Voici les questions sans préparation 2007 qu'à bien voulu nous fournir HEC. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

Question 1 **HEC 07-1** $\boxed{\textbf{F 1}}$ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes une loi normale centrée réduite.

Soit θ un réel. On pose $Y_0 = X_0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \theta\, Y_{n-1} + X_n$.

Q1. Donner la loi de Y_n.

Q2. Calculer $\text{cov}(Y_n, Y_{n-k})$ pour $n > k > 0$.

Question 2 **HEC 07-2** $\boxed{\textbf{F 1}}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme canoniquement associé.

Q1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer toutes les droites D de $\mathbb{R}^3$ stables par f, c'est à dire telles que $f(D) \subset D$.

Question 3 **HEC 07-3** $\boxed{\textbf{F 2}}$ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ et $A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Q1. Montrer que A est semblable à $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q2. Vérifier que $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et déterminer sa dimension.

Question 4 **HEC 07-4** $\boxed{\textbf{F 1}}$ Une matrice carrée est dite nilpotente s'il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^q = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente différente de la matrice nulle.

Q1. Montrer qu'il existe un plus petit entier p de $\mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$.

Q2. Justifier que la matrice $A = I - N$ est inversible et déterminer son inverse.

Q3. Montrer que $I - A^{-1}$ est nilpotente.

Question 5 **HEC 07-5** $\boxed{\textbf{F 1}}$ On suppose que $P = X(X+2)$ est un polynôme annulateur d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que -2 est valeur propre de A et que A est diagonalisable.

Question 6 **HEC 07-6** $\boxed{\textbf{F 2}}$ Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Q1. Quelle(s) valeurs(s) de j maximise(nt) $P(X = j)$?

Q2. Pour j dans $\mathbb{N}^*$, quelle(s) valeurs(s) de λ maximise(nt) $P(X = j)$?

Q3. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{N}^*$, $E(|X - \lambda|) = \dfrac{2\,\lambda^\lambda\, e^{-\lambda}}{(\lambda - 1)!}$.

Question 7 **HEC 07-7** $\boxed{\textbf{F 1}}$ Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles et admettant une densité f qui est continue sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que X possède un moment d'ordre 2.

Q1. Étudier le comportement de $x^2\, P(X \geqslant x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Q2. Établir une relation entre $E(X^2)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, P(X \geqslant x)\, \mathrm{d}x$.

Q3. Prouver que : $\left(\int_0^{+\infty} P(X \geqslant x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 2\int_0^{+\infty} x\,P(X \geqslant x)\,\mathrm{d}x$.

Question 8 **HEC 07-8** $\boxed{\textbf{F 1}}$ Soit pour n entier naturel la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

Q1. Montrer que pour tout n il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

Q2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un équivalent simple de u_n.

Q3. On pose $u_n = \dfrac{1}{n} - a_n$. Vérifier que $n\,a_n = u_n^5$ en déduire un équivalent de a_n.

Question 9 **HEC 07-9** $\boxed{\textbf{F 2}}$ Donner un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$ de $F(x) = \displaystyle\int_0^x |\sin t|\,\mathrm{d}t$.

Question 10 **HEC 07-10** $\boxed{\textbf{F 1}^-}$ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = a\,e^{x - a\,e^x}$.

Q1. À quelle(s) condition(s) f est-elle une densité de probabilité ?

Q2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité, quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = e^X$?

HEC 07-1

$\frac{Y_k}{\theta^k} - \frac{Y_{k-1}}{\theta^{k-1}} = \frac{X_k}{\theta^k}$. On obtient alors sans difficulté en sommant de 1 à n :

$$Y_n = \theta^n \sum_{k=0}^{n} \frac{X_k}{\theta^k} = \sum_{k=0}^{n} \theta^{n-k} X_k = \sum_{i=0}^{n} \theta^i X_{n-i}.$$

L'indépendance et le théorème de stabilité montrent que : $Y_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=0}^{n} \theta^{2i}\right)$.

Q2

$$\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{\theta^n}{\theta^i} \times \frac{\theta^{n-k}}{\theta^j} \underbrace{\mathrm{cov}(X_i, X_j)}_{=\begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}} = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{\theta^{2n-k}}{\theta^{2i}}$$

$$\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n-k}) = \theta^{2n-k} \sum_{i=0}^{n-k} \left(\frac{1}{\theta^2}\right)^i = \begin{cases} \dfrac{\theta^{2n-k+2} - \theta^k}{\theta^2 - 1} & \text{si } \theta^2 \neq 1 \\ (n-k+1) & \text{si } \theta = 1 \\ (-1)^k (n-k+1) & \text{si } \theta = -1 \end{cases}$$

HEC 07-2

Q1 A est symétrique et A est à coefficients réels. A est diagonalisable.

Q2 Une droite de $\mathbb{R}^3$ est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre.

$\mathrm{Sp} f = \{1, 3\}$. $SEP(f,1) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2 + e_3)$ et $SEP(f,3) = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3)$ où

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Notons également que $SEP(f,1)$ est le plan d'équation $y - z = 0$ dans $\mathcal{B}$.

Soit D une droite de $\mathbb{R}^3$. D est stable par f si et seulement si $\begin{cases} D = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3) \\ D \subset \mathrm{Vect}(e_1, e_2 + e_3) \end{cases}$.

Soit $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.

$\mathrm{Vect}(u) \subset \mathrm{Vect}(e_1, e_2 + e_3) \iff \beta = \gamma$.

Ainsi l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^3$ stables par f est :

$$\{\mathrm{Vect}(e_2 - e_3)\} \cup \{\mathrm{Vect}(\alpha e_1 + \beta(e_2 + e_3)) \; ; \; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\}.$$

R

$\boxed{\text{HEC 07-3}}$ $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans $\mathcal{B}$.

(Q1) Pour montrer que A est semblable à J il suffit de trouver une base $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ telle que $M_{\mathcal{B}'}(f)=J$ ou telle que $\begin{cases} f(e'_1)=f(e'_2)=0_E \\ f(e'_3)=e'_1 \end{cases}$

Remarque.. $A^2=0$. $f\circ f=0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ donc $\operatorname{Im} f\subset \operatorname{Ker} f$.
$A\neq 0$ donc $f\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $1\leq \dim \operatorname{Im} f\leq \dim \operatorname{Ker} f\leq 3$.
Comme $\dim \operatorname{Ker} f+\dim \operatorname{Im} f=3$: $\dim \operatorname{Im} f=1$ et $\dim \operatorname{Ker} f=2$.

On fait directement la "synthèse" dans la construction.

Soit e'_1 un vecteur non nul de $\operatorname{Im} f$. $\exists e'_3\in\mathbb{R}^3$, $f(e'_3)=e'_1$.
$e'_1\in \operatorname{Im} f$ donc $e'_1\in \operatorname{Ker} f$. Soit e'_2 un élément de $\mathbb{R}^3$ tel que (e'_1,e'_2) soit une base de $\operatorname{Ker} f$.
Alors $f(e'_1)=f(e'_2)=0_E$ et $e'_1=f(e'_3)$. Ne reste plus qu'à montrer que $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Il suffit de montrer que cette famille est libre.
Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tq $\alpha e'_1+\beta e'_2+\gamma e'_3=0_E$.
$0_E=\alpha f(e'_1)+\beta f(e'_2)+\gamma f(e'_3)=\gamma e'_1$; $\gamma=0$. Donc $\alpha e'_1+\beta e'_2=0$. Alors $\alpha=\beta=0$.
$\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $M_{\mathcal{B}'}(f)=J$.
Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $P^{-1}AP=J$. <u>A est semblable à J.</u>

(Q2) $\mathcal{N}$ est un sev ! Soit $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
$M\in\mathcal{N}\iff AM+MA=0\iff PJP^{-1}M+MPJP^{-1}=0\iff JP^{-1}MP+P^{-1}MPJ=0$
Posons $\mathcal{N}'=\{M'\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\mid JM'+M'J=0\}$ et $\forall M\in\mathcal{N}$, $\varphi(M)=P^{-1}MP$. $\mathcal{N}'$ est aussi un sev.
Il est aisé de prouver que φ est un isomorphisme de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{N}'$.
Alors $\dim\mathcal{N}=\dim\mathcal{N}'$.
Soit $N=\begin{pmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. $N\in\mathcal{N}'\iff JN+NJ=0\iff\begin{cases} a''=b''=a'=0\\ c''=-a\end{cases}$

Alors <u>$\dim\mathcal{N}=\dim\mathcal{N}'=5$.</u>

HEC 07-4

(Q1) .. $J=\{k\in\mathbb{N}^* \mid N^k=0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ qui possède un plus petit élément p.

(Q2) Si $p=1$: $A=I$ est inversible

Si $p\geq 2$: $I=I^p-N^p \underset{\substack{\uparrow\\ IN=NI}}{=} A(I+N+\dots+N^{p-1})$. $A=I-N$ est inversible et $A^{-1}=\sum_{k=0}^{p-1}N^k$.

Dans les deux cas $A=I-N$ est inversible et $A^{-1}=\sum_{k=0}^{p-1}N^k$.

(Q3) Si $p=1$: $I-A^{-1}=I-I=0$; $I-A^{-1}$ est nilpotente.

Supposons $p\geq 2$: $I-A^{-1}=I-\sum_{k=0}^{p-1}N^k=-N\sum_{k=1}^{p-1}N^{k-1}=NB$ avec $B=\sum_{k=1}^{p-1}N^{k-1}$

$NB=BN$ donc $(NB)^p \underset{\uparrow (*)}{=} N^pB^p=0$. $I-A^{-1}$ est nilpotente. (*) A prouver avec des récurrences ...

HEC 07-5 $A\neq 0$. $\exists X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX\neq 0$. Posons $Y=AX$. $Y\neq 0$.

$(A-\lambda I)Y=(A-\lambda I)AX=A(A-\lambda I)X=0$ et $Y\neq 0$. $\lambda\in Sp\,A$.

1er cas... A est inversible. Alors $A^{-1}A(A-\lambda I)=0$. $A=\lambda I$. A est diagonalisable.

2e cas... A n'est pas inversible. Alors $\{0,\lambda\}\subset Sp\,A\subset\{0,\lambda\}$. $Sp\,A=\{0,\lambda\}$.

Une analyse-synthèse simple montre que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})=SEP(A,0)\oplus SEP(A,\lambda)$. A est diagonalisable.

HEC 07-6 (Q1) $\frac{P(X=j+1)}{P(X=j)}=\frac{\lambda}{j+1}$. 1er cas.. $\lambda\notin\mathbb{N}^{(*)}$. $\frac{\lambda}{j+1}<1 \iff \lambda< j+1 \iff \mathrm{Ent}(\lambda)\leq j$

$\frac{\lambda}{j+1}>1 \iff \lambda>j+1 \underset{\lambda\notin\mathbb{N}}{\iff} \mathrm{Ent}(\lambda)\geq j+1 \iff j\leq \mathrm{Ent}(\lambda)-1$. Posons $j_0=\mathrm{Ent}(\lambda)$.

Alors $\left(P(X=j)\right)_{j\geq j_0}$ est strictement décroissante et $\left(P(X=j)\right)_{0\leq j\leq j_0}$ est strictement croissante.

Ainsi (lorsque λ n'est pas entier) $j=\mathrm{Ent}(\lambda)$ est la seule valeur qui maximise $P(X=j)$.

2ème cas.. $\lambda\in\mathbb{N}^*$. $\frac{P(X=j+1)}{P(X=j)}<1 \iff \lambda<j+1 \iff \lambda-1<j \iff \lambda\leq j$.

$\frac{P(X=j+1)}{P(X=j)}>1 \iff \lambda>j+1 \iff \lambda-1>j \iff \lambda-2\geq j$

$\left(P(X=j)\right)_{j\geq\lambda}$ est strictement décroissante et $\left(P(X=j)\right)_{0\leq j\leq\lambda-1}$ est strictement décroissante

Notons aussi que : $P(X=\lambda)=\frac{\lambda^{\lambda}}{\lambda!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}e^{-\lambda}=P(X=\lambda-1)$.

Si λ est entier $j=\lambda-1$ et $j=\lambda$ sont les deux valeurs qui maximisent $P(X=j)$.

(Q2) $P(X=j)=\frac{1}{j!}\lambda^j e^{-\lambda}$. En étudiant la fonction $\lambda\mapsto\lambda^j e^{-\lambda}$ on montre que : $\lambda=j$ est la seule valeur de λ qui maximise $P(X=j)$.

(Q3) $E(|X-\lambda|)=\sum_{j=0}^{+\infty}|j-\lambda|P(X=j)=\sum_{j=0}^{\lambda-1}(\lambda-j)P(X=j)+\sum_{j=\lambda}^{+\infty}(j-\lambda)P(X=j)$.

$$E(|X-\lambda|)=\sum_{j=0}^{\lambda-1}\frac{\lambda^{j+1}}{j!}e^{-\lambda}-\sum_{j=1}^{\lambda-1}\frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{(j-1)!}+\sum_{j=\lambda}^{+\infty}\frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{(j-1)!}-\sum_{j=\lambda}^{+\infty}\frac{\lambda^{j+1}e^{-\lambda}}{j!}$$

$$E(|X-\lambda|)=\sum_{j=1}^{\lambda}\frac{\lambda^j}{(j-1)!}e^{-\lambda}-\sum_{j=1}^{\lambda-1}\frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{(j-1)!}+\sum_{j=\lambda}^{+\infty}\frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{(j-1)!}-\sum_{j=\lambda+1}^{+\infty}\frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{(j-1)!}.$$

$$E(|X-\lambda|)=\frac{2\lambda^{\lambda}e^{-\lambda}}{(\lambda-1)!}.$$

← je vous laisse la convergence à étudier.

HEC 07-7

Q1... $0\le x^2P(X\ge x)=x^2\int_x^{+\infty}f(t)\,dt\le\int_x^{+\infty}t^2f(t)\,dt$ et $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}t^2f(t)\,dt=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2P(X\ge x)\right)=0$$

(Q2) $\int_0^A t^2f(t)\,dt\overset{IPP}{=}[t^2(\underset{\text{Astuce}}{F(t)-1})]_0^A-\int_0^A 2t(F(t)-1)\,dt=-A^2\underbrace{P(X\ge A)}_{=P(X\ge A)\,!}+2\int_0^A tP(X\ge t)\,dt$

Ainsi $E(X^2)=2\int_0^{+\infty}xP(X\ge x)\,dx$

(Q3) $V(X)\ge0$. $E(X^2)\ge(E(X))^2$. $(E(X))^2\le 2\int_0^{+\infty}xP(X\ge x)\,dx$.

$\int_0^A tf(t)\,dt=[t(F(t)-1)]_0^A-\int_0^A(F(t)-1)\,dt=-AP(X\ge A)+\int_0^A P(X\ge t)\,dt$.

Ainsi $E(X)=\int_0^{+\infty}P(X\ge t)\,dt$.

Ainsi $\left(\int_0^{+\infty}P(X\ge x)\,dx\right)^2\le2\int_0^{+\infty}xP(X\ge x)\,dx$.

HEC 07-08

(Q1) Théorème de la bijection

(Q2) $f_n(u_n)=0 \le \frac{1}{n^5} = f_n(\frac{1}{n})$; $f_n(0)=-1 \le 0 = f_n(u_n)$

$0 \le u_n \le \frac{1}{n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (nu_n-1) = \lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n^5) = 0$; $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$na_n = u_n^5$ et donc. Alors $na_n \sim \frac{1}{n^5}$; $a_n \sim \frac{1}{n^6}$. $\frac{1}{n} - u_n \sim \frac{1}{n^6}$.

HEC 07-09 Remarque... $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt = \int_0^{\pi} |\sin u|\,du = [-\cos u]_0^{\pi} = 2$.

$$\int_0^x |\sin t|\,dt = \sum_{k=0}^{\mathrm{ent}(\frac{x}{\pi})-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt + \int_{\pi\,\mathrm{ent}(\frac{x}{\pi})}^{x} |\sin t|\,dt = \underbrace{2\,\mathrm{Ent}(\tfrac{x}{\pi})}_{u(x)} + \underbrace{\int_{\pi\,\mathrm{ent}(\frac{x}{\pi})}^{x} |\sin t|\,dt}_{v(x)}$$

$0 \le v(x) \le 1 \times (x - \pi\,\mathrm{ent}(\frac{x}{\pi})) \le \pi$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.

Alors $u(x)+v(x) \underset{+\infty}{\sim} u(x) = 2\,\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x}{\pi}$. $\int_0^x |\sin t|\,dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x}{\pi}$.

HEC 07-10 (Q1). Si f est une densité $a \ge 0$ et même $a > 0$.

Supposons $a>0$. f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

$\int_0^A f(u)\,du = \int_0^A a e^t e^{-ae^t}\,dt = -e^{-ae^A} + e^{-a}$ et $\int_A^0 f(u)\,du = -e^{-a} + e^{-ae^A}$

Alors $\int_0^{+\infty} f(u)\,du$ converge et vaut e^{-a}. $\int_{-\infty}^0 f(u)\,du$ converge et vaut $-e^{-a}+1$

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du$ converge et vaut 1. f est une densité.

f est une densité si et seulement si $a>0$.

(Q2) Si $x \le 0$ $F_Y(x)=0$. Si $x>0$ $F_Y(x) = P(X \le \ln x) = \int_{-\infty}^{\ln x} a e^t e^{-ae^t}\,dt = \left[-e^{-ae^t}\right]_{-\infty}^{\ln x}$

Si $x>0$ $F_Y(x) = -e^{-ae^{\ln x}} + 1 = 1 - e^{-ax}$.

$Y \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$.