Voici des questions sans préparation de l'oral HEC 2010 obtenues auprès des élèves. Les énoncés ne sont pas garantis. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2010 (suite)

Question 13 HEC 2010 G. FOUBART $\boxed{\text{F 1 ou 0}}$

E est un espace vectoriel de dimension finie non nulle. f est un endomorphisme de E tel que $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.

JF Et si E est de dimension quelconque ?

Cours *Fonction convexe.*

Question 14 HEC 2010 F. HUA $\boxed{\text{F 1}}$

L appartient à $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $M = {}^tLL$.

Q1. Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Q2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur L pour que les valeurs propres de M soient strictement positives.

Cours *Théorème de convolution.*

Question 15 HEC 2010 J. MESNILDREY $\boxed{\text{F 1}}$

E est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Φ est l'endomorphisme de E qui à tout éléments $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe $(u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$.

Déterminer $\mathrm{Ker}\,\Phi$, $\mathrm{Ker}(\Phi \circ \Phi)$ et $\mathrm{Im}\,\Phi$.

Cours *Définition d'un estimateur et d'un estimateur sans biais.*

Question 16 HEC 2010 J.D. FOATA $\boxed{\text{F 1}}$

X_1, X_2,..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A})$ prenant deux valeurs -1 et -1.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i) = -1 = q = 1 - p$.

Q1. Trouver la loi de $Yk = X_1 X_2 \dots X_k$ pour tout k dans $[\![1, n]\!]$.

Q2. Ici $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer que Y_1, Y_2, ..., Y_n sont deux à deux non corrélées.

Question 17 HEC 2010 M. PARIN $\boxed{\text{F 1}}$

$E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un élément de E. $\forall M \in E$, $\Phi(M) = {}^tAM + MA$.

Q1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

Q2. Donner la matrice de Φ dans la base canonique de E.

Q3. Φ est-il diagonalisable si c=b ? si a=b=d=1 et c=o ?

Cours *Définition d'un estimateur et du biais d'un estimateur.*

Question 18 HEC 2010 T. VERGER $\boxed{\text{F 1}}$

On lance une pièce qui donne pile avec la probabilité p. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers nécéssaires pour obtenir un pile. Puis on tire un numéro dans une urne contenant autant de boules numérotées de 1 à la valeur de X.

N est la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Trouver la loi de N, sous forme de somme.

Cours *Fonction de plusieurs variables continue (resp. C^1).*

Question 19 HEC 2010 E. JARDIN $\boxed{\text{F 1}}$

D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.

Montrer que si C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $C^2 = D$ alors C est une matrice diagonale.

Cours *Définition de la convergence d'une intégrale. Intégrale de Riemann.*

Question 20 HEC 2010 J. DIAZ $\boxed{\text{F } 2^+}$

(Xn) est une suite de variable aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si la suite de terme général $E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)$ converge vers 0.

Question 21 HEC 2010 Vu par JFC

f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Q1. Trouver $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Q2. Montrer que 0, -1, 2 sont valeurs propres de f.

Q3. Montrer que tout polynôme annulateur de f est divisible par $P = X(X+1)(X-2)$.

JF Réciproque ?

Q4. n appartient à $\mathbb{N}^*$. Calculer le reste dans la division euclidienne de X^n par P. Calculer A^n.

Cours *Théorème de la limite centrée. Intervalle de confiance.*

Question 22 ENSAE 2010 J.D. FOATA

E est un espace vectoriel de dimension 3 et f est un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer que $\operatorname{rg} f = 2$.

Question 13 HEC 2010 G. FOUBART F1 ... ou FO .

E est un espace vectoriel de dimension finie non nulle. f est un endomorphisme de E tel que $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.

JF Et si E est de dimension quelconque ?

Cours *Fonction convexe.*

---

1 * $\underline{\dim \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E) + \dim \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E) = \dim E}$ d'après le théorème du rang.

2 * Soit $x \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$.

$f(x)=x$ et $\exists t \in E,\ x = (f-\mathrm{Id}_E)(t)$.

$$\begin{cases} x = f(t)-t \\ x = f(x) = f^2(t)-f(t) \\ x = f^2(x) = f^3(t)-f^2(t) \end{cases}$$

En ajoutant on a $3x = f^3(t) - t \overset{f^3=\mathrm{Id}_E}{=} t - t = 0_E$. $x = 0_E$.

$\underline{\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}}$

Comme E est de dimension finie, 1 et 2 montrent que $\underline{\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)}$ et $\underline{\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)}$ sont supplémentaires.

Supposons maintenant que E est de dimension quelconque.

Soit $x \in E$. Montrons par analyse / synthèse que : $\exists! (y,z) \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$, $x = y+z$

* <u>Analyse (Unicité)</u>.

<u>Supposons</u> que : $\exists (y,z) \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$, $x = y+z$.

$f(y) = y$. Mieux : $\forall k \in \mathbb{N}, f^k(y) = y$.

$\exists t \in E$, $z = (f-\mathrm{Id}_E)(t)$. $z = f(t) - t$

$$\begin{cases} x = y + z = y + f(t) - t \\ f(x) = y + f^2(t) - f(t) \\ f^2(x) = y + f^3(t) - f^2(t) = y + t - f^2(t) \end{cases}$$

En ajoutant on obtient $x + f(x) + f^2(x) = 3y$.

Ainsi $y=\frac{1}{3}(x+f(x)+f^2(x))$ et $z = x-\frac{1}{3}(x+f(x)+f^2(x)) = \frac{1}{3}(2x-f(x)-f^2(x))$.

D'où l'unicité du couple (y,z).

*** Synthèse / Existence.**

Posons $y=\frac{1}{3}(x+f(x)+f^2(x))$ et $z = x-\frac{1}{3}(x+f(x)+f^2(x))$ 1.. $y+z=x$;

2.. $f(y)=\frac{1}{3}(f(x)+f^2(x)+f^3(x)) = \frac{1}{3}(f(x)+f^2(x)+x) = y$; $y \in \mathrm{Ker}(f-Id_E)$;

3.. $z=\frac{1}{3}(2x-f(x)-f^2(x)) = \frac{1}{3}(2Id_E-f-f^2)(x) = \frac{1}{3}\left((f-Id_E)\circ(-f-2Id_E)\right)(x)$

$z=(f-Id_E)\left(-\frac{1}{3}(f+2Id_E)(x)\right)$; $z \in \mathrm{Im}(f-Id_E)$.

D'où l'existence du couple (y,z).

Ainsi $\exists!(y,z) \in \mathrm{Ker}(f-Id_E) \times \mathrm{Im}(f-Id_E)$, $x=y+z$ et ceci pour tout x dans E.

$\mathrm{Ker}(f-Id_E)$ et $\mathrm{Im}(f-Id_E)$ sont supplémentaires.

Question 14 **HEC 2010** F. HUA $\boxed{\text{F 1}}$

L appartient à $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $M = {}^tLL$.

Q1. Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Q2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur L pour que les valeurs propres de M soient strictement positives.

Cours *Théorème de convolution.*

Q1 • $M \in M_k(\mathbb{R})$

• ${}^tM = {}^t({}^tLL) = {}^tL\,{}^t({}^tL) = {}^tLL = M$, M est symétrique.

M est symétrique à coefficients réels donc <u>M est diagonalisable</u>.

Soit $\lambda \in Sp\,M$. $\exists X \in M_{k,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}$, $MX = \lambda X$.

${}^tLLX = \lambda X$; ${}^tX\,{}^tL\,LX = \lambda\,{}^tXX$; $\|LX\|^2 = \lambda \|X\|^2$ et $\|X\|^2 \neq 0$

Donc $\lambda = \dfrac{\|LX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0$.

norme de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$

norme de $M_{k,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique de $M_{k,1}(\mathbb{R})$.

<u>Les valeurs propres de M sont positives ou nulles.</u>

Q2 * <u>Supposons que $\{X \in M_{k,1}(\mathbb{R}) \mid LX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. (*)</u>

Soit $\lambda \in Sp\,M$. D'après ce qui précède il existe un élément non nul X de $M_{k,1}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda = \dfrac{\|LX\|^2}{\|X\|^2}$. Supposons que $\lambda = 0$.

Alors $\|LX\|^2 = 0$. $\|LX\| = 0$. $LX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. D'après l'hypothèse (*) $X = 0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}$!!

Ainsi $\lambda \neq 0$. Donc $\lambda > 0$.

<u>Alors les valeurs propres de M sont strictement positives.</u>

* <u>Réciproquement supposons que les valeurs propres de M sont strictement positives.</u> Montrons par l'absurde que l'on a (*).

Supposons qu'il existe un élément non nul X de $M_{k,1}(\mathbb{R})$ tel que $LX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $MX = {}^tLLX = {}^tL\,0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}$.

$MX = 0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}$ et $X \neq 0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}$ donc 0 est valeur propre de M. ceci est impossible.

Ainsi $\{X \in M_{k,1}(\mathbb{R}) \mid JX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}\}$.

Les valeurs propres de M sont strictement positives si et seulement si

$\{X \in M_{k,1}(\mathbb{R}) \mid JX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}\}$ ... ou si et seulement si

" $\mathrm{Ker}\, J = \{0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}\}$ ".

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^k$ et de $\mathbb{R}^n$ est J.

$\mathrm{Sp}\, M \subset \mathbb{R}_+^* \iff \{X \in M_{k,1}(\mathbb{R}) \mid JX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{0_{M_{k,1}(\mathbb{R})}\} \iff \mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{R}^k}\}$.

$\mathrm{Sp}\, M \subset \mathbb{R}_+^* \iff \dim \mathrm{Ker}\, f = 0 \underset{\text{relation du rang}}{\iff} \dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{R}^k \iff \mathrm{rg}\, f = k \iff \mathrm{rg}\, J = k$.

Les valeurs propres de M sont strictement positives si et seulement si $\mathrm{rg}\, J = k$.

R

Question 15 HEC 2010 J. MESNILDREY $\boxed{\text{F 1}}$

E est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Φ est l'endomorphisme de E qui à tout éléments $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$.

Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$, $\operatorname{Ker}(\Phi\circ\Phi)$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

Cours *Définition d'un estimateur et d'un estimateur sans biais.*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ un élément de E.

$(u_n)_{n\geq 0}\in \operatorname{Ker}\phi \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=0 \Leftrightarrow (u_n)_{n\geq 0}$ est une suite constante.

Ker ϕ est l'ensemble des suites réelles constantes, indexées par $\mathbb{N}$.

Ker ϕ est la droite vectorielle engendrée par la suite de E constante et égale à 1

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ un élément de E

$\phi((u_n)_{n\geq 0}) = (u_{n+1}-u_n)_{n\geq 0}$

$\phi^2((u_n)_{n\geq 0}) = (u_{n+2}-u_{n+1}-(u_{n+1}-u_n))_{n\geq 0} = (u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n)_{n\geq 0}$.

Alors Ker $\phi^2 = \{(u_n)_{n\geq 0}\in E \mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=0\}$.

L'équation $z\in\mathbb{C}$ et $z^2-2z+1=0$ admet une solution et une seule : 1.

Le cours sur ces suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 montre alors que Ker ϕ^2 est le plan vectoriel de E engendré par les suites $(1)_{n\geq 0}$ et $(n)_{n\geq 0}$.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de E. Posons $(v_n)_{n\geq 0} = \phi((u_n)_{n\geq 0})$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ v_k = u_{k+1}-u_k$. Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n-u_0$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0$.

Ceci laisse apparaître que ϕ est surjectif et qu'ainsi Im $\phi = E$.

Notons le.

Soit $(\omega_n)_{n\geq 0}$ une suite appartenant à E.

Posons $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$.

1) $(u_n)_{n\geq 0} \in E$

2) $\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n} \omega_k - \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \omega_n$

$\rightarrow u_1 - u_0 = \sum_{k=0}^{1-1} \omega_k - 0 = \omega_0$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \omega_n$. Donc $\phi((u_n)_{n\geq 0}) = (\omega_n)_{n\geq 0}$.

$\forall (\omega_n)_{n\geq 0} \in E$, $\exists (u_n)_{n\geq 0} \in E$, $\phi((u_n)_{n\geq 0}) = (\omega_n)_{n\geq 0}$.

ϕ est surjectif. $\mathrm{Im}\ \phi = E$.

Exercice.. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de ϕ.

R. $Sp\ \phi = \mathbb{R}$. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $SEP(\phi, \lambda) = \mathrm{Vect}(((\lambda+1)^n)_{n\geq 0})$.

Question 16 HEC 2010 J.D. FOATA **F1**

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A})$ prenant deux valeurs -1 et -1.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i) = -1 = q = 1-p$.

Q1. Trouver la loi de $Yk = X_1 X_2 \dots X_k$ pour tout k dans $[\![1,n]\!]$.

Q2. Ici $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer que $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont deux à deux non corrélées.

Q1 Soit $k \in [\![1,n]\!]$. $Y_k(\Omega) = \{-1, 1\}$. Posons $\alpha_k = P(Y_k = 1)$.

$E(Y_k) = 1 \times \alpha_k + (-1)(1-\alpha_k) = 2\alpha_k - 1$.

Par indépendance : $E(Y_k) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_k) = (1 \times p + (-1)(1-p))^k = (2p-1)^k$

Alors $2\alpha_k - 1 = (2p-1)^k$; $\alpha_k = \frac{1}{2}(1 + (2p-1)^k)$.

Ainsi $P(Y_k = 1) = \frac{1}{2}(1+(2p-1)^k)$ et $P(Y_k = -1) = 1 - \frac{1}{2}(1+(2p-1)^k) = \frac{1}{2}(1-(2p-1)^k)$

Q2 $p = \frac{1}{2}$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(Y_k = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(Y_k = -1) = \frac{1}{2}$.

Donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $E(Y_k) = 0$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i < j$.

$\text{cov}(Y_i, Y_j) = E(Y_i Y_j) - E(Y_i)E(Y_j) = E(Y_i Y_j)$.

$\text{cov}(Y_i, Y_j) = E(X_1 X_2 \cdots X_i X_1 X_2 \cdots X_j) \underset{i<j}{=} E(X_1^2 X_2^2 \cdots X_i^2 X_{i+1} \cdots X_j)$

$X_1, X_2, \dots, X_j$ sont indépendantes. $X_1^2, X_2^2, \dots, X_i^2, X_{i+1}, \dots, X_j$ le sont également.

Alors $\text{cov}(Y_i, Y_j) = \left(\prod_{k=1}^{i} E(X_k^2)\right)\underbrace{\left(\prod_{k=i+1}^{j} E(X_k)\right)}_{=0 \ (i+1 \leq j)} = 0$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i < j \Rightarrow \text{cov}(Y_i, Y_j) = 0$.

La covariance étant symétrique :

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \text{cov}(Y_i, Y_j) = 0$.

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont deux à deux non corrélées.

Exercice.. Calculer $\text{cov}(Y_i, Y_j)$ dans le cas général.

R1

Question 17 **HEC 2010** M. PARIN $\boxed{\textbf{F 1}}$

$E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un élément de E. $\forall M\in E$, $\Phi(M)={}^tAM+MA$.

Q1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

Q2. Donner la matrice de Φ dans la base canonique de E.

Q3. Φ est-il diagonalisable si c=b ? si a=b=d=1 et c=o ?

Cours *Définition d'un estimateur et du biais d'un estimateur.*

Q1 • $\forall M\in E$, ${}^tAM+MA\in E$. Φ est une application de E dans E.

• Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $(M,N)\in E^2$

$\Phi(\lambda M+N)={}^tA(\lambda M+N)+(\lambda M+N)A=\lambda\,{}^tAM+{}^tAN+\lambda MA+NA=\lambda({}^tAM+MA)+{}^tAN+NA$.

$\Phi(\lambda M+N)=\lambda\Phi(M)+\Phi(N)$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(M,N)\in E^2$, $\Phi(\lambda M+N)=\lambda\Phi(M)+\Phi(N)$. Φ est linéaire.

Donc Φ est un endomorphisme de E.

Q2 On pose $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\mathcal{B}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})=E$.

$\Phi(E_{11})=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\b&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a&b\\b&0\end{pmatrix}=2aE_{11}+bE_{12}+bE_{21}$

$\Phi(E_{12})=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a\\0&b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c&d\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&a+d\\0&b\end{pmatrix}=cE_{11}+(a+d)E_{12}+bE_{22}$

$\Phi(E_{21})=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&0\\d&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\a&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&0\\a+d&b\end{pmatrix}=cE_{11}+(a+d)E_{21}+bE_{22}$

$\Phi(E_{22})=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&c\\0&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&c\\c&2d\end{pmatrix}=cE_{12}+cE_{21}+2dE_{22}$

Ainsi $M_{\mathcal{B}}(\Phi)=\begin{pmatrix}2a&c&c&0\\b&a+d&0&c\\b&0&a+d&c\\0&b&b&2d\end{pmatrix}$.

Q3 1er cas. b=c. Alors $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ est symétrique et à coefficients réels donc $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ est diagonalisable. Φ est diagonalisable.

<u>$2^{ième}$ Cas.</u> — <u>$a=b=d=1$ et $c=0$</u>

$$\Pi_B(\phi)=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&2&0&0\\1&0&2&0\\0&1&1&2\end{pmatrix}.$$ $\Pi_B(\phi)$ est triangulaire inférieure.

Sp ϕ = Sp $\Pi_B(\phi)=\{2\}$. Supposons ϕ diagonalisable.

Alors $E=SEP(\phi,2)=\operatorname{Ker}(\phi-2Id_E)$. $\phi-2Id_E=0_{\mathcal{L}(E)}$. $\phi=2Id_E$.

Donc $\Pi_B(\phi)=2I_4$!!

Ainsi <u>ϕ n'est pas diagonalisable.</u>

Question 18 **HEC 2010** T. VERGER $\boxed{\text{F 1}}$

On lance une pièce qui donne pile avec la probabilité p. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers nécéssaires pour obtenir un pile. Puis on tire un numéro dans une urne contenant autant de boules numérotées de 1 à la valeur de X.

N est la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Trouver la loi de N, sous forme de somme.

Cours *Fonction de plusieurs variables continue (resp. C^1).*

X suit la loi géométrique de paramètre p. On pose $q = 1-p$.

$(\{X=k\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi complet d'événements.

$N(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$. $P(N=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)\, P_{\{X=k\}}(N=n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P_{\{X=k\}}(N=n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k<n \\ \frac{1}{k} & \text{si } k \geqslant n \end{cases}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{\underline{P(N=n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k}\, p\, q^{k-1}}}$ ou $\underline{\underline{\frac{p}{q} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{q^k}{k}}}$

Exercice 1.. Calculer $E(N)$.

Exercice 2.. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(N=n) = -\frac{p}{q}\ln p - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\, p\, q^{k-1}$.

...au cher près $(n=1)$

Question 19 **HEC 2010** E. JARDIN $\boxed{\text{F 1}}$

D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.

Montrer que si C est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $C^2 = D$ alors C est une matrice diagonale.

Cours *Définition de la convergence d'une intégrale. Intégrale de Riemann.*

$C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $C^2 = D$. Alors $CD = CC^2 = C^3 = C^2C = DC$; C et D commutent.

$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

$\mathrm{Sp}\, D = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts donc les sous-espaces propres de D sont des droites vectorielles.

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $DE_i = \lambda_i E_i$ et $E_i \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $SEP(D, \lambda_i) = \mathrm{Vect}(E_i)$.

$CD = DC$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $CDE_i = DCE_i$; $C(\lambda_i E_i) = DCE_i$;

$D(CE_i) = \lambda_i (CE_i)$; $CE_i \in SEP(D, \lambda_i) = \mathrm{Vect}(E_i)$. $\exists \sigma_i \in \mathbb{C}$, $CE_i = \sigma_i E_i$

Alors $C = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. C est diagonale.

<u>Exercice 1</u>.. Retrouver ce résultat à partir de $DC = CD$ en utilisant le produit matriciel.

<u>Exercice 2</u>.. Trouver le nombre d'éléments de $\{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid C^2 = D\}$.

Question 20 **HEC 2010** J. DIAZ $\boxed{\textbf{F } 2^+}$

(Xn) est une suite de variable aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si la suite de terme général $E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)$ converge vers 0.

---

* Supposons que la suite de terme général $E\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)$ converge vers 0.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in [\![n_0, +\infty[\![$.

$t \mapsto \dfrac{t}{1+t}$ est croissante sur $]0, +\infty[$ (sa dérivée est $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t)^2}$)

Alors $\{|X_n| \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|} \geqslant \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}$

donc $0 \leqslant P(|X_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|} \geqslant \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) \leqslant \dfrac{E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)}{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$ d'après

l'inégalité de Markov ($\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et possède une espérance).

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)}{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right) = 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n| \geqslant \varepsilon) = 0$ et ceci

pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi <u>$(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers 0.</u>

* Supposons que $(X_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers 0.

Posons $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $Y_n = \dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}$. Notons que $(Y_n)_{n\geqslant n_0}$ converge en probabilité vers 0. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $0 \leqslant Y_n < 1$.

donc $\forall \varepsilon \in [1, +\infty[$, $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $P(|Y_n| \geqslant \varepsilon) = P(Y_n \geqslant \varepsilon) = 0$.

- $\forall \varepsilon \in [1, +\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n| \geqslant \varepsilon) = 0$.
- Soit $\varepsilon \in]0, 1[$.

$\{|Y_n|\geq \varepsilon\} = \{Y_n \geq \varepsilon\} = \left\{\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\geq \varepsilon\right\} = \{|X_n|\geq \varepsilon+\varepsilon|X_n|\} = \left\{|X_n|\geq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right\}$ pour tout n dans $[\![n_0,+\infty[\![$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n|\geq \varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|X_n|\geq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \overset{\downarrow}{=} 0$ — $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers 0 et $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\in\mathbb{R}_+^*$.

$(Y_n)_{n\geq n_0}$ converge en probabilité vers 0.

Montrons alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n)=0$ en utilisant la définition.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Soit $n\in[\![n_0,+\infty[\![$. Posons $A_n=\{Y_n\geq \frac{\varepsilon}{2}\}$.

Notons que $0\leq Y_n = \mathbb{1}_{A_n}Y_n + \mathbb{1}_{\bar{A}_n}Y_n \overset{Y_n\leq 1}{\leq} \mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{\bar{A}_n}Y_n$.

Notons que $\mathbb{1}_{\bar{A}_n}Y_n < \varepsilon/2$

$\forall \omega\in A_n,\ (\mathbb{1}_{\bar{A}_n}Y_n)(\omega) = \mathbb{1}_{\bar{A}_n}(\omega)Y_n(\omega) = 0 < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall \omega\in \bar{A}_n,\ (\mathbb{1}_{\bar{A}_n}Y_n)(\omega) = Y_n(\omega) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $\forall \omega\in\Omega$, $\mathbb{1}_{\bar{A}_n}Y_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi $0\leq Y_n\leq \mathbb{1}_{A_n}+\frac{\varepsilon}{2}$.

Par croissance de l'espérance $0\leq E(Y_n)\leq E(\mathbb{1}_{A_n})+\frac{\varepsilon}{2} = P(A_n)+\frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ 0\leq E(Y_n) < P(A_n)+\frac{\varepsilon}{2} = P(Y_n\geq\frac{\varepsilon}{2})+\varepsilon/2 = P(|Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{2})+\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ |E(Y_n)| < P(|Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{2})+\frac{\varepsilon}{2}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{2})=0$. Alors $\exists n_1\in[\![n_0,+\infty[\![,\ \forall n\in[\![n_1,+\infty[\![,\ P(|Y_n|\geq\frac{\varepsilon}{2})<\frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $\forall n\in[\![n_1,+\infty[\![,\ |E(Y_n)|<\varepsilon$.

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists n_1\in[\![n_0,+\infty[\![,\ \forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ n\geq n_1 \Rightarrow |E(Y_n)|<\varepsilon$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n)=0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)=0$. cqfd.

Question 21 **HEC 2010** Vu par JFC

f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Q1. Trouver $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Q2. Montrer que 0, -1, 2 sont valeurs propres de f.

Q3. Montrer que tout polynôme annulateur de f est divisible par $P = X(X+1)(X-2)$.

JF Réciproque ?

Q4. n appartient à $\mathbb{N}^*$. Calculer le reste dans la division euclidienne de X^n par P. Calculer A^n.

Cours *Théorème de la limite centrée. Intervalle de confiance.*

Q1 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Posons $E = \mathbb{R}^3$.

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{Vect}(e_2+e_3, e_1+e_3, e_2+e_3) = \operatorname{Vect}(e_2+e_3, e_1+e_3)$.

La famille (e_2+e_3, e_1+e_3) est clairement libre.

(e_2+e_3, e_1+e_3) est une base de $\operatorname{Im} f$. $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

Alors $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1$. $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle.

$f(e_1) = f(e_3)$; $f(e_1 - e_3) = 0_E$. $e_1 - e_3$ est alors un élément non nul de la droite vectorielle $\operatorname{Ker} f$.

$(e_1 - e_3)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

Q2 $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$ donc 0 est valeur propre de f.

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un élément de E

$u \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (A + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases}$

$\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) = \{xe_1 - xe_2 \,;\, x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(e_1 - e_2)$.

$-1 \in \operatorname{Sp} f$ et $\operatorname{SEP}(f, -1) = \operatorname{Vect}(e_1 - e_2)$.

$u \in \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ z=3x \\ x+2x-3x=0 \end{cases}$

$\operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) = \{xe_1 + 2xe_2 + 3xe_3 \,;\, x \in \mathbb{R}\}$.

$\operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) = \operatorname{Vect}(e_1 + 2e_2 + 3e_3)$.

$2 \in \mathrm{Sp}\, f$ et $SE_{(f,2)} = \mathrm{Vect}(e_1 + 2e_2 + 3e_3)$.

(Q3) Soit Q un polynôme annulateur de f.

$\mathrm{Sp}\, f \subset \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$

Ainsi $0, -1, 2$ sont des zéros de Q et Q est divisible par $P = X(X+1)(X-2)$.

• <u>Remarque</u>.. Réciproquement soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ divisible par P.
$\exists S \in \mathbb{R}[X],\ Q = SP$. $\quad Q(f) = S(f) \circ P(f)$. Notons que

$P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et ainsi nous avons $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Il suffit de montrer que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Or $P(A) = A(A+I_3)(A-2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

$P(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Finalement les polynômes annulateurs de f sont les polynômes divisibles par P. Notons que P est le polynôme minimal de f...

(Q4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons T_n et R_n le quotient et le reste dans la division de X^n par P. $\deg R_n < 3$. $\exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3,\ R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$

$X^n = T_n P + R_n$. $\forall \alpha \in \{0, -1, 2\},\ P(\alpha) = 0$ donc $\forall \alpha \in \{0, -1, 2\},\ \alpha^n = R_n(\alpha)$

Alors : $\begin{cases} 0 = c_n \\ (-1)^n = a_n - b_n + c_n \\ 2^n = 4a_n + 2b_n + c_n \end{cases}$; $\begin{cases} c_n = 0 \\ a_n - b_n = (-1)^n \\ 2a_n + b_n = 2^{n-1} \end{cases}$; $\begin{cases} c_n = 0 \\ a_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n-1}\right) \\ b_n = \frac{1}{3}\left(-2(-1)^n + 2^{n-1}\right) \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le reste dans la division de X^n par P est $\frac{1}{3}[(-1)^n + 2^{n-1}]X^2 + \frac{1}{3}[-2(-1)^n + 2^{n-1}]X$.

$A^n = T_n(A)P(A) + R_n(A) \overset{P(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}{=} R_n(A) = a_n A^2 + b_n A = a_n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & a_n \\ a_n + b_n & 2a_n & a_n + b_n \\ 2a_n + b_n & 2a_n + b_n & 2a_n + b_n \end{pmatrix} = \frac{(-1)^n}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2^{n-1}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Question 22 **ENSAE 2010** J.D. FOATA

E est un espace vectoriel de dimension 3 et f est un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer que $\operatorname{rg} f = 2$.

---

f n'est pas injectif car si f est injectif, f^3 l'est également !!

Donc $\dim \operatorname{Ker} f \geq 1$ et $\underline{\dim \operatorname{Im} f \leq 2}$.

$f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\exists x \in E$, $f^2(x) \neq 0_E$.

$(f(x), f^2(x))$ est une famille d'éléments de $\operatorname{Im} f$. Notons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha f(x) + \beta f^2(x) = 0_E$.

$0_E = f(0_E) = \alpha f^2(x) + \beta f^3(x) = \alpha f^2(x)$ et $f^2(x) \neq 0_E$. Alors $\alpha = 0$.

$\beta f^2(x) = 0_E$ et $f^2(x) \neq 0_E$. Alors $\beta = 0$.

Ainsi $(f(x), f^2(x))$ est une famille libre de $\operatorname{Im} f$. $\underline{\dim \operatorname{Im} f \geq 2}$.

Finalement $\dim \operatorname{Im} f = 2$. $\underline{\operatorname{rg} f = 2}$.

Exercice. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.