EXERCICES SANS PRÉPARATION 2009

Question 1 HEC 2009-1

Soit $(E, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$. Soit f et g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

Q1. Prouver qu'il existe un endomorphisme ϕ de E ayant des valeurs propres positives tel que $f = \phi^2$ (ϕ^2 désigne $\phi \circ \phi$).

Q2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$.

On traitera le cas général où les valeurs propres de f et de g sont des réels positifs ou nuls. On ajoutera ϕ symétrique !

Question 2 HEC 2009-2

Q1. Montrer que pour $z > 0$, l'intégrale $J(z) = \displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ est convergente.

Q2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J(z)$ est équivalent en $+\infty$ $\dfrac{e^{-z}}{z}$.

Question 3 HEC 2009-3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ une famille de n variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω, indépendantes et de même loi .

On définit la variable aléatoire : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Q1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'espérance $E(e^{xS_n})$ existe et $\forall a \in \mathbb{R}$, $P([S_n \geqslant a]) \leqslant e^{-ax}\, E(e^{xS_n})$.

Q2. Appliquer ce résultat au cas où chaque X_i suit la loi définie par : $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = 1 - p$.

Question 4 HEC 2009-4

Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0,1[$.

Q1. Montrer que pour $a > 0$ fixé, $P([X_n \leqslant a])$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Q2. Montrer que si $b > 0$,

$$P\left(\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right]\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \mathrm{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$$

Qu'en déduit-on pour $P([|X_n - np| \leqslant nb])$ quand n tend vers $+\infty$?

Question 5 HEC 2009-5

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant comme matrice u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Q1. On pose $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,-1,1,1)$, $v_3 = (1,0,1,0)$. Calculer $f(v_i)$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$.

Q2. Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à une base de vecteurs propres de M contenant le plus possible de 0, les autres termes étant $+1$ ou -1.

Q3. Déterminer M^2, puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Q4. Déterminer à l'aide de P, la matrice des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ sur chacun des sous-espaces propres de M.

Question 6 HEC 2009-6

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $n \geqslant 1$ et $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon indépendant, identiquement distribué de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose λ inconnu et on cherche à l'estimer par un intervalle de confiance.

On pose : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$ et $T_n = \sqrt{n}\, \dfrac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

A l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

Question 7 HEC 2009-7

Un enfant a dans chacune des deux poches de son blouson, un paquet contenant N bonbons. A chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit, de manière indépendante et avec la probabilité p, sa poche de gauche pour un prendre un.

Q1. Lorsqu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il en reste k dans l'autre poche ?

Q2. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de bonbon dans les deux poches simultanément ?

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N}$.

Question 8 HEC 2009-8

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$.

Q1. Étudier la monotonie et la limite éventuelle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n^2 = 2n + x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$.

Q3. En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra admettre que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

R..

Question 1 HEC 2009-1

Soit $(E, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$. Soit f et g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

Q1. Prouver qu'il existe un endomorphisme ϕ de E ayant sdes valeurs propres positives tel que $f = \phi^2$ (ϕ^2 désigne $\phi \circ \phi$).

Q2. Montrer que $\operatorname{Ker}(f+g) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.

On traitera le cas général où les valeurs propres de f et de g sont des réels positifs ou nuls. On ajoutera ϕ symétrique !

Q1 f est un endomorphisme symétrique de E donc f est diagonalisable. Mieux il existe une base orthonormée $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$.

$\operatorname{Sp} f=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$. Alors $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\alpha_k\geqslant 0$. Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\phi(e_k)=\sqrt{\alpha_k}\,e_k$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\phi^2(e_k)=(\sqrt{\alpha_k})^2e_k=\alpha_k e_k=f(e_k)$.

Ainsi ϕ^2 et f sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$. Alors $\phi^2=f$. La matrice de ϕ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est une matrice diagonale donc symétrique. Alors ϕ est symétrique.

$\operatorname{Sp}\phi=\operatorname{Sp} M_{\mathcal{B}}(\phi)=\operatorname{Sp}\operatorname{Diag}(\sqrt{\alpha_1},\sqrt{\alpha_2},\dots,\sqrt{\alpha_n})$. Ainsi les valeurs propres de ϕ sont positives.

<u>Il existe un endomorphisme symétrique ϕ de E ayant des valeurs propres positives tel que $\phi^2=f$.</u>

<u>Remarque</u>.. De même il existe un endomorphisme symétrique ψ de E ayant des valeurs propres positives tel que $\psi^2=g$.

Q2 Soit $x\in E$.

- Supposons que $x\in\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Ker} g$. $f(x)=g(x)=0_E$. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=0_E$. $x\in\operatorname{Ker}(f+g)$.
- Réciproquement supposons que $x\in\operatorname{Ker}(f+g)$. $f(x)+g(x)=0_E$. $f(x)=-g(x)$.

$$\|\phi(x)\|^2=\langle\phi(x),\phi(x)\rangle \underset{\phi \text{ est symétrique}}{=} \langle x,\phi^2(x)\rangle=\langle x,f(x)\rangle=-\langle x,g(x)\rangle=-\langle x,\psi^2(x)\rangle \underset{\psi \text{ est symétrique}}{=} -\langle\psi(x),\psi(x)\rangle=-\|\psi(x)\|^2$$

$0\leqslant\|\phi(x)\|^2=-\|\psi(x)\|^2\leqslant 0$. $\|\phi(x)\|^2=\|\psi(x)\|^2=0$. $\|\phi(x)\|=\|\psi(x)\|=0$. $\phi(x)=\psi(x)=0_E$.

• • •

Alors $f(x) = \varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(0_E) = 0_E$ et $g(x) = \psi^2(x) = \psi(\psi(x)) = \psi(0_E) = 0_E$.

donc $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$.

Finalement $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g$. et ceci pour tout x dans E.

donc $\underline{\underline{\mathrm{Ker}(f \cap g) = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g}}$.

Exercice : Montrer l'unicité de ϕ (ϕ symétrique à valeurs propres positives tel que $\phi^2 = f$ ...).

R.

Question 2 **HEC 2009-2**

Q1. Montrer que pour $z > 0$, l'intégrale $J(z) = \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est convergente.

Q2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J(z)$ est équivalent en $+\infty$ $\frac{e^{-z}}{z}$.

Q1 $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge car $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge.

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge. Alors pour tout élément z de $]0,+\infty[$, $\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge.

Q2 Soit $z \in]0,+\infty[$. Soit $A \in]z,+\infty[$. Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = -e^{-t}$.

u et v sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et, $\forall t \in]0,+\infty[$, $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$ et $v'(t) = e^{-t}$. Ceci justifie l'intégration par parties qui suit.

$\int_z^A \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \left[\frac{1}{t}(-e^{-t})\right]_z^A - \int_z^A \left(-\frac{1}{t^2}\right)(-e^{-t})\,dt = -\frac{1}{A}e^{-A} + \frac{1}{z}e^{-z} - \int_z^A \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.$

$\lim_{A\to+\infty} \frac{e^{-A}}{A} = 0$ et $\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge. Alors 1) $\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$ converge

2) $\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \frac{1}{z}e^{-z} - \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.$

$\frac{z}{e^{-z}} J(z) = 1 - \frac{z}{e^{-z}} \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.$ Notons que $\lim_{z\to+\infty} \left(\frac{z}{e^{-z}} \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt\right) = 0.$

$\forall B \in]z,+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{z}{e^{-z}} \int_z^B \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leqslant \frac{z}{e^{-z}} \frac{1}{z^2} \int_z^B e^{-t}\,dt = \frac{1}{z} e^{z} \left[-e^{-t}\right]_z^B = \frac{1}{z} e^{z}(e^{-z} - e^{-B}) \leqslant \frac{1}{z} e^{z} e^{-z} = \frac{1}{z}.$

En faisant tendre B vers $+\infty$ il vient $0 \leqslant \frac{z}{e^{-z}} \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{z}$ et ceci pour tout z dans $]0,+\infty[$

Comme $\lim_{z\to+\infty} \frac{1}{z} = 0$ il vient par encadrement : $\lim_{z\to+\infty} \left(\frac{z}{e^{-z}} \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt\right) = 0.$

Alors $\lim_{z\to+\infty} \frac{z}{e^{-z}} J(z) = 1$. Donc $\lim_{z\to+\infty} \frac{J(z)}{\frac{e^{-z}}{z}} = 1$. $J(z) \underset{z\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-z}}{z}.$

Question 3 HEC 2009-3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille de n variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω, indépendantes et de même loi .

On définit la variable aléatoire : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Q1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'espérance $E(e^{xS_n})$ existe et $\forall a \in \mathbb{R}$, $P([S_n \geqslant a]) \leqslant e^{-ax}\, E(e^{xS_n})$.

Q2. Appliquer ce résultat au cas où chaque X_i suit la loi définie par : $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = 1 - p$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que $E(e^{xS_n})$ existe. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$[S_n \geqslant a] = [xS_n \geqslant ax] = [e^{xS_n} \geqslant e^{ax}]$.

e^{xS_n} possède une espérance, prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $e^{ax} \in \mathbb{R}_+^*$

l'inégalité de Markov donne : $P(S_n \geqslant a) = P(e^{xS_n} \geqslant e^{ax}) \leqslant \dfrac{E(e^{xS_n})}{e^{ax}}$.

$P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-ax} E(e^{xS_n})$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. e^{xS_n} est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs donc $E(e^{xS_n})$ existe.

$E(e^{xS_n}) = E(e^{xX_1} e^{xX_2} \cdots e^{xX_n}) \underset{\text{indépendance}}{=} E(e^{xX_1}) E(e^{xX_2}) \cdots E(e^{xX_n})$.

$E(e^{xX_i}) = e^{-x}(1-p) + e^{x} p$ (théorème de transfert). $E(e^{xS_n}) = ((1-p)e^{-x} + pe^{x})^n$

Soit $a \in \mathbb{R}$. $P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-ax}\left((1-p)e^{-x} + pe^{x}\right)^n$.

R

R.

Question 4 HEC 2009-4

Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0,1[$.

Q1. Montrer que pour $a > 0$ fixé, $P([X_n \leqslant a])$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Q2. Montrer que si $b > 0$,

$$P\left(\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right]\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \operatorname{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$$

Qu'en déduit-on pour $P([|X_n - np| \leqslant nb])$ quand n tend vers $+\infty$?

Q1 Posons $n_0 = \text{Ent}(a)$. Soit $n \in [\![\max(1, n_0), +\infty[\![$.

$P(X_n \leqslant a) = \sum_{k=0}^{n_0} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Soit $k \in [\![1, n_0]\!]$, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$. Ceci vaut encore pour

$k=0$ car $\binom{n}{0} = 1$ et $\frac{n^0}{0!} = 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Alors $\forall k \in [\![0, n_0]\!]$, $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} p^k q^{n-k} = \frac{p^k}{q^k k!} (n^k q^n)$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} (n^k q^n) = 0$ par croissance comparée car $|q| = q < 1$.

Alors pour tout k dans $[\![0, n_0]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} \left[\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right] = 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} P(X_n \leqslant a) = \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right] = 0$.

Pour tout réel a strictement positif : $\lim_{n\to+\infty} P(X_n \leqslant a) = 0$.

Q2 $b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

__1er Cas.__ $b\sqrt{n} \leqslant \sqrt{p(1-p)}$. $\min(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}) = b\sqrt{n}$.

Alors $1 \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} b\sqrt{n} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \min(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$.

$b\sqrt{n} > 0$

or $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq 1$. donc $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)$

<u>2ième cas</u>.. $b\sqrt{n}>\sqrt{p(1-p)}$. Alors $\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)=\sqrt{p(1-p)}$

$E(X_n)$ (resp. $V(X_n)$) existe et vaut np (resp. $np(1-p)$).

Alors $E\left(\frac{X_n}{n}\right)$ existe et vaut p. $V\left(\frac{X_n}{n}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{n^2}np(1-p)$ ou $\frac{p(1-p)}{n}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)=P\left(\left|\frac{X_n}{n}-E\left(\frac{X_n}{n}\right)\right|>b\right)\leq \frac{V\left(\frac{X_n}{n}\right)}{b^2}=\frac{p(1-p)}{b^2 n}=\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\times\sqrt{p(1-p)}.$$

donc $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)$

Ainsi pour tout réel b strictement positif $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)$.

Soit $b\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)$.

$\lim_{n\to+\infty} b\sqrt{n}=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)=\sqrt{p(1-p)}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}=0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n}\min\left(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}\right)\right)=0$. Par encadrement il vient $\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)=0$.

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\leq b\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\right)=1-0=1$.

donc $\lim_{n\to+\infty}P\left(|X_n-np|\leq b\right)=1$.

R.

Question 5 HEC 2009-5

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant comme matrice u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Q1. On pose $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,-1,1,1)$, $v_3 = (1,0,1,0)$. Calculer $f(v_i)$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$.

Q2. Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à une base de vecteurs propres de M contenant le plus possible de 0, les autres termes étant $+1$ ou -1.

Q3. Déterminer M^2, puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Q4. Déterminer à l'aide de P, la matrice des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ sur chacun des sous-espaces propres de M.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1. $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3) = 2v_3$.

Q2. M est symétrique à coefficients réels donc **M est diagonalisable**.

D'après Q1 $2 \in \mathrm{Sp}\, M$ et $\dim \mathrm{SEP}(M,2) \geqslant 3$ (v_1, v_2, v_3 est clairement libre).

Alors il existe un réel α tel que M soit semblable à $\mathrm{Diag}(2,2,2,\alpha)$.

$4 = \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Diag}(2,2,2,\alpha)) = 6 + \alpha$; $\alpha = -2$.

Donc $\dim \mathrm{SEP}(M,2) \geqslant 3$, $\dim \mathrm{SEP}(M,-2) \geqslant 1$.

Nécessairement M ne peut avoir d'autres valeurs propres que -2 et 2.

De plus $\dim \mathrm{SEP}(M,-2) = 1$ et $\dim \mathrm{SEP}(M,2)$.

$M_{4,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{SEP}(M,-2) \oplus \mathrm{SEP}(M,2)$ et $\mathrm{SEP}(M,-2)$ et $\mathrm{SEP}(M,2)$ sont orthogonaux. Alors $\mathrm{SEP}(M,-2) = (\mathrm{SEP}(M,2))^{\perp}$.

$B_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une famille d'éléments de $\mathrm{SEP}(M,2)$ visiblement libre.

B_1 est une base de $\mathrm{SEP}(M,2)$ car $\dim \mathrm{SEP}(M,2) = 3$.

Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R})$. $X \in \mathrm{SEP}(M,-2) \iff X$ est orthogonal à $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$X \in \mathrm{SEP}(M,-2) \iff \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z+t=0 \\ x+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ z=-x \\ 0=x+x-x+t \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ z=-x \\ t=-x \end{cases}$$

$B_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{SEP}(M,-2)$.

Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres 2, 2, 2 et -2.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, P est inversible et $P^{-1}MP = \mathrm{Diag}(2,2,2,-2)$.

(Q3) * $M^2 = 4I_4$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^{2n} = 4^n I_4$ et $M^{2n+1} = 4^n M$.

(Q4) Posons $v_4 = (1,-1,1,-1)$. Notons $\hat{\mathcal{B}}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\hat{\mathcal{B}}$ la base (v_1, v_2, v_3, v_4) de $\mathbb{R}^4$ (base, ok ?). P est la matrice de passage de $\hat{\mathcal{B}}_0$ à $\hat{\mathcal{B}}$.

Soit p_1 (resp. p_2) la projection orthogonale sur $SEP(f,2)$ (resp. $SEP(f,-2)$).

$M_{\hat{\mathcal{B}}}(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_{\hat{\mathcal{B}}}(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

** Alors $M_{\mathcal{B}}(p_1) = P\,\mathrm{Diag}(1,1,1,0)\,P^{-1}$ et $M_{\mathcal{B}}(p_2) = P\,\mathrm{Diag}(0,0,0,1)\,P^{-1}$.

* Peut s'obtenir directement avec $M^2 = P(\mathrm{Diag}(2,2,2,-2))^2 P^{-1}$.

** $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. $M_{\hat{\mathcal{B}}}(p_1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. $M_{\hat{\mathcal{B}}}(p_2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Voici des questions sans préparation de l'oral HEC 2009 obtenues auprès des élèves. Les énoncés ne sont pas garantis. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2009

F 1 Assez simple ou proche du cours.

F 2 Demande du travail.

F 3 Délicat.

Question 9 HEC 2009-9 F 1 E. BLOCK

f et p sont deux endomorphismes de E. On suppose que p est une projection.

Montrer que $\operatorname{Ker}(f \circ p) = \operatorname{Ker} p + (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} p)$.

Question 10 HEC 2009 F 2 M. DESSUGES

a et b sont deux réels strictement positifs. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même loi, prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a}{x^b}.$$

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{n^{1/b}} \operatorname{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ converge en loi.

Question 11 HEC 2009 F 1 M. ANGLADE

n appartient à $\mathbb{N}^*$. X_1, X_2, ..., X_n sont n variable aléatoires à densité indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant pour densité la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et $T_n = \operatorname{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Calculer $E(M_n)$ et $E(T_n)$.

Déduire de M_n et T_n deux estimateurs sans biais et convergents de a. Quel est le meilleur ?

Question 12 HEC 2009 F 1 V. LOPEZ

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même loi et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer que $E\left(\dfrac{X}{X+Y}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Question 13 HEC 2009 F 1 E. BILLETTE

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de réels telles que : $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{u_n}$.

Montrer que les deux suites ont pour limite $+\infty$.

Question 14 **HEC 2009** $\boxed{\textbf{F 1}^-}$ H. VANDE MAELE

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant même loi.

$X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(X_1 = 1) = p$ et $P(X_1 = -1) = q = 1 - p$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Trouver $\mathrm{cov}(S_n, S_m)$ pour tout (n, m) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Question 15 **HEC 2009** $\boxed{\textbf{F 1}^-}$ G. MIGNEN

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant la même loi. On suppose qu'elles prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X = n)$.

On considère la variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ définie par $\forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{si } X(\omega) < Y(\omega) \\ 0 & \text{si } X(\omega) = Y(\omega) \\ 1 & \text{si } X(\omega) > Y(\omega) \end{cases}$

Montrer que la série de terme général p_n^2 converge.

Trouver la loi de Z en fonction de $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n^2$.

Question 16 **HEC 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ *vu par JF*

On considère un cube dont les côtés ont pour longueur 1. On note S_0, S_1, S_2,..., S_7 ses sommets.

Q1. Calculer les distances de S_0 aux autres sommets.

Q2. Une puce part du sommet S_0 et se déplace de la manière suivante. Elle reste sur S_0 avec la probabilité $\dfrac{7}{36}$ et elle va en S_i $(i \neq 0)$ avec une probabilité proportionnelle a l'inverse du carré de la distance de S_0 à S_i (le coefficient de propotionnalité étant toujours le même). Et ainsi de suite.

Trouver la probabilité pour qu'après un (resp. deux) déplacement (déplacements) elle se trouve sur le sommet opposé à S_0.

Question 17 **HEC 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ *vu par JF*

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Montrer que si $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.

R.

Question 9 **HEC 2009-9** $\boxed{\textbf{F 1}}$ E. BLOCK

f et p sont deux endomorphismes de E. On suppose que p est une projection.

Montrer que $\operatorname{Ker}(f \circ p) = \operatorname{Ker} p + (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} p)$.

Soit $x \in E$. $\exists !(y,z) \in \operatorname{Im} p \times \operatorname{Ker} p$, $x = y + z$. $p(x) = y$.

* Supposons que $x \in \operatorname{Ker}(f \circ p)$.

$f(p(x)) = 0_E$. $f(y) = 0_E$. $y \in \operatorname{Ker} f$. $y \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} p$.

Alors $x = z + y$ avec $z \in \operatorname{Ker} p$ et $y \in (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} p)$. Donc $x \in \operatorname{Ker} p + (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} p)$.

* Supposons que $x \in \operatorname{Ker} p + (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} p)$.

$\exists (z', y') \in \operatorname{Ker} p \times (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} p)$, $x = z' + y'$.

Alors $x = y' + z'$ avec $y' \in \operatorname{Im} p$ et $z' \in \operatorname{Ker} p$. Or $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont en somme directe.

Donc $\begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}$. Alors $y \in \operatorname{Ker} f$. $f(y) = 0_E$. $f(p(x)) = 0_E$. $x \in \operatorname{Ker}(f \circ p)$.

Question 10 HEC 2009 $\boxed{F\ 1}$ M. DESSUGES

a et b sont deux réels strictement positifs. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même loi, prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a}{x^b}.$$

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{n^{1/b}}\,\mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ converge en loi.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de $Y_n = \dfrac{1}{n^{1/b}}\,\mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Notons F la fonction de répartition des variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(\mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant n^{1/b}x)$

$F_n(x) = P(\{X_1 \leqslant n^{1/b}x\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant n^{1/b}x\}) \underset{\substack{\uparrow\\ X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ sont indépendantes}}}{=} P(X_1 \leqslant n^{1/b}x) \cdots P(X_n \leqslant n^{1/b}x) = \left(F(n^{1/b}x)\right)^n.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \left(F(n^{1/b}x)\right)^n.$

Notons que $1 - F(x) = P(X_1 > x) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x^b}$. Cherchons $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} F_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

<u>1er cas..</u> $x \in]-\infty, 0[$. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} (n^{1/b}x) = -\infty$. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} F(n^{1/b}x) = 0$ car $\lim\limits_{z\mapsto-\infty} F(z) = 0$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ 0 \leqslant F(n^{1/b}x) \leqslant \frac{1}{2}$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ 0 \leqslant (F(n^{1/b}x))^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

Par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \left(F(n^{1/b}x)\right)^n = 0$. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = 0$.

<u>2ème cas.-</u> $x = 0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n(x) = (F(0))^n$

Supposons que $F(0) = 1$. Alors $\forall x \in [0, +\infty[,\ F(x) = 1$.

Donc $\dfrac{a}{x^b} \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} P(X > x) = 1 - F(x)$ et $1 - F$ est nulle sur $[0, +\infty[$.

Donc $\dfrac{a}{x^b} \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} 0$ ou $0 \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x^b}$. Alors $1 = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{0}{\frac{a}{x^b}} = 0$!!

Alors $0 \leq F(0) < 1$. Donc $\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = \lim_{n\mapsto+\infty} (F(0))^n = 0$. $\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = 0$.

3ème cas.. $x \in]0,+\infty[$.

$\lim_{n\mapsto+\infty}(n^{1/b}x) = +\infty$ donc $\lim_{n\mapsto+\infty} F(n^{1/b}x) = 1$ car $\lim_{z\mapsto+\infty} F(z) = 1$.

Alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![n_1,+\infty[\![$, $F(n^{1/b}x) > 0$.

$\forall n \in [\![n_1,+\infty[\![$, $F_n(x) = (F(n^{1/b}x))^n = e^{n\ln F(n^{1/b}x)}$. $\lim_{n\mapsto+\infty}(n^{1/b}x) = +\infty$

$\lim_{n\mapsto+\infty} F(n^{1/b}x) = 1$ donc $n\ln F(n^{1/b}x) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} n(F(n^{1/b}x)-1) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} -n\dfrac{a}{(n^{1/b}x)^b} = -\dfrac{a}{x^b}$.

$1-F(z) \underset{z\mapsto+\infty}{\sim} \dfrac{a}{z^b}$

Alors $\lim_{n\mapsto+\infty} n\ln(F(n^{1/b}x)) = -\dfrac{a}{x^b}$.

Par continuité de la fonction exponentielle : $\lim_{n\mapsto+\infty} e^{n\ln(F(n^{1/b}x))} = e^{-\frac{a}{x^b}}$.

donc $\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = e^{-\frac{a}{x^b}}$

Finalement $\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0] \\ e^{-\frac{a}{x^b}} & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0] \\ e^{-\frac{a}{x^b}} & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$.

Montrons que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

* $\lim_{x\mapsto-\infty} G(x) = 0$. $\lim_{x\mapsto+\infty} -\dfrac{a}{x^b} = 0$ donc $\lim_{x\mapsto+\infty} G(x) = 1$.

* Montrons que G est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soient x et y deux réels tels que $x < y$.

1er cas.. $x < y \leq 0$. Alors $G(x) = G(y) = 0$ donc $G(x) \leq G(y)$.

2ème cas.. $x \leq 0 < y$. Alors $G(x) = 0 \leq e^{-\frac{a}{y^b}} = G(y)$; $G(x) \leq G(y)$.

<u>3ème cas.</u> $0 < x < y$. Alors $0 < x^b < y^b$ car $b > 0$.

Donc $-\frac{1}{x^b} < -\frac{1}{y^b}$; $-\frac{a}{x^b} \overset{a>0}{<} -\frac{a}{y^b}$; $e^{-\frac{a}{x^b}} < e^{-\frac{a}{y^b}}$.

Alors $G(x) < G(y)$. Donc $G(x) \leq G(y)$.

Finalement $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y \Rightarrow G(x) \leq G(y)$. <u>G est croissante sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>Remarque</u>.- La croissance de G sur $\mathbb{R}$ et les deux limites au premier point montrent que G est bien une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$... pour ceux qui en doutaient.

* $x \mapsto x^b$ est de classe C^1 et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $x \mapsto -\frac{a}{x^b}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition $x \mapsto e^{-\frac{a}{x^b}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \mapsto e^x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors <u>G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$</u>

G est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc <u>G est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$</u>.

Alors → <u>G est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points</u>,

→ G est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ et continue à gauche en 0

De plus $\lim_{x \to 0^+} \frac{a}{x^b} = +\infty$ car $a > 0$ et $b > 0$ donc $\lim_{x \to 0^+} G(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{a}{x^b}} = 0 = G(0)$.

G est donc continue à droite en 0.
Alors G est continue en 0. Finalement <u>G est continue en tout point de $\mathbb{R}$.</u>

Ceci achève de montrer que <u>G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.</u>

Ainsi la suite $\left(\frac{1}{n^{1/b}} \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable <u>aléatoire à densité de fonction de répartition G.</u>

R.

Question 11 **HEC 2009** $\boxed{\text{F 1}}$ M. ANGLADE

n appartient à $\mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variable aléatoires à densité indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant pour densité la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ et $T_n = \text{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Calculer $E(M_n)$ et $E(T_n)$.

Déduire de M_n et T_n deux estimateurs sans biais et convergents de a. Quel est le meilleur ?

Posons $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $Y_k = X_k - a$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

Y_k est une variable aléatoire à densité et $g : x \mapsto \frac{1}{|1|} f\left(\frac{x-(-a)}{1}\right)$ en est une densité.

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x+a) = \begin{cases} e^{-(x+a-a)} & \text{si } x+a \in [a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors Y_k suit la loi exponentielle de paramètre 1.

donc $E(Y_k)$ et $V(Y_k)$ existent et valent 1.

Comme $X_k = Y_k + a$, $E(X_k)$ (resp. $V(X_k)$) existe et vaut $a+1$ (resp. 1)

Alors $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ existe et vaut $E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$ donc $\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$ c'est à dire $n(a+1)$.

Ainsi <u>$E(M_n)$ existe et vaut $a+1$.</u>

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et possèdent une variance qui vaut 1.

Alors $V(X_1 + \cdots + X_n)$ existe et vaut $V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$ donc n.

donc <u>$V(M_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n^2} \times n$ soit $\frac{1}{n}$.</u>

Posons $U_n = T_n - a$. $U_n = \text{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n) - a = \text{Min}(X_1 - a, X_2 - a, \ldots, X_n - a)$.

Alors $U_n = \text{Min}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Soit F_n la fonction de répartition de U_n.

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc U_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_n(x) = 0$.

R.

Soit $x \in [0,+\infty[$, $F_n(x) = P(U_n \le x) = P(\min(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \le x)$.

$F_n(x) = 1 - P(\min(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) > x) = 1 - P(\{Y_1 > x\} \cap \{Y_2 > x\} \cap \dots \cap \{Y_n > x\})$.

Par indépendance de $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ (qui résulte de l'indépendance de $X_1, X_2, \dots, X_n$) il vient :

$F_n(x) = 1 - P(Y_1 > x)P(Y_2 > x)\dots P(Y_n > x) = 1 - (1 - P(Y_1 \le x))(1 - P(Y_2 \le x))\cdots(1 - P(Y_n \le x))$.

$F_n(x) = 1 - (1 - (1 - e^{-x}))^n = 1 - e^{-nx}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-nx} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors U_n suit la loi exponentielle de paramètre n. Donc $E(U_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n}$ et $V(U_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n^2}$.

$T_n = U_n + a$. Donc $E(T_n)$ existe et vaut $a + \frac{1}{n}$ et $V(T_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n^2}$.

Pour $\widehat{M}_n = M_n - 1$. $E(\widehat{M}_n)$ existe et vaut $E(M_n) - 1$ donc a.

$V(\widehat{M}_n)$ existe et vaut $V(M_n)$ donc $\frac{1}{n}$.

$\lim_{n \to +\infty} V(\widehat{M}_n) = 0$

Alors $\widehat{M}_n$ est un estimateur sans biais et convergent de a de risque quadratique $\frac{1}{n}$.

Pour $\widehat{T}_n = T_n - \frac{1}{n}$. $E(\widehat{T}_n)$ existe et vaut $E(T_n) - \frac{1}{n}$ donc a.

$V(\widehat{T}_n)$ existe et vaut $V(T_n)$ donc $\frac{1}{n^2}$.

$\lim_{n \to +\infty} V(\widehat{T}_n) = 0$

Alors $\widehat{T}_n = T_n - \frac{1}{n}$ est un estimateur sans biais et convergent de a de risque quadratique $\frac{1}{n^2}$.

$\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n}$ donc $\widehat{T}_n = T_n - \frac{1}{n}$ est un meilleur estimateur de a que $\widehat{M}_n = M_n - 1$.

Question 12 HEC 2009 $\boxed{\text{F 1}}$ V. LOPEZ

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même loi et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer que $E\left(\dfrac{X}{X+Y}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Posons $U = \dfrac{X}{X+Y}$ et $V = \dfrac{X}{X+Y}$. $U(\Omega) \subset]0,1]$ et $V(\Omega) \subset]0,1]$

$U(\Omega) = \{z_k \,;\, k \in [\![n_0, +\infty[\![\}$ où $k \mapsto z_k$ est une bijection de $[\![n_0, +\infty[\![$ sur $U(\Omega)$

(car $U(\Omega)$ est dénombrable).

$\forall k \in [\![n_0, +\infty[\![$, $0 < z_k \leq 1$. $\forall k \in [\![n_0, +\infty[\![$, $0 < z_k P(U = z_k) \leq P(U = z_k)$.

De plus la série de terme général $P(U = z_k)$ converge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $z_k P(U = z_k)$ est convergente et même absolument convergente.

Alors U possède une espérance. Il en est de même de V.

De plus $E(U+V) = E(U) + E(V)$ et $U + V = 1$ donc $E(U) + E(V) = 1$.

Montrons que U et V ont même loi. Nous aurons alors $E(U) = E(V)$ donc $E(U) = E(V) = \frac{1}{2}$

$(\{X = k\})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.

$U(\Omega) = V(\Omega)$. Soit $z \in U(\Omega)$.

$$P(U = z) = P\left(\frac{X}{X+Y} = z\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\{X = k\} \cap \left\{\frac{X}{X+Y} = z\right\}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\{X = k\} \cap \left\{Y = \frac{k - kz}{z}\right\}\right)$$

$$P(U = z) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)\, P\left(Y = \frac{k-kz}{z}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k)\, P\left(X = \frac{k-kz}{z}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\{Y = k\} \cap \left\{X = \frac{k-kz}{z}\right\}\right).$$

X et Y sont indépendantes — X et Y ont même loi — X et Y sont indépendantes.

$$P(U = z) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\{Y = k\} \cap \left\{\frac{Y}{X+Y} = z\right\}\right) = P\left(\frac{Y}{X+Y} = z\right) = P(V = z).$$

$(\{Y = k\})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements

Ceci achève de montrer que U et V ont même loi donc même espérance.

$1 = E(U+V) = E(U) + E(V) = 2E(U)$; $E(U) = \frac{1}{2}$. $\underline{E\left(\dfrac{X}{X+Y}\right) = \dfrac{1}{2}}$.

Question 13 HEC 2009 $\boxed{\text{F 1}}$ E. BILLETTE

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de réels telles que : $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{u_n}$.

Montrer que les deux suites ont pour limite $+\infty$.

Une récurrence simple montre que pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n et v_n sont définis et strictement positifs.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{v_n} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$.

Les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont strictement croissantes.

Supposons que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit majorée. Alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Notons ℓ sa limite.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{u_n + \frac{1}{v_n}}{v_n + \frac{1}{u_n}} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n u_n + 1}{v_n u_n + 1} = \dfrac{u_n}{v_n}$. $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant 0}$ est constante.

Posons $c = \dfrac{u_0}{v_0}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{v_n} = c$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = c\, v_n$.

$c \neq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{c} u_n$. Alors $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\dfrac{\ell}{c}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell - \ell = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$!!

Ainsi $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas majorée tout en étant croissante.

Alors $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{c} u_n$ et $\dfrac{1}{c} > 0$ donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$.

Q.

Question 14 HEC 2009 $\boxed{\text{F 1}}$ II. VANDE MAELE

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant même loi.

$X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$, $P(X_1 = 1) = p$ et $P(X_1 = -1) = q = 1 - p$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Trouver $\text{cov}(S_n, S_m)$ pour tout (n, m) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\text{cov}(S_n, S_n) = V(S_n) = V(X_1 + \cdots + X_n) \underset{\uparrow}{=} V(X_1) + \cdots + V(X_n) = n\,V(X_1)$.

$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et possèdent une variance

$E(X_1) = p - q$

$V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = 1^2 \times p + (-1)^2 \times q - (p-q)^2 = 1 - (p-q)^2$

$\underline{\underline{\text{cov}(S_n, S_n) = n\,(1 - (p-q)^2).}}$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m > n$.

$\text{cov}(S_n, S_m) = \text{cov}\left(S_n, S_n + \sum_{i=n+1}^{m} X_i\right) = \text{cov}(S_n, S_n) + \sum_{i=n+1}^{m} \text{cov}(S_n, X_i)$.

$\forall i \in [\![n+1, m]\!]$, $\text{cov}(S_n, X_i) = \text{cov}\left(\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell, X_i\right) = \sum_{\ell=1}^{n} \underbrace{\text{cov}(X_\ell, X_i)}_{=0\ (\ell \neq i)} = 0$.

Donc $\text{cov}(S_n, S_m) = \text{cov}(S_n, S_n) = n\,(1 - (p-q)^2)$

De même si $m < n$ $\text{cov}(S_n, S_m) = m\,(1 - (p-q)^2)$.

Finalement $\underline{\underline{\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ \text{cov}(S_n, S_m) = \min(m, n)\,(1 - (p-q)^2)}}$

R.

Question 15 **HEC 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ G. MIGNEN

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant la même loi. On suppose qu'elles prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = P(X = n)$.

On considère la variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ définie par $\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) =) \begin{cases} -1 & \text{si } X(\omega) < Y(\omega) \\ 0 & \text{si } X(\omega) = Y(\omega) \\ 1 & \text{si } X(\omega) > Y(\omega) \end{cases}$

Montrer que la série de terme général p_n^2 converge.

Trouver la loi de Z en fonction de $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n^2$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p_n \leq 1$. donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p_n^2 \leq p_n$ et la série de terme général $p_n = P(X=n)$ converge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que <u>la série de terme général p_n^2 converge.</u>

$(\{X=n\})_{n\geq 0}$ est un système complet d'événements.

$$P(Z=1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{X=n\} \cap \{n > Y\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{X=n\} \cap \{Y<n\}).$$

Par indépendance : $P(Z=1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,P(Y<n)$

La transformation " $X \leftrightarrow Y$ " donne $P(Z=-1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n)\,P(X<n)$.

Comme X et Y ont même loi : $P(Z=1) = P(Z=-1)$.

$$P(Z=0) = P(X=Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{X=n\} \cap \{Y=n\}) \underset{\text{indépendance}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n^2 = s.$$

<u>$P(Z=0) = s.$</u>

$1 = P(Z=-1) + P(Z=0) + P(Z=1) = 2P(Z=1) + s$; <u>$P(Z=1) = P(Z=-1) = \dfrac{1-s}{2}$.</u>

R.

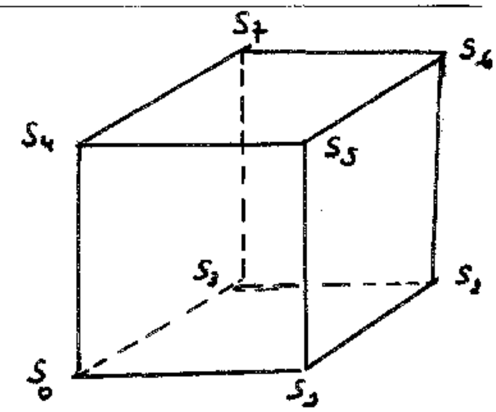
Question 16 **HEC 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ *vu par JF*

On considère un cube dont les côtés ont pour longueur 1. On note S_0, S_1, S_2,..., S_7 ses sommets.

Q1. Calculer les distances de S_0 aux autres sommets.

Q2. Une puce part du sommet S_0 et se déplace de la manière suivante. Elle reste sur S_0 avec la probabilité $\frac{7}{36}$ et elle va en S_i ($i \neq 0$) avec une probabilité proportionnelle a l'inverse du carré de la distance de S_0 à S_i (le coefficient de propotionnalité étant toujours le même). Et ainsi de suite.

Trouver la probabilité pour qu'après un (resp. deux) déplacement (déplacements) elle se trouve sur le sommet opposé à S_0.



Q1 $S_0S_1 = S_0S_3 = S_0S_4 = 1$.

le triangle $S_0S_1S_2$ est rectangle en S_1.

Alors $S_0S_2^2 = S_0S_1^2 + S_1S_2^2 = 2$. $S_0S_2 = \sqrt{2}$.

de même $S_0S_5 = S_0S_7 = \sqrt{2}$.

Le triangle $S_0S_2S_6$ est rectangle en S_2.

Alors $S_0S_6^2 = S_0S_2^2 + S_2S_6^2 = 2+1 = 3$. $S_0S_6 = \sqrt{3}$.

Notons $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ les probabilités pour que la puce passe du sommet S_0 respectivement au sommet $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$.

$p_0 = \frac{7}{36}$ et $\exists \alpha \in$, $p_1 = \frac{\alpha}{S_0S_1^2}$, $p_2 = \frac{\alpha}{S_0S_2^2}$, $p_3 = \frac{\alpha}{S_0S_3^2}$, $p_4 = \frac{\alpha}{S_0S_4^2}$, $p_5 = \frac{\alpha}{S_0S_5^2}$, $p_6 = \frac{\alpha}{S_0S_6^2}$, $p_7 = \frac{\alpha}{S_0S_7^2}$.

$p_1 = p_3 = p_4 = \frac{\alpha}{1^2} = \alpha$. $p_2 = p_5 = p_7 = \frac{\alpha}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\alpha}{2}$ et $p_6 = \frac{\alpha}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\alpha}{3}$. De plus $\sum_{i=0}^{7} p_i = 1$.

$$1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = \frac{7}{36} + 3\times\alpha + 3\times\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{3}.$$

$\alpha\left(3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{7}{36} = \frac{29}{36}$; $\alpha\,\frac{18+9+2}{6} = \frac{29}{36}$; $\alpha = \frac{29}{36}\times\frac{6}{29} = \frac{1}{6}$.

La probabilité pour qu'après un déplacement elle se trouve sur le sommet opposé est la probabilité pour qu'elle passe de S_0 à S_6. C'est donc p_6 ou $\frac{1}{18}$.

R.

Notons, pour tout $i \in [\![0,7]\!]$, S_i^1 l'événement la puce se trouve après un déplacement en S_i. Notons S_6^2 la probabilité pour que la puce se trouve en S_6 après deux déplacements. $(S_0^1, S_1^1, S_2^1, S_3^1, S_4^1, S_5^1, S_6^1, S_7^1)$ est un système complet d'événements de plus $\forall i \in [\![0,7]\!]$, $P(S_i^1) \neq 0$. La formule des probabilités totales donne :

$$P(S_6^2) = \sum_{i=0}^{7} P(S_i^1)\, P_{S_i^1}(S_6^2).$$

Notons que $P_{S_2^1}(S_6^2) = P_{S_5^1}(S_6^2) = P_{S_7^1}(S_6^2) = p_1 = \alpha = \frac{1}{6}$.

$P_{S_1^1}(S_6^2) = P_{S_3^1}(S_6^2) = P_{S_4^1}(S_6^2) = p_2 = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{12}$.

$P_{S_0^1}(S_6^2) = p_6 = \frac{1}{18}$. $P_{S_6^1}(S_6^2) = \frac{7}{36}$.

De plus $P(S_2^1) = P(S_5^1) = P(S_7^1) = p_2 = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{12}$,

$P(S_1^1) = P(S_3^1) = P(S_4^1) = \alpha = \frac{1}{6}$,

$P(S_6^1) = \frac{1}{18}$ et $P(S_0^1) = \frac{7}{36}$.

Alors $P(S_6^2) = \sum_{i=0}^{7} P(S_i^1)\, P_{S_i^1}(S_6^2) = \frac{7}{36} \times \frac{1}{18} + 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{12} + 3 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \times \frac{7}{36}$.

$P(S_6^2) = 2 \times \left[\frac{7}{36\times 18} + \frac{3}{6 \times 12}\right] = \frac{2}{36\times18}\left[7 + 3\times 9\right] = \frac{2\times34}{36\times18} = \frac{17}{9\times18} = \frac{17}{162} \simeq 0{,}1049$.

La probabilité pour qu'après deux déplacements la puce se trouve sur le sommet opposé est : $\frac{17}{162}$.

Question 17 **HEC 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ *vu par JF*

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Montrer que si $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.

Montrons que si f est diagonalisable alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

Supposons f diagonalisable.

1) $\underline{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = E}$.

2) Montrons que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.

$f(x) = 0_E$ et $\exists t \in E$, $x = f(t)$.

f est diagonalisable donc il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Alors : $\exists (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^n$, $t = \sum_{i=1}^{n} t_i e_i$.

$x = f(t) = \sum_{i=1}^{n} t_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i \lambda_i e_i$. $0_E = f(x) = f^2(t) = \sum_{i=1}^{n} t_i \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i \lambda_i^2 e_i$.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i \lambda_i^2 = 0$ car $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i = 0$ ou $\lambda_i^2 = 0$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i = 0$ ou $\lambda_i = 0$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i \lambda_i = 0$.

Alors $x = \sum_{i=1}^{n} t_i \lambda_i e_i = 0_E$. $\underline{\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}}$.

Si f est diagonalisable : $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

<u>Si $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.</u>