g = Id_E}{=} f(x) - f(x) = 0_E$; $y \in \operatorname{Ker} f$.

→ $z = g(f(x))$ donc $z \in \operatorname{Im} g$.

d'où l'existence.

Ainsi $\forall x \in E$, $\exists!(y,z) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Im} g$, $x = y+z$.

Alors $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Exercice

1.. Que dire de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} g$?

2.. Que dire si E est de dimension finie.

3.. Proposer un exemple où l'on aurait $f \circ g = Id_E$ sans avoir $g \circ f = Id_E$.

k.

Question 18 **HEC 2012-18** $\boxed{\text{F2}}$ Obtenue par un élève.

E est un espace euclidien de dimension n. On note $< .,. >$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée. Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ < x,y >= 0 \Rightarrow < f(x), f(y) >= 0.$$

Montrer qu'il existe k dans $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout x dans E, $\|f(x)\| = k\,\|x\|$.

Déja vu en 2007 à HEC

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(e_i), f(e_j)\rangle = 0$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle e_i + e_j, e_i - e_j\rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1 - 1 = 0$.

Alors $\|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2 = \langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j)\rangle = \langle f(e_i+e_j), f(e_i - e_j)\rangle = 0$

donc $\|f(e_i)\|^2 = \|f(e_j)\|^2$. Par conséquent $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

$\exists k \in \mathbb{R}^+,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \|f(e_i)\| = k$. Soit x un élément de E. Montrons que $\|f(x)\| = k\|x\|$

$\exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ car $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i f(e_i), \sum_{j=1}^n x_j f(e_j)\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \langle f(e_i), f(e_j)\rangle$

$\|f(x)\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \langle f(e_i), f(e_j)\rangle = 0 \text{ si } j \neq i}}{=} \sum_{i=1}^n x_i^2 \langle f(e_i), f(e_i)\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \|f(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \times k^2 = k^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = k^2\|x\|^2$.

$\|f(x)\|^2 = (k\|x\|)^2$ et, $\|f(x)\| \geqslant 0$ et $k\|x\| \geqslant 0$. Alors $\|f(x)\| = k\|x\|$.

$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = k\|x\|$.

2.

Question 19 **HEC 2012-19** $\boxed{\mathbf{F1}}$ Obtenue par un élève.

a, b, c sont trois réels tels que $a^2+b^2+c^2=1$. $U=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Q1. Calculer $M=U{}^tU$.

Q2. M est-t-elle diagonalisable, inversible ?

Q3. Calculer M^n pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Q4. Trouver les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres de M.

Q1 $M=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}(a\ b\ c)=\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ba&b^2&bc\\ca&cb&c^2\end{pmatrix}$.

Q2 • ${}^tM={}^t(U{}^tU)={}^t({}^tU)\,{}^tU=U{}^tU=M$.

M est une matrice symétrique de $M_3(\mathbb{R})$ donc <u>M est diagonalisable.</u>

• $\mathrm{rg}\, M=\dim \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}a^2\\ba\\ca\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ab\\b^2\\cb\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ac\\bc\\c^2\end{pmatrix}\right)=\dim \mathrm{Vect}(aU,bU,cU)=\dim\mathrm{Vect}(U)=1$.

$(a,b,c)\neq(0,0,0)$ car $a^2+b^2+c^2=1$; $U\neq 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}$

$\mathrm{rg}\, M=1$ et $M\in M_3(\mathbb{R})$ donc <u>M n'est pas inversible.</u>

Q3 $M^2=U{}^tUU{}^tU=U{}^tU=M$. Une récurrence simple donne <u>$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $M^n=M$.</u>

${}^tUU=\|U\|^2=a^2+b^2+c^2=1$

Q4 $\mathrm{rg}\, M=1$ et $M\in M_3(\mathbb{R})$ donc <u>$0\in \mathrm{Sp}\, M$ et $\dim \mathrm{SEP}(M,0)=2$.</u>

$U\neq 0_{M_{3,1}}$ et $MU=U{}^tUU=U$. Alors $1\in\mathrm{Sp}\, M$ et $\mathrm{Vect}(U)\subset \mathrm{SEP}(M,1)$.

${}^tUU=1$ cf Q3 !

$\{0,1\}\subset \mathrm{Sp}\, M$, $\dim\mathrm{SEP}(M,0)=2$ et $\dim \mathrm{SEP}(M,1)\geqslant 1$. La somme des dimensions des sous-espaces propres de M étant inférieure ou égale à 3 on peut dire que : $\mathrm{Sp}\, M=\{0,1\}$ et $\dim\mathrm{SEP}(M,1)=1$. Notons alors que $\mathrm{SEP}(M,1)=\mathrm{Vect}(U)$.

$\mathrm{SEP}(M,0)$ et $\mathrm{SEP}(M,1)$ sont supplémentaires dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$ et ils sont orthogonaux car M est une matrice symétrique de $M_{3}(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathrm{SEP}(M,0)=(\mathrm{Vect}(U))^{\perp}$.

<u>$\mathrm{Sp}\, M=\{0,1\}$, $\mathrm{SEP}(M,0)=(\mathrm{Vect}(U))^{\perp}$ et $\mathrm{SEP}(M,1)=\mathrm{Vect}(U)$.</u>

<u>Remarque</u>... On aurait pu pour traiter Q4 exploiter le fait que M est la matrice d'une projection et même d'une projection orthogonale...

R.

Question 20 **HEC 2012-20** $\boxed{\textbf{F1}}$ Obtenu par un élève.

$A=(a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j\Rightarrow a_{i,j}=1$ et $\forall i\in[\![1,n]\!],\ a_{i,i}>1$.

Montrer que A est matrice définie positive, c'est à dire que A est symétrique réelle telle que pour tout élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX>0$.

Déja vu en 2011 à l'ESCP

Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Si $i\neq j$: $a_{i,j}=1=a_{j,i}$. Si $i=j$, $a_{i,j}=a_{i,i}=a_{j,i}$.

$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}=a_{j,i}$. A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}$ un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Posons $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots\\y_n\end{pmatrix}=AX$. $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $y_i=\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$.

$${}^tXAX={}^tXY=\langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_ix_j=\sum_{i=1}^n\Big[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n x_ix_j+a_{ii}x_i^2\Big]$$

$${}^tXAX=\sum_{i=1}^n\Big[\sum_{j=1}^n x_ix_j-x_i^2+a_{ii}x_i^2\Big]=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j+\sum_{i=1}^n(a_{ii}-1)x_i^2.$$

$${}^tXAX=\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^n x_j\Big)+\sum_{i=1}^n(a_{ii}-1)x_i^2=\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2+\sum_{i=1}^n(a_{ii}-1)x_i^2\geqslant\sum_{i=1}^n(a_{ii}-1)x_i^2.$$

$${}^tXAX\geqslant\sum_{i=1}^n(a_{i,i}-1)x_i^2.$$

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $(a_{ii}-1)x_i^2\geqslant 0$ et $\exists i_0\in[\![1,n]\!]$, $x_{i_0}\neq 0$ car $X\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\uparrow$ $a_{ii}>1$ et $x_i^2\geqslant 0$

Donc ${}^tXAX\geqslant(a_{i_0,i_0}-1)x_{i_0}^2>0$

$\uparrow$ $a_{i_0,i_0}>1$ et $x_{i_0}^2>0$.

$\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\Rightarrow {}^tXAX>0$.

R.

Question 21 **HEC 2012-21** $\boxed{\text{F1}}$ Obtenu par un élève.

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. f et g sont deux endomorphismes de E.

Montre que $\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$

Posons $\forall x \in f(E)$, $u(x) = g(x)$. $g \in \mathcal{L}(E)$ donc u est une application linéaire de $f(E)$ dans E.

$\operatorname{Im} u = u(f(E)) = g(f(E))$. Ainsi $\operatorname{rg} u = \dim g(f(E)) = \dim (g \circ f)(E) = \operatorname{rg}(g \circ f)$.

Le théorème du rang appliqué à u donne :

$\dim f(E) = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(g \circ f)$.

Alors $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(g \circ f)$.

Or $\operatorname{Ker} u = f(E) \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} g$; $\dim \operatorname{Ker} u \leqslant \dim \operatorname{Ker} g$

Ainsi $\operatorname{rg} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rg}(g \circ f)$.

Alors $n - \dim \operatorname{Ker} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} g + n - \dim \operatorname{Ker}(g \circ f)$ car $n = \dim E$.

Ce qui donne : $\underline{\underline{\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g}}$.

Exercice.. Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - n \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{Min}(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$.

R.

Question 22 **HEC 2012-22** $\boxed{\textbf{F1}^{*}}$ Obtenu par un élève.

f est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$ et telle que $f(0)=f(1)$.

Montre qu'il existe un réel x appartenant à $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ tel que $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)$.

Plus une question oubliée.

Et si on disait que la question oubliée était : généralisez ! Alors montrons que si $n \in [\![2,+\infty[\![$, $\exists x_n \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, $f(x_n+\frac{1}{n}) = f(x_n)$ et n'en parlons plus !

Posons $\forall x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, $g(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$ et supposons que g ne s'annule pas sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$.

f est continue sur $[0,1]$ donc g est continue sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$. Comme g ne s'annule pas sur cet intervalle, g garde un signe constant sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$.

Quitte à changer f en $-f$ supposons que g est strictement positive sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$.

Alors $\forall x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, $g(x) > 0$. $\forall x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, $f(x+\frac{1}{n}) - f(x) > 0$.

Ainsi $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}) - f(\frac{k}{n}) > 0$.

Alors $0 < \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}) - f(\frac{k}{n})\right) = f(\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}) - f(\frac{0}{n}) = f(1) - f(0) = 0$!!

donc g s'annule sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$. $\exists x_n \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, $g(x_n) = 0$

Par conséquent : $\exists x_n \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, $f(x_n+\frac{1}{n}) = f(x_n)$ et ceci pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$

En particulier $\exists x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$, $f(x_2+\frac{1}{2}) = f(x_2)$.