R.

Question 1 HEC 2011

n appartient à $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

Q1. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}_n[X]$ et un seul tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.

Q2. Décomposer P_n comme un produit de polynômes de degré 1 lorsque $n \geqslant 1$.

Cours *Énoncer le théorème de l'espérance totale.*

Q1 Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) = z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}} + z^n + \frac{1}{z^n}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$.

Ceci suggère une preuve par récurrence au moins pour l'existence.

Montrons par récurrence "d'ordre 2" que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ il existe un élément P_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^n + \frac{1}{z^n} = P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

* • Posons $P_0 = 2$. $P_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ et $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_0\left(z+\frac{1}{z}\right) = 2 = z^0 + \frac{1}{z^0}$.

• Posons $P_1 = X$. $P_1 \in \mathbb{R}_1[X]$ et $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_1\left(z+\frac{1}{z}\right) = z + \frac{1}{z}$.

Ainsi la propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$

* Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$ avec n dans $\mathbb{N}$.

$\exists P_n \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X],\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^n+\frac{1}{z^n} = P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)$ et $z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}} = P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

Alors $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n+\frac{1}{z^n}\right) = \left(z+\frac{1}{z}\right)P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) - P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

<u>Posons</u> $P_{n+2} = X P_{n+1} + P_n$.

Alors $P_{n+2} \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ car $P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) - P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = P_{n+2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$.

Montrons l'unicité de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un second élément Q_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ Q_n(z+\frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.

Alors $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ (P_n - Q_n)(z+\frac{1}{z}) = P_n(z+\frac{1}{z}) - Q_n(z+\frac{1}{z}) = 0$.

En particulier $\forall x \in [1, +\infty[,\ (P_n - Q_n)(x+\frac{1}{x}) = 0$.

Posons $\forall x \in [1,+\infty[,\ \varphi(x) = x + \frac{1}{x}$. φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et

$\forall x \in [1,+\infty[,\ \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$. $\varphi'(1) = 0$ et $\forall x \in]1,+\infty[,\ \varphi'(x) > 0$. Alors:

φ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

φ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, φ est continue sur $[1,+\infty[$, $\varphi(1) = 2$ et

$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Alors φ définit une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[2,+\infty[$.

Ainsi $\varphi([1,+\infty[) = [2,+\infty[$.

$\forall x \in [1,+\infty[,\ (P_n - Q_n)(\varphi(x)) = (P_n - Q_n)(x + \frac{1}{x}) = 0$.

Alors $\forall y \in [2,+\infty[,\ (P_n - Q_n)(y) = 0$.

$P_n - Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines.

Alors $P_n - Q_n$ est le polynôme nul. $Q_n = P_n$.

Donc $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists!\ P_n \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n(z+\frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}}}$.

Q2 Pour tout n dans $\mathbb{N}$ notons α_n le coefficient de X^n dans P_n

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

le coefficient de X^{n+2} dans P_{n+2} est α_{n+2}

" " " " XP_{n+1} est α_{n+1}

" " " " P_n est 0

Alors $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$. Donc la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ est constante.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_n=\alpha_1$ et $\alpha_1=1$ car $P_1=X$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_n=1$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, le coefficient de X^n dans P_n est 1.

Ainsi pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, P_n est unitaire et de degré n.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $\theta\in[0,\pi]$.

$P_n(2\cos\theta)=P_n(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=P_n\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)=(e^{i\theta})^n+\frac{1}{(e^{i\theta})^n}=e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$.

$P_n(2\cos\theta)=0 \Leftrightarrow 2\cos n\theta=0 \Leftrightarrow \cos(n\theta)=0 \Leftrightarrow n\theta\equiv\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, n\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

$$P_n(2\cos\theta)=0 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta=\frac{\pi+2k\pi}{2n} \underset{\theta\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} \exists k\in[\![0,n-1]\!],\ \theta=\frac{\pi+2k\pi}{2n}.$$

Posons $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $\theta_k=\frac{\pi+2k\pi}{2n}$ et $x_k=2\cos\theta_k$.

Alors $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $P_n(x_k)=P_n(2\cos\theta_k)=0$.

$0<\theta_0<\theta_1<\dots<\theta_{n-1}<\pi$ et $\cos$ est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

Alors $2\cos\theta_0>\cos\theta_1>\dots>\cos\theta_{n-1}$ donc $x_0>x_1>\dots>x_{n-1}$. $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$ sont donc

n zéros distincts de P_n.

Comme $\deg P_n=n$, $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$ sont LES zéros de P_n.

$\prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)$ divise P_n et ces deux polynômes sont de degré n.

Alors $\exists\lambda\in\mathbb{R}^*$, $P_n=\lambda\prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)$. Comme P_n est unitaire : $P_n=\prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)$

Ainsi $P_n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-2\cos\left(\frac{\pi}{2n}+k\frac{\pi}{n}\right)\right)$ et ceci pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$.

Remarque : $P_1=X$, $P_2=X^2-2=(X-\sqrt2)(X+\sqrt2)$, $P_3=X^3-3X=X(X-\sqrt3)(X+\sqrt3)$,

$P_4=X^4-4X^2+2=(X-2\cos\frac{\pi}{8})(X+2\cos\frac{\pi}{8})(X-2\cos\frac{3\pi}{8})(X+2\cos\frac{3\pi}{8})$.

$P_4=X^4-4X^2+2=(X-\sqrt{2+\sqrt2})(X+\sqrt{2+\sqrt2})(X-\sqrt{2-\sqrt2})(X+\sqrt{2-\sqrt2})$.

R.

Question 2 **HEC 2011**

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ i.i.d..

On suppose que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la variable alétoire X_k suit une loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

On pose $Y_n = \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Étudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Cours *Théorème de d'Alembert-Gauss*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n.

Y_n prend ses valeurs dans $[0,1]$. Ainsi $\forall x\in\,]-\infty,0[$, $F_{Y_n}(x)=0$ et

$\forall x\in[1,+\infty[$, $F_{Y_n}(x)=1$.

Soit $x\in[0,1[$, $F_{Y_n}(x)=P(Y_n\leq x)=P(\text{Max}(X_1,X_2,\dots,X_n)\leq x)$.

$$F_{Y_n}(x)=P(\{X_1\leq x\}\cap\{X_2\leq x\}\cap\dots\cap\{X_n\leq x\}) \underset{\uparrow}{=} P(X_1\leq x)\,P(X_2\leq x)\dots P(X_n\leq x).$$

$X_1,X_2,\dots,X_n$ sont indépendantes

Or $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $P(X_k\leq x)=x$ car $x\in[0,1[$ et X_k suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Donc $F_{Y_n}(x)=x^n$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_{Y_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ x^n & \text{si } x\in[0,1[\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}\qquad \text{et ceci pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

$$\text{Alors }\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ 0 & \text{si } x\in[0,1[\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$$

$$\text{Donc }\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,1[\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}.$$

Soit Y la variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ constante égale à 1. Soit F_Y sa fonction répartition. $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_Y(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,1[\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$.

Si $x\in\mathbb{R}$, F_Y est continue en x si et seulement si $x\neq1$.

De plus $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $\lim_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=F_Y(x)$.

Alors <u>$(Y_n)_{n\geq1}$ converge en loi vers Y c'est à dire vers la variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ constante et égale à 1.</u>

R.

Question 3 HEC 2011 S 1155

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.

On suppose que l'espérance $\theta = E(X_1)$ est non nulle et inconnue.

Trouver l'estimateur sans biais de l'espérance $\theta = E(X_1)$, qui soit de variance minimale dans l'ensemble des estimateurs de la forme $\tilde{\theta_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad ((a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n)$.

Cours *Rappel de la définition d'un espace vectoriel euclidien*

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons $T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E(X_i)$ existe et vaut θ.

Alors $E(T_n)$ existe et vaut $\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$ donc $(\sum_{i=1}^{n} a_i)\theta$

Alors T_n est un estimateur sans biais de θ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ car $\theta \neq 0$

Posons $\sigma^2 = V(X_1)$ ($V(X_1)$ existe car X_1 possède un moment d'ordre 2.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et possèdent une variance.

Alors $V(T_n)$ existe et $V(T_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

__1^er cas__ $\sigma^2 = 0$. $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $V(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = 0$!

Notons $\mathcal{S} = \{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \; ; (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$.

__Les estimateurs sans biais, de variance minimale, qui appartiennent sont les éléments $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ de $\mathcal{S}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.__

__2^e cas__ $\sigma^2 \neq 0$

Le problème revient à trouver $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

1) $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$

2) $(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)\sigma^2$ soit minimal ce qui revient à $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ minimal.

On doit donc étudier $\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\ \text{sc} \; \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \end{cases}$

2.

* Posons $\forall (a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $f(a_1,a_2,\dots,a_n)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

Posons $\forall (a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $g(a_1,a_2,\dots,a_n)=\sum_{i=1}^{n} a_i$. g est une forme linéaire

sur $\mathbb{R}^n$.

Posons $\mathcal{C}=\{A\in\mathbb{R}^n ; g(A)=1\}$.

Il s'agit donc de trouver le minimum de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Posons $\mathcal{H}=\operatorname{Ker} g$. $\mathcal{H}^{\perp}=\operatorname{Vect}(\nabla g(x))=\operatorname{Vect}((1,1,\dots,1))$.

x quelconque dans $\mathbb{R}^n$

* Soit $B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$\sum_{i=1}^{n} b_i=1$ et $\nabla f(B)\in\mathcal{H}^{\perp}=\operatorname{Vect}(1,1,\dots,1)$. $\nabla f(B)=(2b_1,2b_2,\dots,2b_n)$.

Alors $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $(2b_1,2b_2,\dots,2b_n)=\nabla f(B)=\lambda(1,1,\dots,1)$.

Donc $2b_1=2b_2=\dots=2b_n=\lambda$. $b_1=b_2=\dots=b_n$.

Alors $nb_1=\sum_{i=1}^{n} b_i=1$. $b_1=\frac{1}{n}$. Ainsi $B=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right)$.

* Posons $B=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right)$.

clairement $\underline{B\in\mathcal{C}}$. Soit $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathcal{C}$.

$1^2=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n} 1\times a_i\right)^2\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq}\left(\sum_{i=1}^{n}1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)=n\,f(A)$.

Alors $f(A)\geq\frac{1}{n}$.

mieux $f(A)\geq f(B)$.

Alors $\underline{\forall A\in\mathcal{C},\ f(A)\geq f(B)}$.

f atteint un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$B=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right)$ est l'unique point de $\mathcal{C}$ qui réalise ce minimum.

Alors $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i$ est l'unique estimateur sans biais de variance

minimal parmi les estimateurs sans biais de θ du type $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$.

lorsque $\sigma^2 = V(X_1) \neq 0$.

Question 4 HEC 2011

E est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Φ est l'endomorphisme de E qui à tout éléments $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$.

Q1. Déterminer les noyaux de Φ, $\Phi\circ\Phi$ et Φ^k pour $k\in [\![3,+\infty[\![$?

Q2. Quelle l'image de Φ.

Cours *Définition d'un estimateur sans biais et convergent d'un paramètre réel inconnu.*

Q1 * Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ un élément de E.

$(u_n)_{n\geq 0}\in \operatorname{Ker}\phi \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=0 \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n$.

$(u_n)_{n\geq 0}\in \operatorname{Ker}\phi \iff (u_n)_{n\geq 0}$ est constante.

<u>$\operatorname{Ker}\phi$ est le sous-espace vectoriel constitué par les suites constantes de E.</u>

<u>$\operatorname{Ker}\phi$ est encore la droite vectorielle engendrée par la suite constante égale à 1.</u>

<u>Remarque</u> : $\operatorname{Ker}\phi = \{(P(n))_{n\geq 0}\ ;\ P\in\mathbb{R}_0[X]\}$.

* Soit $(u_n)_{n\geq 0}\in E$. $\phi((u_n)_{n\geq 0}) = (u_{n+1}-u_n)_{n\geq 0}$

$\phi^2((u_n)_{n\geq 0}) = \phi((u_{n+1}-u_n)_{n\geq 0}) = \big((u_{n+2}-u_{n+1})-(u_{n+1}-u_n)\big)_{n\geq 0} = (u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n)_{n\geq 0}$.

$(u_n)_{n\geq 0}\in\operatorname{Ker}\phi^2 \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=0$.

L'équation $x\in\mathbb{C}$ et $x^2-2x+1=0$ admet une solution et une seule 1.

Le cours indique alors que : $(u_n)_{n\geq 0}\in\operatorname{Ker}\phi^2 \iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha+\beta n$.

<u>$\operatorname{Ker}\phi^2 = \{(u_n)_{n\geq 0}\in E \mid \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha+\beta n\}$.</u>

<u>$\operatorname{Ker}\phi^2 = \operatorname{Vect}\big((1)_{n\geq 0}, (n)_{n\geq 0}\big)$.</u>

<u>Remarque</u> : $\operatorname{Ker}\phi^2 = \{(P(n))_{n\geq 0}\ ;\ P\in\mathbb{R}_1[X]\}$.

* Montrons par récurrence que pour tout $\ell \in [\![1,+\infty[\![$, $\operatorname{Ke}\phi^{\ell} = \{(P(n))_{n\geq 0} ; P\in\mathbb{R}_{\ell-1}[X]\}$

→ la propriété est vraie pour $\ell=1$ (et 2 !) d'après ce qui précède.

→ Supposons la propriété vraie pour ℓ dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $\ell+1$.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ un élément de E.

$(u_n)_{n\geq 0} \in \operatorname{Ke}\phi^{\ell+1}$

$\Updownarrow$ $\phi^{\ell+1}((u_n)_{n\geq 0}) = 0_E$

$\Updownarrow$ $\phi^{\ell}(\phi((u_n)_{n\geq 0})) = 0_E$

$\Updownarrow$ $\phi((u_n)_{n\geq 0}) \in \operatorname{Ke}\phi^{\ell}$

$\Updownarrow$ $\exists \varphi\in\mathbb{R}_{\ell-1}[X],\ \phi((u_n)_{n\geq 0}) = (\varphi(n))_{n\geq 0}$

$\Updownarrow$ $\exists \varphi\in\mathbb{R}_{\ell-1}[X],\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n = \varphi(n)$.

Lemme.. $\forall \varphi\in\mathbb{R}_{\ell-1}[X],\ \exists P\in\mathbb{R}_{\ell}[X],\ P(X+1)-P(X) = \varphi(X)$.

▲ Preuve du lemme. Posons $\forall U\in\mathbb{R}[X],\ \Delta U = U(X+1)-U(X)$.

. Δ est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $(U,V)\in\mathbb{R}[X]$.

$\Delta(\lambda U+V) = (\lambda U+V)(X+1)-(\lambda U+V)(X) = \lambda U(X+1)+V(X+1)-\lambda U(X)-V(X)$.

$\Delta(\lambda U+V) = \lambda(U(X+1)-U(X)) + V(X+1)-V(X) = \lambda\Delta U+\Delta V$.

Δ est linéaire.

Alors Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

$\Delta 1 = 0$

$\Delta(\mathbb{R}_\ell[X]) = \Delta(\operatorname{Vect}(1,X,\dots,X^\ell)) = \operatorname{Vect}(\Delta 1,\Delta X,\dots,\Delta X^\ell) = \operatorname{Vect}(\Delta X,\Delta X^2,\dots,\Delta X^\ell)$.

$\forall i\in[\![1,\ell]\!],\ \Delta X^i = (X+1)^i - X^i = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}X^j - X^i = \sum_{j=0}^{i-1}\binom{i}{j}X^j$.

Alors $\forall i\in[\![1,\ell]\!]$, $\deg \Delta X^i = i-1$.

R

Alors $(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^k)$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de cardinal k de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ qui est de dimension k.

$(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^k)$ est donc une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Alors $\Delta \mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^k) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Alors $\forall Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X], \exists P \in \mathbb{R}_k[X], \Delta P = Q$. Ou encore :

$\forall Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X], \exists P \in \mathbb{R}_k[X], P(X+1) - P(X) = Q$. Ceci achève la preuve du lemme. ▲

$(u_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{Ke}\, \phi^{k+1}$

$\Updownarrow$ $\exists Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = Q(n)$ $\quad$ lemme $\quad$ si $P \in \mathbb{R}_k[X]$, $P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$

$\Updownarrow$ $\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = P(n+1) - P(n)$

$\Updownarrow$ $\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1} - P(n+1)) - (u_n - P(n)) = 0$

$\Updownarrow$ $\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \phi((u_n - P(n))_{n\geq 0}) = 0_E$

$\Updownarrow$ $\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n - P(n) = \lambda$.

$\Updownarrow$ $\exists P \in \mathbb{R}_k[X], \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = P(n) + \lambda = (P + \lambda)(n)$

$\Updownarrow$ $\exists \hat{P} \in \mathbb{R}_k[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \hat{P}(n)$

Ainsi $\mathrm{Ke}\, \phi^{k+1} = \{\hat{P}(n) ; \hat{P} \in \mathbb{R}_k[X]\}$ ce qui achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Ke}\, \phi^k = \{\hat{P}(n) ; P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]\}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Ke}\, \phi^k = \{(u_n)_{n\geq 0} \in E \mid \exists (a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_0 + a_1 n + \dots + a_{k-1} n^{k-1}\}$

Exercice.. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $((1)_{n\geq 0}, (n)_{n\geq 0}, \dots, (n^{k-1})_{n\geq 0})$ est une base de $\mathrm{Ke}\, \phi^k$.

R.

(Q2) <u>Une petite analyse.</u> Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ un élément de E.

Supposons que $(v_n)_{n\geq 0}$ appartient à $\mathrm{Im}\,\phi$. Alors $\exists (u_n)_{n\geq 0}\in E$, $\phi((u_n)_{n\geq 0})=(v_n)_{n\geq 0}$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=v_n$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(u_n-u_0)+u_0=\sum_{\ell=0}^{n-1}(u_{\ell+1}-u_\ell)+u_0=\sum_{\ell=0}^{n-1}v_\ell+u_0$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sum_{\ell=0}^{n-1}v_\ell+u_0$.

Plus trop de doute il semble bien que tout élément de E possède au moins un antécédent par ϕ donc que $\mathrm{Im}\,\phi=E$. Notons le.

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ un élément de E. Posons $u_0=0$ (ou c avec $c\in\mathbb{R}$!) et

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\sum_{\ell=0}^{n-1}v_\ell$ (ou $\sum_{\ell=0}^{n-1}v_\ell+c$ ...).

1) $(u_n)_{n\geq 0}\in E$.

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n=\sum_{\ell=0}^{n}v_\ell-\sum_{\ell=0}^{n-1}v_\ell=v_n$.

$u_1-u_0=\sum_{\ell=0}^{1-1}v_\ell-0=v_0$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=v_n$. $\phi((u_n)_{n\geq 0})=(v_n)_{n\geq 0}$.

Ainsi $\forall (v_n)_{n\geq 0}\in E$, $\exists (u_n)_{n\geq 0}\in E$, $\phi((u_n)_{n\geq 0})=(v_n)_{n\geq 0}$.

<u>ϕ est surjective et $\mathrm{Im}\,\phi=E$.</u>

R.

Question 5 HEC 2011 S 1163

Un joueur effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce qui donne Pile avec la probabilité p et face avec la probabilité $q = 1 - p$, $p \in]0, 1[$.

On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit la variable aléatoire N égale au rang d'apparition du premier Pile s'il existe et égale à 0 si Pile n'apparaît jamais

On définit une variable aléatoire X de la façon suivante :

Si N prend la valeur 0, X prend la valeur 0.

Si n appartient à $\mathbb{N}^*$ et si N prend la valeur n, le joueur dispose dans une urne n boules numérotées de 1 à n ; il tire une boule de cette urne et X prend la valeur de la boule tirée.

Q1. Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $P(X = k)$ sous forme de somme.

Q2. Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \dfrac{p}{q} \lim\limits_{M \to +\infty} \displaystyle\int_0^q \sum_{n=k}^{M} t^{n-1}\, dt$.

Q3 Étudier la limite de $\displaystyle\int_0^q \frac{t^M}{1-t}\, dt$ lorsque M tend vers $+\infty$. Déterminer $P(X = 1)$.

Cours *Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ ($n \geqslant 2$). Donner un exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.*

Pour tout i dans $\mathbb{N}^*$ notons P_i (resp. F_i) l'évènement le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile (resp. face).

$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $P(N=n) = P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n) \underset{\uparrow}{=} P(F_1)P(F_2)\dots P(F_{n-1})P(P_n) = q^{n-1}p$.

indépendance des lancers.

$P(N=1) = P(P_1) = p = q^{1-1}p$.

Alors $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(N=n) = q^{n-1}p = p\,q^{n-1}}}$.

Calculons $P(N=0)$.

incompatibilité

V1 $\quad P(N=0) = 1 - P(N \neq 0) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{N=n\}\right) \overset{\downarrow}{=} 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p\,q^{n-1}$

$P(N=0) = 1 - p\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = 1 - p\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 - p \times \frac{1}{1-q} = 1 - \frac{p}{p} = 1 - 1 = 0$.

V2 $\quad$ posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$.

$\{N=0\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} S_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} \subset S_n$.

Le théorème de la limite monotone montre alors que $P(N=0) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} S_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(S_n)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n) = P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) = P(F_1)P(F_2)\dots P(F_n) = q^n$.

Donc $P(N=0) = \lim P(S_n) = \lim q^n \underset{\substack{\uparrow \\ |q|<1}}{=} 0$. $P(N=0)=0$.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N},\ P(N=n) = \begin{cases} pq^{n-1} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } n=0 \end{cases}$.

(Q1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $(\{N=n\})_{n\geq 0}$ est un système complet d'événements.

$$P(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{X=k\} \cap \{N=n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{X=k\} \cap \{N=n\})$$

$\{X=k\} \cap \{N=0\} = \emptyset$ car $k \in \mathbb{N}^*$

$$P(X=k) \underset{\substack{\uparrow \\ P(N=n)\neq 0 \text{ si } n\geq 1}}{=} \sum_{n}^{+\infty} \underbrace{P_{(N=n)}(X=k)}_{\begin{cases} 1/n & \text{si } k\leq n \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}} P(N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} p q^{n-1}.$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = \frac{p}{q} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{q^n}{n}$. Remarque : $P(X=0)=0$ car $\{X=0\}=\{N=0\}$

(Q2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall m \in [\![k,+\infty[\![,\quad \sum_{n=k}^{m} \frac{q^n}{n} = \sum_{n=k}^{m} \int_0^q t^{n-1}\,dt = \int_0^q \sum_{n=k}^{m} t^{n-1}\,dt.$$

Alors $P(X=k) = \frac{p}{q} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{q^n}{n} = \frac{p}{q} \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=k}^{m} \frac{q^n}{n}$.

$P(X=k) = \frac{p}{q} \lim_{m\to+\infty} \int_0^q \sum_{n=k}^{m} t^{n-1}\,dt$ et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}^*$

(Q3) Soit $m \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,q],\ 0 < 1-q \leq 1-t$.

$\forall t \in [0,q],\ 0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-q}$ et $t^m \geq 0$.

$\forall t \in [0,q],\ 0 \leq \frac{t^m}{1-t} \leq \frac{1}{1-q}\, t^m$.

En intégrant on obtient $0 \leq \int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \frac{1}{1-q}\int_0^q t^n\,dt$ car $q \geq 0$.

$q \in]0,1[$

donc $0 \leq \int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \frac{1}{1-q}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^q = \frac{1}{1-q}\,\frac{q^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{1-q} \times \frac{1}{n+1}$.

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1-q}\times\frac{1}{n+1}\right) = 0$. Par encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty}\int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$P(X=k) = \frac{p}{q}\lim_{n\to+\infty}\int_0^q \sum_{n=k}^{n} t^{n-1}\,dt \underset{t\in[0,q],\ t\neq 1}{=} \frac{p}{q}\lim_{n\to+\infty}\int_0^q t^{k-1}\frac{1-t^{n-(k-1)}}{1-t}\,dt$.

$P(X=k) = \frac{p}{q}\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt - \int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt\right) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt$.

$\lim_{n\to+\infty}\int_0^q \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt$.

En particulier $P(X=1) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{dt}{1-t} = \frac{p}{q}\left[-\ln|1-t|\right]_0^q = -\frac{p}{q}\ln|1-q| = -\frac{p}{q}\ln p$.

$P(X=1) = -\frac{p}{q}\ln p$.

<u>Remarque</u>.. Soit $k \in [\![2,+\infty[\![$. $\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt \overset{u=1-t}{=} \int_1^{1-q}\frac{(1-u)^{k-1}}{u}(-du) = \int_p^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{u}\,du$.

$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt = \int_p^1 \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{(-u)^i}{u}\,du = \int_p^1 \frac{1}{u}\,du + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i}(-1)^i\int_p^1 u^{i-1}\,du$.

$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt = -\ln p + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^i}{i}(1-p^i)$

donc $P(X=k) = -\frac{p}{q}\ln p + \frac{p}{q}\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{(-1)^i}{i}(1-p^i)$

ou encore ...

R.

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt = \int_0^q \frac{t^{k-1}-1}{1-t}\,dt + \int_0^q \frac{dt}{1-t}$$

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt = -\int_0^q (t^{k-2}+t^{k-3}+\cdots+t+1)\,dt + \Big[-\ln|1-t|\Big]_0^q$$

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t}\,dt = -\left[\frac{t^{k-1}}{k-1}+\frac{t^{k-2}}{k-2}+\cdots+\frac{t^2}{2}+t\right]_0^q - \ln p = -\sum_{i=1}^{k-1}\frac{q^i}{i} - \ln p$$

donc $\underline{\underline{P(X=k) = \frac{p}{q}\left[-\ln p - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{q^i}{i}\right]}}$.

Question 6 HEC 2011

On considère une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \text{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Q1. Prouver que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers θ.

Q2. Étudier la convergence en loi de $Y_n = n\,(\theta - X_n)$.

Question de cours : Caractériser les isomorphismes d'espaces vectoriels de dimensions finies.

Q1 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = P(X_n - \theta \geqslant \varepsilon) + P(X_n - \theta \leqslant -\varepsilon) = P(X_n \geqslant \theta + \varepsilon) + P(X_n \leqslant \theta - \varepsilon)$

X_n prend ses valeurs dans $[0, \theta]$ donc $P(X_n \geqslant \theta + \varepsilon) = 0$.

$P(X_n \leqslant \theta - \varepsilon) = P(\text{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n) \leqslant \theta - \varepsilon) = P(\{U_1 \leqslant \theta - \varepsilon\} \cap \{U_2 \leqslant \theta - \varepsilon\} \cap \ldots \cap \{U_n \leqslant \theta - \varepsilon\})$

Par indépendance on obtient : $P(X_n \leqslant \theta - \varepsilon) = P(U_1 \leqslant \theta - \varepsilon)\, P(U_2 \leqslant \theta - \varepsilon) \cdots P(U_n \leqslant \theta - \varepsilon)$.

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ ayant même loi il vient : $P(X_n \leqslant \theta - \varepsilon) = \big(P(U_1 \leqslant \theta - \varepsilon)\big)^n$.

$\underline{P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = \big(P(U_1 \leqslant \theta - \varepsilon)\big)^n.}$

__1er cas.__ $\theta - \varepsilon < 0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0^n = 0$. $\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$!

__2e cas.__ $\theta - \varepsilon \geqslant 0$. Alors $\theta - \varepsilon \in [0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = \big(P(U_1 \leqslant \theta - \varepsilon)\big)^n = \left(\dfrac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n = \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\theta}\right)^n$

Or $1 - \dfrac{\varepsilon}{\theta} \in [0, 1[$ (car $0 < \dfrac{\varepsilon}{\theta} \leqslant 1$) donc $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\theta}\right)^n = 0$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$. __$(X_n)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à θ.__

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de Y_n.

Y_n prend ses valeurs dans $[0, n\theta]$. Alors $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_n(x) = 0$ et $\forall x \in [n\theta, +\infty[$, $F_n(x) = 1$.

Soit $x \in [0, n\theta[$. $F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(n(\theta - X_n) \leq x) = P(\theta - X_n \leq \frac{x}{n}) = P(\theta - \frac{x}{n} \leq X_n)$.

$F_n(x) = 1 - P(X_n < \theta - \frac{x}{n}) = 1 - P(\{U_1 < \theta - \frac{x}{n}\} \cap \{U_2 < \theta - \frac{x}{n}\} \cap \dots \cap \{U_n < \theta - \frac{x}{n}\})$.

Par indépendance de $U_1, U_2, \dots, U_n$ (à voir) : $F_n(x) = 1 - P(U_1 < \theta - \frac{x}{n}) P(U_2 < \theta - \frac{x}{n}) \dots P(U_n < \theta - \frac{x}{n})$.

Or $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $U_k \hookrightarrow \mathcal{U}([0, \theta])$ donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(U_k < \theta - \frac{x}{n}) = P(U_k \leq \theta - \frac{x}{n}) = \dfrac{\theta - \frac{x}{n} - 0}{\theta - 0} = 1 - \dfrac{x}{n\theta}$

Alors $F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0, n\theta[\\ 1 & \text{si } x \in [n\theta, +\infty[\end{cases}$$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(0) = 0$.

Soit $x \in]0, +\infty[$. Posons $n_0 = \mathrm{Ent}\left(\frac{x}{\theta}\right) + 1$. $n_0 > \frac{x}{\theta}$; $x < n_0\theta$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $n \geqslant n_0$! $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $n\theta \geqslant n_0\theta > x$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n = 1 - e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)}$.
$\uparrow$ $1 - \frac{x}{n\theta} > 0$

$n \ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n\left(-\frac{x}{n\theta}\right) = -\frac{x}{\theta}$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)\right) = -\frac{x}{\theta}$. Par continuité de la fonction exponentielle en $-\frac{x}{\theta}$ il vient $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)} = e^{-\frac{x}{\theta}}$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - e^{-x/\theta} & \end{cases} \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-x/\theta} & \text{si } x \in \underline{\underline{[}}0, +\infty[\end{cases}$$

Ainsi $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$.

R.

Question 7 HEC 2011

Dans cet exercice E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et p, n sont deux entiers strictement positifs.

Q1. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E et x un vecteur de E.

Caractériser ne le justifiant le fait que $(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ soit liée.

Q2. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E supposés non tous nuls.

On note $\mathcal{A} = \{J \subset [\![1, n]\!] \mid (x_i)_{i \in J} \text{ est libre}\}$.

Soit J_0 un élément de $\mathcal{A}$ de cardinal maximal. Que peut-on dire de $(x_i)_{i \in J_0}$ vis à vis de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$?

Q3. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E et r le rang de cette famille. On en extrait une famille de n' vecteurs et on note r' le rang de cette famille extraite. Montrer que $n - r \geqslant n' - r'$

Cours *X est une variable aléatoire. Rappeler la définition de la fonction de répartition de X et en donner les principales propriétés.*

Q1 Montrons que $(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ est liée si et seulement si x est combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.

→ La condition est clairement suffisante.

→ Montrons qu'elle est nécessaire. Supposons que $(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ est liée.

$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1}$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}) \neq 0_{\mathbb{K}^{p+1}}$ et $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k + \alpha_{p+1} x = 0_E$.

Supposons $\alpha_{p+1} = 0$. Alors $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = 0_E$. Comme $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est libre, on a :

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$. Alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = 0$. Donc $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}) = 0_{\mathbb{K}^{p+1}}$!!

Par conséquent α_{p+1} n'est pas nul et $x = -\frac{1}{\alpha_{p+1}} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{p} \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_{p+1}}\right) e_k$

donc x est combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.

Q2 Montrons que $(x_i)_{i \in J_0}$ est une base de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

• $(x_i)_{i \in J_0}$ est une famille libre de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

• Montrons que $(x_i)_{i \in J_0}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Il suffit de montrer que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont combinaisons linéaires des éléments de la famille $(x_i)_{i \in J_0}$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si $k \in J_0$, x_k est combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in J_0}$.

Supposons que $k \notin J_0$. Alors $\operatorname{card} J_0 \cup \{k\} > \operatorname{card} J_0$.

Alors la famille " $(x_i)_{i\in J_0} \cup (x_k)$ " est liée par définition de J_0.

Comme $(x_i)_{i\in J_0}$ est libre, Q1 permet de dire que x_k est combinaison linéaire des éléments de la famille $(x_i)_{i\in J_0}$.

Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k \in \operatorname{Vect}((x_i)_{i\in J_0})$. Alors $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \operatorname{Vect}((x_i)_{i\in J_0})$.

L'inclusion inverse étant claire, on a : $\operatorname{Vect}((x_i)_{i\in J_0}) = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$(x_i)_{i\in J_0}$ est une famille libre et génératrice de $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

donc $\underline{\underline{(x_i)_{i\in J_0} \text{ est une base de } \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)}}$.

Q3 Posons $F = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. $\dim F = r$ car la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est de rang r.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de n' vecteurs extraite de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et qui a pour rang r'. Si $n = n'$: $r = r'$ et le résultat est clair. Nous supposerons $n > n'$.

<u>1er cas</u>.. $r' = 0$. Alors $\forall i \in I$, $x_i = 0_E$. $F = \operatorname{Vect}\left((x_i)_{i\in [\![1,n]\!] - I}\right)$.

Donc $r = \dim F \leq \operatorname{card}([\![1,n]\!] - I) = n - n'$. Alors $n - r \geq n' = n' - r'$.

<u>2ième cas</u>.. $r' = n'$. Alors $n' - r' = 0$. Comme $n \geq r$: $n - r \geq 0 = n' - r'$

<u>3ième cas</u>.. $0 < r' < n'$. Soit $\mathcal{B} = \{J \subset I \mid (x_i)_{i\in J} \text{ libre}\}$

Soit J_0 un élément de $\mathcal{B}$ de cardinal maximal. D'après ce qui précède $(x_i)_{i\in J_0}$ est une base de $\operatorname{Vect}((x_i)_{i\in I})$ qui est de dimension r'.

Alors $\operatorname{card} J_0 = r'$. Les vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I - J_0}$ sont combinaisons linéaires des éléments de la famille $(x_i)_{i\in J_0}$.

Alors $F = \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est encore engendré par la concaténée des familles $(x_i)_{i \in J_0}$ et $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!] - I}$. Cette famille a pour cardinal $r' + n - n'$ donc $r' + n - n' \geq \dim F = r$. Alors $n - r \geq n' - r'$.

Dans tous les cas $\underline{\underline{n - r \geq n' - r'}}$.

R.

Question 8 HEC 2011 S 108

Soit $(E, < .,. >)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E pour lequel il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Q1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (on pourra penser au procédé d'orthonormalisation de Schmidt)

Q2. On suppose de plus que pour tout x dans E, $< u(x), x >= 0$.

Montrer que $\forall (x,y) \in E^2$, $< u(x), y >= - < u(y), x >$. Que peut-on-dire de u ?

Cours *X est une variable aléatoire. Rappeler la définition de la fonction de répartition F de X et en donner des propriétés.*

Q1 Il existe une base $\mathcal{B}=(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure.

Pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $u(e_k)$ est combinaison linéaire de $e_1, e_2, \dots, e_k$.

Mieux : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $u(\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_k)) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$.

Le cours sur le procédé d'orthonormalisation de Schmidt montre qu'il existe une base $\mathcal{B}'=(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de E, orthonormée et telle que :

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\text{Vect}(e'_1, e'_2, \dots, e'_k) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ et $< e'_k, e_k > > 0$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. $e'_k \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ donc $u(e'_k) \in u(\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$.

Alors $u(e'_k) \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{Vect}(e'_1, e'_2, \dots, e'_k)$.

Donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $u(e'_k)$ est combinaison linéaire de $e'_1, e'_2, \dots, e'_k$.

Cela signifie que $M_{\mathcal{B}'}(u)$ est triangulaire supérieure.

<u>Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'=(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ soit triangulaire supérieure.</u>

Q2 Soit $(x,y) \in E^2$. Alors $< u(x+y), x+y > = 0$.

$$0 = < u(x+y), x+y > = < u(x)+u(y), x+y > = \underbrace{< u(x), x >}_{=0} + < u(x), y > + < u(y), x > + \underbrace{< u(y), y >}_{=0}.$$

Ainsi <u>$< u(x), y > = - < u(y), x >$ et ceci pour tout $(x,y) \in E^2$.</u>

<u>Remarque</u>.. u est antisymétrique.

Posons $A' = M_{B'}(u) = (a'_{ij})$. Montrons que A' est antisymétrique.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $u(e'_i) = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki}\, e'_k$

$\langle u(e'_i), e'_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki} \underbrace{\langle e'_k, e'_j \rangle}_{= \begin{cases} 1 \text{ si } k=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}} = a_{ji}$. De même $\langle u(e'_j), e'_i \rangle = a_{ij}$.

Or $\langle u(e'_i), e'_j \rangle = -\langle u(e'_j), e'_i \rangle$.

Donc $a_{ji} = -a_{ij}$ et ceci pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

${}^tA' = -A'$. A' est antisymétrique.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a'_{ii} = -a'_{ii}$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a'_{ii} = 0$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

1e cas.. $i > j$. Alors $a'_{ij} = 0$ car A' est triangulaire supérieure.

2e cas.. $i < j$ Alors $a'_{ji} = 0$ toujours parce que A' est triangulaire supérieure.

Ainsi $a'_{ij} = -a'_{ji} = 0$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow a'_{ij} = 0$.

Finalement $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a'_{ij} = 0$. $A' = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Alors u est l'endomorphisme nul.

R.

Question 9 **HEC 2011** **S 109**

Soit f une endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont des valeurs propres. Démontrer que f est diagonalisable.

Cours *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Estimateur sans biais, convergent*

1er Cas.. f n'est pas injectif. Alors 0 est valeur propre de f.

Donc f possède trois valeurs propres distinctes et f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3. Alors f est diagonalisable.

2ème Cas.. f est injectif. Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et que $\dim \mathbb{R}^3 < +\infty$: f est bijectif.

$f^4 = f^2$ donc en composant deux fois par f^{-1} : $f^2 = Id_{\mathbb{R}^3}$, ou : $f^2 - Id_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

$X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f dont les zéros sont -1 et 1. Alors $Sp\, f \subset \{-1, 1\}$.

Comme -1 et 1 sont deux valeurs propres de f : $Sp\, f = \{-1, 1\}$. (1)

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $f^2 = Id_{\mathbb{R}^3}$ donc f est une symétrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

Alors $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \operatorname{Ker}(f + Id_{\mathbb{R}^3}) = SEP(f, 1) \oplus SEP(f, -1)$ (2)

(1) et (2) montrent que f est diagonalisable.

R.

Question 10 HEC 2011 S 112

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que $A^2 + I_3 = 2A$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

Q1. Montrer que A admet une seule valeur propre λ. A est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer le sous-espace propre associé à λ.

Q3. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cours *Rappeler la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-2-2 & 6-2 & -6+2 \\ -3+1 & -2+1 & 2 \\ 3-1 & 2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2A. \quad \underline{\underline{A^2 + I_3 = 2A}} \ !$$

Q1 $A^2 - 2A + I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de A dont le seul zéro est 1 dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. $Sp_{\mathbb{R}} A \subset \{1\}$ et $Sp_{\mathbb{C}} A \subset \{1\}$

<u>V1</u> Or A admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$.

Ainsi 1 est la seule valeur propre de A.

<u>V2</u> $Sp_{\mathbb{R}} A \subset \{1\}$. Supposons que 1 n'est pas valeur propre de A. Alors $A - I_3$ est inversible. Donc $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = (A - I_3)^2$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles !

Cette contradiction montre que $A \in Sp_{\mathbb{R}} A$.

Ainsi <u>1 est la seule valeur propre de A</u>

Supposons que A soit diagonalisable. Alors $SEP(A,1) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc $3 = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \dim SEP(A,1) = 3 - rg(A - I_3)$; $rg(A - I_3) = 0$.

Alors $A - I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. $A = I_3$!!

Donc <u>A n'est pas diagonalisable</u>.

R.

Q2 Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX=X \iff \begin{cases}3x+2y-2z=x\\-x+z=y\\x+y=z\end{cases} \iff \begin{cases}2(x+y-z)=0\\-x-y+z=0\\x+y-z=0\end{cases} \iff x+y-z=0.$$

<u>$SEP(A,1)$ est le plan vectoriel de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ d'équation $x+y-z=0$ dans la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.</u>

$$SEP(A,1)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\x+y\end{pmatrix};(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de cardinal 2 de $SEP(A,1)$ qui est de dimension 2.

Alors <u>$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,1)$.</u>

Q3 Posons $E=\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E=\mathbb{R}^3$. Posons $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.
Pour montrer que B est semblable à A il suffit de montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $M_{\mathcal{B}'}(f)=B$.

→ <u>Analyse</u>.. Supposons que $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ soit une base de E telle que $M_{\mathcal{B}'}(f)=B$.

Alors $f(e'_1)=e'_1$, $f(e'_2)=e'_2$ et $f(e'_3)=e'_2+e'_3$.

Donc $e'_1\in \mathrm{Ker}(f-Id_E)$, $e'_2\in\mathrm{Ker}(f-Id_E)$, <u>$e'_2=(f-Id_E)(e'_3)\in \mathrm{Im}(f-Id_E)$</u>.

Ainsi $e'_1\in\mathrm{Ker}(f-Id_E)$, $e'_2\in\mathrm{Ker}(f-Id_E)\cap\mathrm{Im}(f-Id_E)$ et $e'_2=(f-Id_E)(e'_3)$.

→ <u>Synthèse</u>, $\mathrm{Sp}\,f=\mathrm{Sp}\,A=\{1\}$. Comme $SEP(A,1)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$;

$SEP(f,1)=\mathrm{Vect}(e_1+e_3,e_2+e_3)$.

$M_{\mathcal{B}}(f-Id_E)=A-I_3=\begin{pmatrix}2&2&-2\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Im}(f-Id_E)=\mathrm{Vect}(2e_1-e_2+e_3,\,2e_1-e_2+e_3,\,-2e_1+e_2-e_3)$

$\mathrm{Im}(f-Id_E)=\mathrm{Vect}(2e_1-e_2+e_3)$. Remarquons que $2e_1-e_2+e_3=2(e_1+e_3)-(e_2+e_3)\in\mathrm{Ker}(f-Id_E)$.

Posons alors <u>$e'_2=2e_1-e_2+e_3$</u>. Notons que $e'_2=(f-Id_E)(e_1)$. Posons alors <u>$e'_3=e_1$</u>

Posons enfin $e'_1 = e_1 + e_3$.

$e'_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ donc $\underline{f(e'_1) = e'_1}$.

$e'_2 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ donc $\underline{f(e'_2) = e'_2}$.

$e'_2 = (f - \mathrm{Id}_E)(e_1) = (f - \mathrm{Id}_E)(e'_3)$; $\underline{f(e'_3) = e'_2 + e'_3}$.

Montrons alors que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E. Comme le cardinal de $\mathcal{B}'$ coïncide avec la dimension de E il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0_E$.

$\alpha(e_1 + e_3) + \beta(2e_1 - e_2 + e_3) + \gamma e_1 = 0_E$

$(\alpha + 2\beta + \gamma) e_1 - \beta e_2 + (\alpha + \beta) e_3 = 0_E$. Comme (e_1, e_2, e_3) est libre :

$\alpha + 2\beta + \gamma = -\beta = \alpha + \beta = 0$. Alors $\beta = 0$, $\alpha = 0$ et $\gamma = 0$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. De plus $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$.

$M_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $M_{\mathcal{B}'}(f) = B$ donc <u>A et B sont semblables</u>.

<u>Remarque</u>.. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$B = M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P = P^{-1} A P$. $\underline{B = P^{-1}AP}$

<u>Exercice 1</u>.. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

<u>Exercice 2</u>.. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

R.

Question 11 S 113 On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.

Q1 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Quelle est la loi de S_n ?

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P(S_n \geqslant n + \sqrt{n})$?

Q2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire N_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des X_k et dont la loi est donnée par :

$N_n(\Omega) = \{n, n+1\}$ et $P(N_n = n) = P(N_n = n+1) = \dfrac{1}{2}$.

a) $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ T_n(\omega) = S_{N_n(\omega)}$.

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P(T_n \geqslant n + \sqrt{n})$?

Cours *Rappeler la définition du rang d'une matrice. Une matrice carrée et sa transposée ont-elles nécessairement le même rang ?*

Q1 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ ou $X_k \hookrightarrow \Gamma(1,1)$ ou $X_k \hookrightarrow \gamma(1)$.

Le cours montre alors que : $X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \Gamma(1,n)$ ou $X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \gamma(n)$.

Donc <u>S_n suit la loi gamma de paramètres 1 et n ou la loi gamma de paramètre n.</u>

b) $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, ayant même loi, d'espérance 1 et de variance 1.

Le théorème de la limite centrée montre alors que $\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Soit ϕ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leq x\right) = \phi(x)$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

$S_n \hookrightarrow \Gamma(1,n)$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 1\right) = \phi(1)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \leq n + \sqrt{n}) = \phi(1)$.

R.

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n \geq n+\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} P(S_n > n+\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} (1-P(S_n \leq n+\sqrt{n})) = 1-\phi(1)$$

S_n est à densité.

$$\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} P(S_n \geq n+\sqrt{n}) = 1-\phi(1) = \phi(-1) \simeq 0,1507}}$$

Q2 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit F_{T_n} la fonction de répartition de T_n. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$(\{N_n=n\}, \{N_n=n+1\})$ est un système complet d'événements

Alors $P(T_n\leq x) = P(\{T_n\leq x\}\cap\{N_n=n\}) + P(\{T_n\leq x\}\cap\{N_n=n+1\})$

$P(T_n\leq x) = P(\{S_n\leq x\}\cap\{N_n=n\}) + P(\{S_{n+1}\leq x\}\cap\{N_n=n+1\})$.

$X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ et N_n sont indépendantes donc S_n et N_n (resp. S_{n+1} et N_n) sont indépendantes.

Alors $F_{T_n}(x) = P(T_n\leq x) = P(S_n\leq x)P(N_n=n) + P(S_{n+1}\leq x)P(N_n=n+1)$.

$$F_{T_n}(x) = \frac{1}{2}\left[P(S_n\leq x) + P(S_{n+1}\leq x)\right].$$

Notons F_n et F_{n+1} les fonctions de répartition de S_n et S_{n+1}.

$$\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R},\ F_{T_n}(x) = \frac{1}{2}\left[F_{S_n}(x) + F_{S_{n+1}}(x)\right].}}$$

F_{S_n} et $F_{S_{n+1}}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc $\underline{\underline{F_{T_n} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}}$

Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ f_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ et

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_{S_{n+1}}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}x^{n}}{n!} & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

f_{S_n} (resp. $f_{S_{n+1}}$) est une densité continue sur $\mathbb{R}^*$ de S_n (resp. S_{n+1}). Alors F_{S_n} (resp. $F_{S_{n+1}}$) est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{S_n}(x) = f_{S_n}(x)$ et $F'_{S_{n+1}}(x) = f_{S_{n+1}}(x)$.

$F_{T_n} = \frac{1}{2}[F_{S_n} + F_{S_{n+1}}]$.

Alors F_{T_n} est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

ceci achève de montrer que T_n est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{T_n}(x) = \frac{1}{2}(F'_{S_n}(x) + F'_{S_{n+1}}(x)) = \frac{1}{2}(f_{S_n}(x) + f_{S_{n+1}}(x))$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_{T_n}(x) = \frac{1}{2}(f_{S_n}(x) + f_{S_{n+1}}(x))$.

g_{T_n} est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{T_n} sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Alors g_{T_n} est une densité de T_n.

$E(S_n)$ (resp. $E(S_{n+1})$) existe et vaut n (resp. $n+1$).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{S_n}(t)\,dt$ (resp. $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{S_{n+1}}(t)\,dt$) converge et vaut n (resp. $n+1$).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t\left(\frac{1}{2}(f_{S_n}(t) + f_{S_{n+1}}(t))\right)dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}(n+(n+1))$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_{T_n}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{2n+1}{2}$.

$E(T_n)$ existe et vaut $\frac{2n+1}{2}$.

S_n et S_{n+1} possèdent un moment d'ordre 2 donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_n}(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_{n+1}}(t)\,dt$ convergent.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left(\frac{1}{2}(f_{S_n}(t) + f_{S_{n+1}}(t))\right)dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_n}(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_{n+1}}(t)\,dt$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g_{T_n}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}(E(S_n^2) + E(S_{n+1}^2))$.

R.

Alors T_n possède un moment d'ordre 2 qui vaut $\frac{1}{2}[E(S_n^2)+E(S_{n+1}^2)]$

Ainsi <u>T_n possède une variance</u>.

$V(T_n)= E(T_n^2)-(E(T_n))^2=\frac{1}{2}[E(S_n^2)+E(S_{n+1}^2)]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$

$V(T_n)=\frac{1}{2}[V(S_n)+(E(S_n))^2+V(S_{n+1})+(E(S_{n+1}))^2]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$.

$V(T_n)=\frac{1}{2}[n+n^2+(n+1)+(n+1)^2]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$

$V(T_n)=\frac{1}{2}(n+1)(n+1+(n+1))-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2=(n+1)^2-(n+\frac{1}{2})^2=(n+1+n+\frac{1}{2})(n+1-n-\frac{1}{2})$.

$V(T_n)=(2n+3/2)(1/2)=n+\frac{3}{4}$.

$$\underline{\underline{V(T_n)=n+\frac{3}{4}}}.$$

T_n est une variable aléatoire à densité.

<u>b)</u> Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-P(T_n<n+\sqrt{n})=1-P(T_n\leq n+\sqrt{n})$

$P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-F_{T_n}(n+\sqrt{n})=1-\frac{1}{2}[F_{S_n}(n+\sqrt{n})+F_{S_{n+1}}(n+\sqrt{n})]$

$P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-\frac{1}{2}P(S_n\leq n+\sqrt{n})-\frac{1}{2}P(S_{n+1}\leq n+\sqrt{n})$.

$P(T_n\geq n+\sqrt{n})=1-\frac{1}{2}P(S_n^*\leq 1)-\frac{1}{2}P\left(S_{n+1}^*\leq\frac{n+\sqrt{n}-(n+1)}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\frac{1}{2}P(S_n^*\leq 1)-\frac{1}{2}P\left(S_{n+1}^*\leq\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)$

$$\begin{cases} S_n^*=\dfrac{S_n-n}{\sqrt{n}}\\ S_{n+1}^*=\dfrac{S_{n+1}-(n+1)}{\sqrt{n+1}}\end{cases}$$

Rappelons que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_n^*\leq x)=\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_{n+1}^*\leq x)=\phi(x)$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_n^*\leq 1)=\phi(1)$. Ne reste plus qu'à trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(S_{n+1}^*\leq\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

Notons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}=1$ car $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=1$ ... et que $\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_{n+1}^*\leq 1)=\phi(1)$

Montrons alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) = \phi(1)$ en utilisant la définition.

<u>Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.</u> Montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow |P(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) - \phi(1)| < \varepsilon$.

ϕ est continue en 1 donc $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-1| < \eta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\alpha = \frac{\eta}{2}$. $1-\alpha \in \mathbb{R}$ et $|(1-\alpha)-1| = |\alpha| \underset{\underset{\alpha \in \mathbb{R}_+^*}{\uparrow}}{=} \alpha < \eta$. Alors $|\phi(1-\alpha) - \phi(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

donc $-\frac{\varepsilon}{2} < \phi(1-\alpha) - \phi(1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Nous retiendrons que $\underline{-\frac{\varepsilon}{2} + \phi(1) \overset{\boxed{(1)}}{<} \phi(1-\alpha)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 1$ $\left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \leqslant 1 \right)$.

Alors $\{S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\} \subset \{S_{n+1}^* \leqslant 1\}$ donc $P(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) \leqslant P(S_{n+1}^* \leqslant 1)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant n_1 \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} - 1\right| < \alpha$ car $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors $\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![$, $1-\alpha < \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} < 1+\alpha$.

donc $\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![$, $\{S_{n+1}^* \leqslant 1-\alpha\} \subset \{S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\}$ et $P(S_{n+1}^* \leqslant 1-\alpha) \leqslant P(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}})$.

Ainsi $\underline{\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![, \quad P(S_{n+1}^* \leqslant 1-\alpha) \leqslant P(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) \leqslant P(S_{n+1}^* \leqslant 1)}$. $\boxed{(2)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_{n+1}^* \leqslant 1-\alpha) = \phi(1-\alpha)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_{n+1}^* \leqslant 1) = \phi(1)$.

Alors $\exists n_2 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant n_2 \Rightarrow |P(S_{n+1}^* \leqslant 1-\alpha) - \phi(1-\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists n_3 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant n_3 \Rightarrow |P(S_{n+1}^* \leqslant 1) - \phi(1)| < \varepsilon$.

Alors :

$\underline{\forall n \in [\![n_2, +\infty[\![, \quad \phi(1-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} \overset{\boxed{(3)}}{<} P(S_{n+1}^* \leqslant 1-\alpha)}$ et $\underline{\forall n \in [\![n_3, +\infty[\![, \ P(S_{n+1}^* \leqslant 1) \overset{\boxed{(4)}}{<} \phi(1)+\varepsilon}$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant n_0$.

$$\phi(1)-\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} + \phi(1) - \frac{\varepsilon}{2} \underset{(1)}{<} \phi(1-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} \underset{(3)}{<} P(S_{n+1}^* \leqslant 1-\alpha) \underset{(2)}{\leqslant} P(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) \underset{(2)}{\leqslant} P(S_{n+1}^* \leqslant 1) \underset{(4)}{<} \phi(1)+\varepsilon$$

donc $\phi(1)-\varepsilon < P(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) < \phi(1)+\varepsilon$ ou $|P(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) - \phi(1)| < \varepsilon$.

R.

Nous avons donc prouvé que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant n_0 \Rightarrow \left| P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) - \phi(1) \right| < \varepsilon$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) = \phi(1)$ ▲

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n \geqslant n+\sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2} P(S_n^* \leqslant 1) - \frac{1}{2} P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2}\phi(1) - \frac{1}{2}\phi(1)$.

$$\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} P(T_n \geqslant n+\sqrt{n}) = 1 - \phi(1) = \phi(-1)}}.$$

▲ On retrouve ce type de preuve dans HEC $^{\text{V}}$ 2001 III Q 6 ou dans HEC $^{\text{nII}}$ 2011 Q13

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2011 (suite)

Voici des questions sans préparation de l'oral HEC 2011 obtenues auprès des élèves. Les énoncés ne sont pas garantis. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

F 1 Assez simple ou proche du cours.

F 2 Demande du travail.

F 3 Délicat.

Question 1 HEC 2011 Obtenu par M. CARRIERE **F1**

E est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Φ est l'endomorphisme de E qui à tout éléments $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$.

Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$, $\operatorname{Ker}(\Phi\circ\Phi)$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

Cours *Définition d'un estimateur et d'un estimateur sans biais.*

Déjà donnée en 2010.

Question 2 HEC 2011 Obtenu par M. CARRIERE **F1⁻**

X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-(x-a)} & \text{si } x \in]a,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ayant même loi que X.

Donner la loi de $n\left(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\operatorname{Min}} X_k - a\right)$.

Cours *Inégalité de Taylor-Lagrange.*

Question 3 HEC 2011 Obtenu par M. CARRIERE **F2**

$n \in [\![2,+\infty[\![$. Soient x et y deux réels et F l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F(M) = x\,M + y\,{}^tM$.

Q1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit un projecteur.

Q2. Donner les valeurs propres de F.

Q3. F est-il diagonalisable ?

Question 4 HEC 2011 T. EHRMANN **F2**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Q1. $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une famille libre de E et x est un vecteur de E.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ soit liée.

Q2. $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille d'éléments de E de rang r non nul. $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties non vides J de $[\![1, n]\!]$ telles que la famille $(x_i)_{i\in J}$ soit libre. J_0 est une partie de $\mathcal{A}$ de cardinal maximal.

a) Donner un lien entre $(x_i)_{i\in J_0}$ et $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

b) On extrait une famille de n' vecteurs de cette famille et on note r' son rang. Montrer que $n - r \geqslant n' - r'$.

Question de cours : Définition et propriétés principales de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.

Question 5 HEC 2011 G. FOUBART $\boxed{\textbf{F2}}$

Q1. X suit la loi normale centrée réduite. Montrer que $Z = e^X$ est une variable aléatoire à densité et en donner une denité f_Z.

Q2. a est un élément de $[-1, 1]$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = \begin{cases} (1 + a\,\sin(2\pi\,\ln x))\,f_Z(x) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Plus une question non lue.

Je propose : T est une variable aléatoire à densité de densité f_a. Existence et valeur éventuelle de $E(T)$.

Question de cours : Comparaison des séries à termes positifs.

Question 6 HEC 2011 C. DAUDET $\boxed{\textbf{F1}^-}$

Soit n un entier naturel non nul.

Q1. Trouver un réel C_n pour que la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \begin{cases} C_n\,e^{-4nt}\,t^{n-1} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité.

Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 4.

Trouver, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la loi de $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité.

Question de cours : Définition d'une forme linéaire. Noyau et image d'une forme linéaire.

Question 7 HEC 2011 V. MESKHI $\boxed{\textbf{F1}^-}$

Image, noyau, valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Plus deux autres questions non lues.

Question de cours : Théorème de la limite centrée. Définition d'un intervalle de confiance.

Question 8 HEC 2011 E. PHILIP $\boxed{\textbf{F1}}$

f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)\,f(x-y) = \big(f(x)\big)^2$. On suppose que f n'est pas la fonction nulle..

On se propose de montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que $f(0) \neq 0$.

Q2. Si a est un réel tel que $f(a) = 0$, montrer que $f\left(\dfrac{a}{2}\right) = 0$.

Q3. Conclure.

Q4. Donner un exemple d'une telle fonction.

Question de cours : X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé.

On suppose que $V(X)$ et $V(Y)$ existent. Montrer que $\big(\text{cov}(X,Y)\big)^2 \leqslant V(X)\,V(Y)$.

Question 9 **HEC 2011** Vu par JF $\boxed{\textbf{F1}^+}$

$(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0,\theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \text{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Q1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à θ.

Q2. Montrer que $\big(n\,(\theta - X_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Question de cours : Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

---

Question 10 **HEC 2011** Vu par JF $\boxed{\textbf{F2}}$

$A = (a_{i,j})$ est la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Q1. Justifier l'inversibilité de A et exprimer A^{-1} en fonction de A.

Q2. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n$

Question de cours : Loi exponentielle.

Question 1 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE

E est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Φ est l'endomorphisme de E qui à tout éléments $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$.

Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$, $\operatorname{Ker}(\Phi\circ\Phi)$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

Cours *Définition d'un estimateur et d'un estimateur sans biais.*

Déjà donnée en 2010.

- Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$.

$(u_n)_{n\geqslant 0}\in \operatorname{Ker}\phi \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=0 \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n \iff (u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante.

Ker ϕ est le sous-espace vectoriel de E constitué par les suites constantes.

- Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}\in E$

$\phi^2((u_n)_{n\geqslant 0})=\phi((u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0})=\big((u_{n+2}-u_{n+1})-(u_{n+1}-u_n)\big)_{n\geqslant 0}$

$\phi^2((u_n)_{n\geqslant 0})=(u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n)_{n\geqslant 0}$.

$(u_n)_{n\geqslant 0}\in \operatorname{Ker}\phi^2 \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=0$.

L'équation $z\in\mathbb{C}$ et $z^2-2z+1=0$ admet une solution et une seule 1.

Alors Ker ϕ^2 est le plan vectoriel engendré par les suites $(1)_{n\geqslant 0}$ et $(n)_{n\geqslant 0}$

- Remarque.. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}\in \operatorname{Im}\phi$. $\exists (u_n)_{n\geqslant 0}\in E$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=v_n$.

$$\text{Alors } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=(u_n-u_0)+u_0=\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)+u_0$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}v_k+u_0$. Cela donne fortement envie de construire un antécédent par ϕ pour tout élément de E, donc de montrer que ϕ est surjectif. Soit $(w_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de E. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de E définie par : $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}w_k$.

↑ arbitraire ...

Montrons que $\phi((u_n)_{n\geqslant 0})=(w_n)_{n\geqslant 0}$.

Il s'agit de montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=w_n$.

R

Soit $n \in \mathbb{N}$

- Si $n=0$: $u_{n+1}-u_n = u_1 - u_0 = u_1 = \sum_{k=0}^{1-1} \omega_k = \omega_0 = \omega_n$.

- Supposons $n \geqslant 1$.

$$u_{n+1}-u_n = \sum_{k=0}^{n} \omega_k - \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \omega_n.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = \omega_n$. Alors $\phi\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = (\omega_n)_{n\geqslant 0}$.

$\forall (\omega_n)_{n\geqslant 0} \in E$, $\exists (u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, $\phi\left((u_n)_{n\geqslant 0}\right) = (\omega_n)_{n\geqslant 0}$.

ϕ est surjectif. $\mathrm{Im}\,\phi = E$.

Exercice.- Trouver $\mathrm{Ker}\,\phi^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

R

Question 2 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE

X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x-a)} & \text{si } x \in]a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes ayant même loi que X.

Donner la loi de $n\left(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\operatorname{Min}} X_k - a\right)$.

Cours *Inégalité de Taylor-Lagrange.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F_n la fonction de répartition de $n(\min\limits_{1\le k\le n} X_k - a)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_n(x) = P(\min\limits_{1\le k\le n} X_k \le \frac{x}{n} + a) = 1 - P(\min\limits_{1\le k\le n} X_k > \frac{x}{n} + a)$.

$F_n(x) = 1 - P(\{X_1 > \frac{x}{n} + a\} \cap \dots \cap \{X_n > \frac{x}{n} + a\})$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et ont même loi que X donc $F_n(x) = 1 - \prod\limits_{k=1}^{n} P(X_k > \frac{x}{n} + a) = 1 - \left(P(X > \frac{x}{n} + a)\right)^n$.

$F_n(x) = 1 - \left(1 - F_X(\frac{x}{n} + a)\right)^n$.

__1er cas.__ $x \in]-\infty, 0]$. Alors $\frac{x}{n} + a \in]-\infty, a]$. $F_X(\frac{x}{n} + a) = 0$.

donc $F_n(x) = 1 - 1^n = 0$

__2ème cas.__ $x \in]0, +\infty[$. Alors $\frac{x}{n} + a \in]a, +\infty[$. $F_X(\frac{x}{n} + a) = 1 - e^{-(\frac{x}{n} + a - a)} = 1 - e^{-\frac{x}{n}}$

$F_n(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - \left(1 - (1 - e^{-\frac{x}{n}})\right)^n = 1 - \left(e^{-\frac{x}{n}}\right)^n = 1 - e^{-x}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $n(\min\limits_{1\le k\le n} X_k - a)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

R

Question 3 **HEC 2011** Obtenu par M. CARRIERE $\quad n \in [\![2,+\infty[\![$

Soient x et y deux réels et F l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ F(M) = x\,M + y\,{}^tM$.

Q1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit un projecteur.

Q2. Donner les valeurs propres de F.

Q3. F est-il diagonalisable ?

Q1 $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) :\ F^2(M) = F(F(M)) = x\,F(M) + y\,{}^tF(M) = x(xM + y\,{}^tM) + y\,{}^t(xM + y\,{}^tM)$.

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ F^2(M) = x^2M + xy\,{}^tM + yx\,{}^tM + y^2M = (x^2+y^2)M + 2xy\,{}^tM$

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ F^2(M) = (x^2+y^2)M + 2x(F(M) - xM) = (y^2-x^2)M + 2x\,F(M)$. **(A)**

* Supposons que F soit un projecteur. Alors $F \circ F = F$.

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (y^2-x^2)M + 2x\,F(M) = F(M)$. ou $(y^2-x^2)M = (1-2x)F(M)$.

En particulier $(y^2-x^2)I_n = (1-2x)(xI_n + y\,{}^tI_n) = (1-2x)(x+y)I_n$.

Comme $I_n \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$: $y^2-x^2 = (1-2x)(x+y) = x - 2x^2 + y - 2xy$. $x^2+y^2+2xy-x-y=0$

$n \geqslant 2$. Il existe une matrice antisymétrique (${}^tJ=-J$) J non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ex : $J = \begin{pmatrix} (0) & -1 \\ 1 & (0) \end{pmatrix}$)

Alors $(y^2-x^2)J = (1-2x)(xJ + y\,{}^tJ) \overset{\downarrow}{=} (1-2x)(x-y)J$ et $J \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi $y^2-x^2 = (1-2x)(x-y) = x - 2x^2 - y + 2xy$; $x^2+y^2-2xy-x+y=0$.

$\begin{cases} x^2+y^2+2xy-x-y=0 \\ x^2+y^2-2xy-x+y=0 \end{cases}$. Par différence on obtient $4xy-2y=0$.

donc $y=0$ ou $x=\frac{1}{2}$.

1er cas.. $y=0$. Alors $x^2-x=0$. $x=0$ ou $x=1$.

2e cas.. $y\neq 0$. Alors $x=\frac{1}{2}$. $0 = \frac{1}{4} + y^2 + y - \frac{1}{2} - y$; $y^2 = \frac{1}{4}$. $y=\frac{1}{2}$ ou $y=-\frac{1}{2}$

<u>Si F est un projecteur : $(x,y) \in \mathcal{S} = \{(0,0), (1,0), (\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$.</u>

* Réciproquement supposons que $(x,y) \in \mathcal{S} = \{(0,0), (1,0), (\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$.

1) F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2) <u>1er cas</u>.. $x=y=0$. Alors $F = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$ donc $F^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))} = F$.

__2ème cas..__ $(x,y)=(1,0)$. Alors $F=\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $F\circ F=\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}=F$.

__3ème cas..__ $(x,y)\in\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$. Alors $y^2-x^2=0$ et $2x=1$.

(A) donne alors $\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ F^2(M)=F(M)$. $F^2=F$.

Si $(x,y)\in\mathcal{S}=\{(0,0),(1,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$ F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$F^2=F$ donc F est un projecteur.

Finalement __F est un projecteur si et seulement si $(x,y)\in\{(0,0),(1,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$.__

(Q2) (A) donne $\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ F^2(M)-2xF(M)+(x^2-y^2)M=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Donc $\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (F^2-2xF+(x^2-y^2)\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})(M)=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Alors $F^2-2xF+(x^2-y^2)\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}=0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$. $P=X^2-2xX+x^2-y^2$ est un

polynôme annulateur de F. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

$\alpha^2-2x\alpha+x^2-y^2=0\iff(\alpha-x)^2=y^2\iff\begin{cases}\alpha-x=y\\ \text{ou}\\ \alpha-x=-y\end{cases}\iff\alpha=x+y$ ou $\alpha=x-y$.

Les zéros de P sont $x+y$ et $x-y$. $\mathrm{Sp}\,F\subset\{x+y,x-y\}$.

$F(I_n)=(x+y)I_n$ et $I_n\neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$; $x+y\in\mathrm{Sp}\,F$.

Reprenons la matrice antisymétrique J non nulle.

$F(J)=(x-y)J$ et $J\neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$; $x-y\in\mathrm{Sp}\,F$.

Finalement __$\mathrm{Sp}\,F=\{x+y,x-y\}$.__

(Q3) __1er cas..__ $y=0$. Alors $F=x\,\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. F est une homothétie vectorielle.

__F est diagonalisable.__

__2e cas..__ $y\neq 0$. $\mathrm{Sp}\,F=\{x+y,x-y\}$ et $x+y\neq x-y$.

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $F(M)=(x+y)M\iff xM+y\,{}^tM=xM+yM\iff y({}^tM-M)=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

$$F(M)=(x+y)M\underset{y\neq 0}{\iff}{}^tM-M=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\iff{}^tM=M.$$

$F(M) = (x-y)M \Leftrightarrow xM + y\,{}^tM = xM - yM \Leftrightarrow y\,{}^tM = -yM \underset{\text{car } y\neq 0}{\Leftrightarrow} {}^tM = -M$.

Ainsi $SEP(F, x+y)$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n$ de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$

$SEP(F, x-y)$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n$ de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

→ $SEP(F, x+y)$ et $SEP(F, x-y)$ sont en somme directe car $x+y \neq x-y$. Ainsi $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont en somme directe.

→ . $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n \subset M_n(\mathbb{R})$

. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Posons $M_1 = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $M_2 = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

- $M = M_1 + M_2$
- ${}^tM_1 = \frac{1}{2}({}^tM + M) = M_1$ donc $M_1 \in \mathcal{S}_n$
- ${}^tM_2 = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -M_2$ donc $M_2 \in \mathcal{A}_n$

Alors $M \in \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

On peut ainsi dire que $M_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

Finalement $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = SEP(F, x+y) \oplus SEP(F, x-y)$.

<u>F est diagonalisable.</u>

Question 4 HEC 2011 T. EHRMANN

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Q1. $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une famille libre de E et x est un vecteur de E.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ soit liée.

Q2. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille d'éléments de E de rang r non nul. $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties non vides J de $[\![1, n]\!]$ telles que la famille $(x_i)_{i\in J}$ soit libre. J_0 est une partie de $\mathcal{A}$ de cardinal maximal.

a) Donner un lien entre $(x_i)_{i\in J_0}$ et $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

b) On extrait une famille de n' vecteurs de cette famille et on note r' son rang. Montrer que $n - r \geq n' - r'$.

Question de cours : Définition et propriétés principales de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.

Q1 Montrons que $(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ est liée si et seulement si $x \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.

• La condition est clairement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire.

Supposons $(e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ liée.

$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k + \alpha_{p+1} x = 0_E$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}) \neq 0_{\mathbb{R}^{p+1}}$.

Supposons que $\alpha_{p+1} = 0$. Alors $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = 0_E$. Or $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est libre, ainsi

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$. Alors $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}) = 0_{\mathbb{R}^{p+1}}$!!

Donc $\alpha_{p+1} \neq 0$. Alors $x = \sum_{k=1}^{p} \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_{p+1}}\right) e_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

$\underline{(e_1, e_2, \ldots, e_p, x) \text{ liée} \iff x \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p).}$

Q2 a) Montrons que $(x_j)_{j\in J_0}$ est une base de $F = \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

→ Par définition $(x_j)_{j\in J_0}$ est libre

→ $(x_j)_{j\in J_0}$ est une famille d'éléments de F.

→ Montrons que cette famille est une famille génératrice de F.

Soit G le sous-espace vectoriel qu'elle engendre. $G \subset F$.

Pour montrer que $F \subset G$ il suffit de montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in G$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$

<u>1er cas</u>. $i \in J_0$. Alors $x_i \in G$.

R.

2ème cas.. $i \notin J_0$. Posons $J_1 = \{i\} \cup J_0$. $\text{card } J_1 = \text{card } J_0 + 1 > \text{card } J_0$.

Alors par définition de J_0, $(x_j)_{j\in J_1}$ est liée. Comme $(x_j)_{j\in J_0}$ est libre, on a montré que x_i appartient au sous-espace vectoriel engendré par $(x_j)_{j\in J_0}$ donc $x_i \in G$.

Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \in G$. Alors $F \subset G$.

Finalement $F = G$ et ainsi $(x_j)_{j\in J_0}$ est une famille génératrice de F.

Ainsi $(x_j)_{j\in J_0}$ ou $(x_i)_{i\in J_0}$ est une base de $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

b) Soit $(x_k)_{k\in K}$ une famille de n' vecteurs extraite de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
$\text{card } K = n'$. Notons r' le rang de cette famille.

1er cas. $n' = n'$. Alors $n - r \geq 0 = n' - r'$

2ème cas.. $r' = 0$. Alors $\forall k \in K$, $x_k = 0$. Donc $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}((x_i)_{i\in[\![1,n]\!]-K})$.

Alors $r = \dim \text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \dim \text{Vect}((x_i)_{i\in[\![1,n]\!]-K}) \leq \text{card}([\![1,n]\!]-K)$.

Donc $r \leq n - \text{card } K = n - n'$; $n - r \geq n' = n' - 0 = n' - r'$.

3ème cas.. $r' \in [\![1, n'-1]\!]$.

Soit $(x_k)_{k\in K_0}$ une base de $H = \text{Vect}((x_k)_{k\in K})$ (K_0 est une partie non vide de K de cardinal maximal tel que $(x_k)_{k\in K_0}$ soit libre).

Alors $\text{card } K_0 = r'$.

Considérons l'ensemble des parties J de $[\![1,n]\!]$ telles que $\begin{cases} 1) \ K_0 \subset J \\ 2) \ (x_j)_{j\in J} \text{ est libre} \end{cases}$

Soit J_0 une partie de cet ensemble (qui est non vide car il contient K_0) de cardinal maximal.

Comme dans a) on montre que $(x_j)_{j\in J_0}$ est une base de $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ainsi $\text{card } J_0 = r$.

Soit $\ell \in K \setminus K_0$. x_ℓ est combinaison linéaire de la famille $(x_\ell)_{\ell \in K_0}$ car c'est une base de $\mathrm{Vect}((x_k)_{k \in K})$. Supposons que $\ell \in J_0$. Notons que $K_0 \subset J_0 - \{\ell\}$

Alors x_ℓ est combinaison linéaire de la famille $(x_\ell)_{\ell \in K_0}$ donc de la sous-famille $(x_j)_{j \in J_0 - \{\ell\}}$. Alors dans ces conditions la famille $(x_j)_{j \in J_0}$ est liée !! Ainsi $\ell \notin J_0$.

Finalement $K \setminus K_0 \subset [\![1, n]\!] \setminus J_0$.

donc $\mathrm{card}(K \setminus K_0) \leq \mathrm{card}([\![1, n]\!] \setminus J_0)$.

Alors $n' - r' \leq n - r$ car $K_0 \subset K$, $J_0 \subset [\![1, n]\!]$, $\mathrm{card}\, K_0 = r'$, $\mathrm{card}\, K = n'$, $\mathrm{card}\, J_0 = r$ et $\mathrm{card}\, [\![1, n]\!] = n$.

donc $\underline{\underline{n' - r' \leq n - r}}$

R

Question 5 **HEC 2011** G. FOUBART $\boxed{\text{F}}$

Q1. X suit la loi normale centrée réduite. Montrer que $Z = e^X$ est une variable aléatoire à densité et en donner une denité f_Z.

Q2. a est un élément de $[-1, 1]$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = \begin{cases} (1 + a\sin(2\pi \ln x))\, f_Z(x) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Plus une question non lue.

Je propose : T est une variable aléatoire à densité de densité f_a. Existence et valeur éventuelle de $E(T)$.

Question de cours : Comparaison des séries à termes positifs.

Q1 X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrons que Z est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

. Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1er cas.. $x \in]-\infty, 0]$. $Z^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid e^{X(\omega)} \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{A}$

2ème cas.. $x \in]0, +\infty[$. $Z^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid e^{X(\omega)} \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq \ln x\}$

$Z^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}(]-\infty, \ln x]) \in \mathcal{A}$

↑ X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ Z^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

Ceci achève de montrer que <u>Z est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.</u>

Notons F_Z la fonction de répartition de Z et Φ celle de X.

$\forall x \in]-\infty, 0],\quad F_Z(x) = P(Z^{-1}(]-\infty, x])) = P(\emptyset) = 0.$

$\forall x \in]0, +\infty[,\ F_Z(x) = P(Z^{-1}(]-\infty, x])) = P(X^{-1}(]-\infty, \ln x])) = \Phi(\ln x).$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} \Phi(\ln x) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

Rappelons que Φ est de classe C^1 et que $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Nous posons $\varphi = \Phi'$.

$x \mapsto \ln x$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Alors par composition $x \mapsto \Phi(\ln x)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Ainsi F_Z est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Comme F_Z est nulle sur $]-\infty, 0]$, F_Z est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$.

R

Sous ces conditions 1) F_Z est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}-\{0\}$

2) F_Z est continue à gauche en 0.

Notons que F_Z est continue à droite en 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to -\infty} \Phi(t) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \Phi(\ln x) = 0$.

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} F_Z(x) = 0 = F_Z(0)$; F_Z est continue à droite en 0.

F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

Alors <u>Z est une variable aléatoire à densité</u>.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_Z'(x) = 0$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $F_Z'(x) = \frac{1}{x}\Phi'(\ln x) = \frac{1}{x}\varphi(\ln x)$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\varphi(\ln x) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_Z est positive sur son domaine

de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_Z' sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble

fini de points. <u>f_Z est une densité de Z</u>.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x)^2/2} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q2 • $x \mapsto 2\pi \ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$ et sin est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition

$x \mapsto \sin(2\pi \ln x)$ est continue sur $]0,+\infty[$. $x \mapsto 1+\sin(2\pi\ln x)$ également.

f_Z coïncide avec F_Z' sur $]0,+\infty[$ et F_Z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$

Alors f_Z est continue sur $]0,+\infty[$.

Par produit f_a est continue sur $]0,+\infty[$.

f_a est nulle sur $]-\infty,0]$ donc f_a est continue sur $]-\infty,0]$.

Alors f_a est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

8

- $\forall x \in]-\infty, 0]$, $f_a(x) = 0$ donc $f_a(x) \geq 0$
  - Soit $x \in]0, +\infty[$. $|a \sin(2\pi \ln x)| = |a| |\sin(2\pi \ln x)| \leq |a| \leq 1$.

    Alors $-1 \leq a \sin(2\pi \ln x) \leq 1$; $1 + a \sin(2\pi \ln x) \geq 0$. Comme $f_Z(x) \geq 0$:

    $f_a(x) = (1 + a \sin(2\pi \ln x)) f_Z(x) \geq 0$.

Finalement $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) \geq 0}}$.

- + f_a est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc $\int_{-\infty}^{0} f_a(x)\,dx$ converge et vaut 0.

  + $\forall x \in]0, +\infty[$, $0 \leq f_a(x) = (1 + a \sin(2\pi \ln x)) f_Z(x) \underset{\uparrow}{\leq} 2 f_Z(x)$

  $0 \leq 1 + a \sin(2\pi \ln x) \leq 1 + |a| |\sin(2\pi \ln x)| \leq 1 + |a| \leq 2$

  De plus $\int_0^{+\infty} 2 f_Z(x)\,dx$ converge.

  Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx$ converge.

  Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. $x \mapsto \ln x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$; ceci justifie le changement de variable $u = \ln x$ dans ce qui suit.

$$\int_\varepsilon^A f_a(x)\,dx = \int_\varepsilon^A (1 + a \sin(2\pi \ln x)) \frac{1}{x} \varphi(\ln x)\,dx \underset{\substack{u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x}}}{=} \int_{\ln \varepsilon}^{\ln A} (1 + a \sin(2\pi u)) \varphi(u)\,du.$$

$$\int_\varepsilon^A f_a(x)\,dx = \int_{\ln \varepsilon}^{\ln A} \varphi(u)\,du + a \int_{\ln \varepsilon}^{\ln A} \sin(2\pi u) \varphi(u)\,du.$$

1) $\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx$ converge.

2) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln \varepsilon = -\infty$ et $\lim_{A \to +\infty} \ln A = +\infty$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du$ converge et vaut 1.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u) \varphi(u)\,du$ converge et $\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx = 1 + a \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u) \varphi(u)\,du$.

En toute rigueur il faudrait supposer $a \neq 0$, mais si $a = 0$ ...

R

$u \mapsto \sin(2\pi u)$ est impaire sur $\mathbb{R}$ et φ est paire sur $\mathbb{R}$. Donc $u \mapsto \sin(2\pi u)\varphi(u)$ est impaire sur $\mathbb{R}$. L'intégrale convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u)\varphi(u)du$ vaut alors 0.

Donc $\int_0^{+\infty} f_a(x)dx = 1$. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)dx = 1$.

Ceci achève de montrer que <u>f_a est une densité de probabilité.</u>

Soit T une variable aléatoire à densité de densité f_a. Montrons que $E(T)$ existe.

- $\int_{-\infty}^{0} x f_a(x)dx$ existe et vaut 0.
- Montrons que $\int_0^1 x f_a(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} x f_a(x)dx$ converge.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_1^A x f_a(x)dx = \int_1^A x\,(1+a\sin(2\pi \ln x))\,\varphi(\ln x)\,\frac{1}{x}\,dx \underset{u=\ln x}{=} \int_0^{\ln A} e^u(1+a\sin(2\pi u))\varphi(u)du$$

$$\int_1^A x f_a(x)dx = \int_0^{\ln A} (1+a\sin(2\pi u))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}+u}du$$

$$\int_1^A x f_a(x)dx = \int_0^{\ln A} (1+a\sin(2\pi u))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-1)^2}{2}}e^{1/2}du$$

$$\int_1^A x f_a(x)dx \underset{v=u-1}{=} \int_{-1}^{\ln A-1} (1+a\underbrace{\sin(2\pi(v+1))}_{\sin(2\pi v)})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}e^{1/2}dv$$

$$\int_1^A x f_a(x)dx = e^{1/2}\int_{-1}^{\ln A-1}(1+a\sin(2\pi v))\varphi(v)dv$$

$$\int_1^A x f_a(x)dx \overset{①}{=} e^{1/2}\int_{-1}^{\ln A-1}\varphi(v)dv + e^{1/2}a\int_{-1}^{\ln A-1}\sin(2\pi v)\varphi(v)dv \quad \boxed{ET}$$

$$\int_A^1 x f_a(x)dx \overset{②}{=} e^{1/2}\int_{\ln A-1}^{-1}\varphi(v)dv + a e^{1/2}\int_{\ln A-1}^{-1}\sin(2\pi v)\varphi(v)dv$$

R

$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v)\,dv$ converge et vaut 1.

$\forall v\in\mathbb{R},\ 0\le|\sin(2\pi v)\,\varphi(v)|=|\sin(2\pi v)|\,|\varphi(v)|\le|\varphi(v)|=\varphi(v)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent (en deux temps ...) la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty}|\sin(2\pi v)\,\varphi(v)|\,dv$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv$ est absolument convergente donc convergente.

De plus $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv=0$ car $v\mapsto\sin(2\pi v)\,\varphi(v)$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{A\to+\infty}(\ln A-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{A\to0^+}(\ln A-1)=-\infty$.

① donne alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A x f_a(x)\,dx=e^{1/2}\int_{-1}^{+\infty}\varphi(v)\,dv+a\,e^{1/2}\int_{-1}^{+\infty}\sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv$.

Donc $\int_1^{+\infty}x f_a(x)\,dx$ existe et vaut $e^{1/2}\int_{-1}^{+\infty}\varphi(v)\,dv+a\,e^{1/2}\int_{-1}^{+\infty}\sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv$

② donne alors $\lim\limits_{A\to0^+}\int_A^1 x f_a(x)\,dx=e^{1/2}\int_{-\infty}^{-1}\varphi(v)\,dv+a\,e^{1/2}\int_{-\infty}^{-1}\sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv$.

Donc $\int_0^1 x f_a(x)\,dx$ existe et vaut $e^{1/2}\int_{-\infty}^{-1}\varphi(v)\,dv+a\,e^{1/2}\int_{-\infty}^{-1}\sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv$.

Alors $\int_0^{+\infty}x f_a(x)\,dx$ converge et vaut $e^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v)\,dv+a\,e^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi v)\,\varphi(v)\,dv$

Donc $\int_0^{+\infty}x f_a(x)\,dx$ converge et vaut $e^{1/2}\times1+a\,e^{1/2}\times0$ donc $e^{1/2}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty}x f_a(x)\,dx$ converge et vaut $e^{1/2}$.

T possède une espérance qui vaut $e^{1/2}$.

R.

Question 6 HEC 2011 C. DAUDET

Soit n un entier naturel non nul.

Q1. Trouver un réel C_n pour que la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \begin{cases} C_n e^{-4nt} t^{n-1} & \text{si } t \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité.

Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 4.

Trouver, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la loi de $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité.

Question de cours : Définition d'une forme linéaire. Noyau et image d'une forme linéaire.

Q1 Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ g_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{t}{1/4n}}\, t^{n-1}}{(1/4n)^n\, \Gamma(n)} & \text{si } t \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

g_n est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4n}$ et n.

Notons que $f_n = \dfrac{C_n \Gamma(n)}{(4n)^n}\, g_n$. Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)dt$ existe et vaut 1.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt$ existe et vaut $\dfrac{C_n\Gamma(n)}{(4n)^n}$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = 1 \iff C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

* Donc si f_n est une densité de probabilité : $C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

* Réciproquement supposons que $C_n = \dfrac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$.

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt$ existe et vaut 1.

2) $C_n > 0$. Ainsi $\forall t \in]-\infty,0[,\ f_n(t) = 0 \geqslant 0$ et

$\forall t \in [0,+\infty[,\ f_n(t) = C_n e^{-4nt} t^{n-1} \geqslant 0$.

Donc f_n est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

3) $\forall t \in]-\infty,0[,\ f_n(t) = 0$ donc f_n est continue sur $]-\infty,0[$

$\forall t \in [0,+\infty[,\ f_n(t) = C_n e^{-4nt} t^{n-1}$ donc f_n est continue sur $[0,+\infty[$.

Alors f_n est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

ceci achève de montrer que f_n est une densité de probabilité.

<u>f_n est une densité de probabilité si et seulement si</u> $\underline{c_n = \frac{(4n)^n}{\Gamma(n)} = \frac{(4n)^n}{(n-1)!}}$.

Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre 4 donc la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4}$ et 1.

Le cours indique que $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4}$ et n.

<u>Toujours d'après le cours $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{4n}$ et n.</u>

<u>Remarque</u>.. Si $c_n = \frac{(4n)^n}{\Gamma(n)}$, $f_n = g$ donc f_n est une densité de Z_n.

1) $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

2) Les variables aléatoires de cette suite ont même espérance $\frac{1}{4}$ et même variance $1/16$.

La loi faible des grands nombres montre alors que la suite $\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{4}$.

<u>$(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{4}$.</u>

Question 7 HEC 2011 V. MESKHI

Image, noyau, valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Plus deux autres questions non lues.

Question de cours : *Théorème de la limite centrée. Définition d'un intervalle de confiance.*

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$.

Ainsi $\text{Ker } A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Donc 0 est valeur propre de A et $SEP(A, 0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

$\text{Im } A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$\dim \text{Im } A = 3 - \dim \text{Ker } A = 3 - 1 = 2$. De plus $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de Im A ayant pour cardinal 2. Alors $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de Im A.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$. $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$L_1 \leftrightarrow L_3$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1$ donne : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & \lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$. $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$ est une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$.

$\lambda \in Sp A \Leftrightarrow A - \lambda I_3$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda-1=0 \\ \text{ou} \\ \lambda(2-\lambda)=0 \end{cases}$

$\lambda \in Sp A \Leftrightarrow \lambda = -1$ ou $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2$. $Sp A = \{-1, 0, 2\}$.

__Remarque__.. A est diagonalisable car $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A admet trois valeurs propres distinctes

__Exercice__.. Diagonaliser A.

R

Question 8 **HEC 2011** E. PHILIP

f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)\,f(x-y)=\big(f(x)\big)^2$. On suppose que f n'est pas la fonction nulle..

On se propose de montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que $f(0)\neq 0$.

Q2. Si a est un réel tel que $f(a)=0$, montrer que $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=0$.

Q3. Conclure.

Q4. Donner un exemple d'une telle fonction.

Question de cours : X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé.

On suppose que $V(X)$ et $V(Y)$ existent. Montrer que $\big(\mathrm{cov}(X,Y)\big)^2\leqslant V(X)\,V(Y)$.

Q1 Supposons $f(0)=0$. $\forall x\in\mathbb{R},\ (f(x))^2=f(x+x)f(x-x)=f(2x)f(0)=0$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=0$. f est la fonction nulle. C'est contraire à l'hypothèse !

Ainsi $\underline{f(0)\neq 0}$.

Q2 Soit a un réel tel que $f(a)=0$. $\left(f\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2=f\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)f\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right)=f(a)f(0)=0$ $\quad f(a)=0$

donc $f\left(\frac{a}{2}\right)=0$.

$\underline{\forall a\in\mathbb{R},\ f(a)=0\Rightarrow f\left(\frac{a}{2}\right)=0}$.

Q3 Supposons que f s'annule sur $\mathbb{R}$. $\exists b\in\mathbb{R},\ f(b)=0$.

Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ f\left(\frac{b}{2^n}\right)=0$.

→ c'est vrai pour $n=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$f\left(\frac{b}{2^n}\right)=0$ donc $f\left(\frac{\frac{b}{2^n}}{2}\right)=0$ d'après Q2. Ainsi $f\left(\frac{b}{2^{n+1}}\right)=0$.

Ceci achève la récurrence.

$\forall n\in\mathbb{N},\ f\left(\frac{b}{2^n}\right)=0$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b}{2^n}=0$ et f est continue en 0.

Alors $0=\lim\limits_{n\to+\infty}f\left(\frac{b}{2^n}\right)=f(0)$; $f(0)=0$. Ceci est impossible.

Ainsi $\underline{f \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}}$.

Q4 exp est continue sur $\mathbb{R}$, n'est pas la fonction nulle et :

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \exp(x+y)\exp(x-y)=\exp(2x)=(\exp(x))^2$. $\underline{\exp \text{ convient}}$.

Exercice.. Trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y)=(f(x))^2$ $\quad$ (R. $\mathcal{S}=\{f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\mid\exists(\lambda,a)\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\lambda e^{ax}\}$).

Question 9 **HEC 2011** Vu par JF

$(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0, \theta]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \text{Max}(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Q1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à θ.

Q2. Montrer que $\left(n\left(\theta - X_n\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Question de cours : Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

---

Q1.. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de X_n.

X_n prend ses valeurs dans $[0,\theta]$ donc $\forall x\in]-\infty,0[,\ F_n(x)=0$ et

$\forall x\in [1,+\infty[,\ F_n(x)=1$.

Soit $x\in[0,\theta[$. $F_n(x) = P(X_n\leqslant x) = P(\text{Max}(U_1,U_2,\ldots,U_n)\leqslant x)$

$F_n(x) = P(\{U_1\leqslant x\}\cap\{U_2\leqslant x\}\cdots\cap\{U_n\leqslant x\})$. Par indépendance il vient

$$F_n(x) = \prod_{k=1}^{n} P(U_k\leqslant x) = \prod_{k=1}^{n}\frac{x-0}{\theta-0} = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x\in]-\infty,0[\\ (x/\theta)^n \text{ si } x\in[0,\theta[\\ 1 \text{ si } x\in[\theta,+\infty[\end{cases}.$$

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Soit $n\in\mathbb{N}$. $P(|X_n-\theta|\geqslant\varepsilon) = P(\{X_n-\theta\geqslant\varepsilon\}\cup\{X_n-\theta\leqslant-\varepsilon\})$.

$P(|X_n-\theta|\geqslant\varepsilon) = P(X_n\geqslant\theta+\varepsilon) + P(X_n\leqslant\theta-\varepsilon) = 0 + F_n(\theta-\varepsilon) = F_n(\theta-\varepsilon)$

$$P(|X_n-\theta|\geqslant\varepsilon) = \begin{cases} 0 \text{ si } \theta-\varepsilon<0 \\ \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n \text{ si } \theta-\varepsilon\geqslant 0\end{cases}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(|X_n-\theta|\geqslant\varepsilon) = \begin{cases} 0 \text{ si } \varepsilon>\theta \\ \left(1-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \text{ si } \varepsilon\leqslant\theta\end{cases}.$$

<u>1er cas</u>.. $\varepsilon>\theta$ Alors clairement $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n-\theta|\geqslant\varepsilon)=0$

<u>2ème cas</u>.. $\varepsilon\leqslant\theta$. Alors $0\leqslant 1-\frac{\varepsilon}{\theta}<1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n-\theta|\geqslant\varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n = 0$.

Finalement : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n-\theta|\geqslant\varepsilon)=0$.

<u>$(X_n)_{n\geqslant1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à θ.</u>

Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons G_n la fonction de répartition de $Y_n = n(\theta - X_n)$.

Y_n prend ses valeurs dans $[0, n\theta]$ donc $\forall x \in]-\infty, 0[$, $G_n(x) = 0$ et

$\forall x \in [n\theta, +\infty[$, $G_n(x) = 1$. Soit $x \in [0, n\theta[$.

$G_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(n(\theta - X_n) \leq x) = P(\theta - X_n \leq \frac{x}{n}) = P(\theta - \frac{x}{n} \leq X_n)$.

$G_n(x) = 1 - P(X_n < \theta - \frac{x}{n}) = 1 - P(X_n \leq \theta - \frac{x}{n}) = 1 - F_n(\theta - \frac{x}{n})$.

Or $x \in [0, n\theta[$ donc $\theta - \frac{x}{n} \in]0, \theta]$.

$\forall z \in [0, \theta[$, $F_n(z) = \left(\frac{z}{\theta}\right)^n$ et $F_n(\theta) = 1$. Donc $\forall z \in [0, \theta]$, $F_n(z) = \left(\frac{z}{\theta}\right)^n$.

Ainsi $G_n(x) = 1 - \left(\frac{\theta - \frac{x}{n}}{\theta}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0, n\theta[\\ 1 & \text{si } x \in [n\theta, +\infty[\end{cases}.$$

- Si $x \in]-\infty, 0[$: $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = 0$.
- Fixons alors x dans $[0, +\infty[$. Posons $n_0 = \text{Ent}\left(\frac{x}{\theta}\right) + 1$. Notons que $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in [\![n_0, +\infty[\![$. $n \geq n_0 > \frac{x}{\theta}$; $x < n\theta$. Alors $G_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n$ et

$1 - \frac{x}{n\theta} > 0$. $G_n(x) = 1 - e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{x}{n\theta} = 0$ donc $n \ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n\left(-\frac{x}{n\theta}\right) = -\frac{x}{\theta}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)\right) = -\frac{x}{\theta}$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim G_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $(n(\theta - X_n))$ converge vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$.

Question 10 **HEC 2011** Vu par JF

$A = (a_{i,j})$ est la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Q1. Justifier l'inversibilité de A et exprimer A^{-1} en fonction de A.

Q2. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n$

Question de cours : Loi exponentielle.

Q1.. A est la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Le cours indique alors que A est une matrice orthogonale. Ainsi $\underline{A \text{ est inversible et } A^{-1} = {}^tA}$.

Q2.. Soit $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Soit Y l'élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Posons $Z = AY = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $z_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \times 1 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$.

Alors $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} z_i \times 1\right| = |\langle Z, Y\rangle| = |\langle AY, Y\rangle|$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|\langle AY, Y\rangle| \leqslant \|AY\|\,\|Y\|$.

Or $\|AY\|^2 = \langle AY, AY\rangle = {}^t(AY)AY = {}^tY\,{}^tA A Y = {}^tY I_n Y = {}^tY Y = \|Y\|^2$.

Donc $\|AY\| = \|Y\|$ car $\|AY\| \geqslant 0$ et $\|Y\| \geqslant 0$ (ou comme (∗)).

Alors $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant \|AY\|\,\|Y\| = \|Y\|\,\|Y\| = \|Y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n$.

$$\underline{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n.}$$

(∗) <u>Exercice..</u> $M \in M_n(\mathbb{R})$.

Montrer que M est orthogonale si et seulement si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|MX\| = \|X\|$.