Voici les questions sans préparation 2005 qu'à bien voulu nous fournir HEC. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2005

Question 1 HEC 2005-1 F 1 *élève*

Que dire d'une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant (x-y)^2$?

Question 2 HEC 2005-2 F 3 *élève*

f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a)=f(b)$, $f'(a)>0$ et $f'(b)>0$.

Montrer qu'il existe un élément c de $]a,b[$ tel que $f(c)=f(a)=f(b)$ et $f'(c)\leqslant 0$.

Question 3 HEC 2005-3 F 1 *élève*

Existe une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, symétrique, orthogonale et dont la première ligne est $(1\quad 0\quad 0)$.

F 2 *JF* Trouver l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui ont ces qualités.

Question 4 HEC 2005-4 F 1

E est un espace vectoriel de dimension finie et F, G, H sont trois sous-espaces vectoriels de E.

Montrer que la somme $F+G+H$ est directe si et seulement si $F\cap G=\{0_E\}$ et $(F+G)\cap H=\{0_E\}$.

Question 5 HEC 2005-5 F 2

Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[k\ln(n^2+k^2)\right]-n^2\ln n$

Question 6 HEC 2005-6 F 2

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels positifs ou nuls. On pose : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\dfrac{u_n}{1+u_n}$ et $w_n=\dfrac{u_n}{1+n^2\,u_n}$.

Y a-t-il un lien entre la nature de la série de terme général u_n et celle des autres ?

Question 7 HEC 2005-7 F 2

Quelles sont les lois possibles pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall (n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ P_{\{X>n\}}(X>n+p)=P(X>p)\quad ?$$

Question 8 HEC 2005-8 F 1

Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices symétriques non diagonalisable ?

Question 9 HEC 2005-9 F 2

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. f est un endomorphisme de E tel que $f^{n-1}\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^n=0_{\mathcal{L}(E)}$.

Déterminer le rang de f.

Question 10 HEC 2005-10 F 2

f et g sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)\,g(x) \geqslant 4$.

Montrer que $36 \leqslant \left(\int_{-2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-2}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Question 11 D'après HEC 2005-11 $\boxed{\text{F 2}}$

X est une variable aléatoire de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $[0, +\infty[$. On pose $Y = [X]$ (partie entière...)

Montrer que X possède une espérance si et seulement si Y possède une espérance.

Question 12 D'après HEC 2005-12 $\boxed{\text{F 2}}$

Etudier la fonction $f : x \to \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{t^2}{t^2 + (\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Question 1 **HEC 2005** $\boxed{\textbf{F 1}}$ *élève*

Que dire d'une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2$?

- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(y)| \leq (x-y)^2$.
$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\},\ \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leq |x-a|$. Alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$.

  f est dérivable en a et $f'(a)=0$.

  Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' \equiv 0$. f est constante.

- La réciproque est claire.

<u>Exercice.</u> Généraliser à : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(y)| \leq c\,|x-y|^\alpha$ avec $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in]1,+\infty[$.

R

Question 2 HEC 2005 $\boxed{\textbf{F3}}$ *élève*

f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a)=f(b)$, $f'(a)>0$ et $f'(b)>0$.

Montrer qu'il existe un élément c de $]a,b[$ tel que $f(c)=f(a)=f(b)$ et $f'(c)\leqslant 0$.

---

f' est continue sur $[a,b]$ et $f'(a)>0$.

Alors $\exists c_1\in\,]a,b[,\ \forall x\in[a,c_1],\ f'(x)>0$.

De même $\exists c_2\in\,]a,b[,\ \forall x\in[c_2,b],\ f'(x)>0$.

f est strictement croissante sur $[a,c_1]$ et $[c_2,b]$. $\forall x\in\,]a,c_1],\ f(x)>f(a)=f(b)$ et

$\forall x\in[c_2,b[,\ f(x)<f(b)=f(a)$. Nécessairement $c_1<c_2$. $f(c_1)>f(a)=f(b)>f(c_2)$

f prend sur $[c_1,c_2]$ toutes les valeurs entre $f(c_1)$ et $f(c_2)$.

Alors $\exists \alpha\in[c_1,c_2],\ f(\alpha)=f(a)=f(b)$.

Posons $S=\{x\in[c_1,c_2]\mid f(x)=f(a)=f(b)\}$. S est non vide ($\alpha\in S$) et

minoré par c_1. S possède une borne inférieure β. $\beta\in[c_1,c_2]$.

Il existe une suite (β_n) d'éléments de S qui converge vers β.

Par continuité $(f(\beta_n))$ converge vers $f(\beta)$. Or $(f(\beta_n))$ est une suite constante

et égale à $f(a)=f(b)$. Alors $f(\beta)=f(a)=f(b)$; $\beta\in S$.

β est donc le plus petit élément de S. Notons que $\beta\in\,]c_1,c_2[$

car $f(c_1)>f(a)=f(b)=f(\beta)$ et $f(c_2)<f(b)=f(a)=f(\beta)$.

Supposons $f'(\beta)>0$. (▲) Alors $\exists h\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]\beta-h,\beta+h[\,\subset\,]c_1,c_2[$

et $\forall x\in\,]\beta-h,\beta+h[,\ f'(x)>0$. f est donc strictement croissante sur $]\beta-h,\beta+h[$.

Soit d un élément de $]\beta-h,\beta[$. $f(d)<f(\beta)=f(a)=f(b)$.

Ainsi $f(c_1)>f(a)=f(b)$ et $f(d)<f(a)=f(b)$.

Alors $\exists d'\in\,]c_1,d[,\ f(d')=f(a)=f(b)$. Donc $d'\in S$, $d'<\beta$ et

β est le plus petit élément de S !! Ainsi $f'(\beta)\leqslant 0$.

Posons $c=\beta$. $f(c)=f(a)=f(b)$ et $f'(c)\leqslant 0$.

(▲) f' est continue en β. R

Question 3 HEC 2005 $\boxed{\text{F 2}}$ *élève*

Existe-t-il une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, symétrique, orthogonale et dont la première ligne est $(1 \quad 0 \quad 0)$.

• Supposons que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \end{pmatrix}$ orthogonale et symétrique

Alors $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha'' \\ \beta'' \end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$1+\alpha^2+\beta^2=1$; $\alpha=\beta=0$

$\alpha'^2+\beta'^2=\alpha''^2+\beta''^2=1$. $\exists t' \in [0,2\pi[$, $\exists t'' \in [0,2\pi[$, $\alpha'=\cos t'$, $\beta'=\sin t'$,

$\alpha''=\cos t''$; $\beta''=\sin t''$.

De plus $\begin{pmatrix} 0 \\ \cos t' \\ \sin t' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \cos t'' \\ \sin t'' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Alors $0 = \cos t' \cos t'' + \sin t' \sin t'' = \cos(t'-t'') = \cos(t''-t')$

$t''-t' \equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi]$. $\exists \ell \in \mathbb{Z}$, $t''-t' = \frac{\pi}{2} + \ell\pi$

Or $t''-t' \in]-2\pi, 2\pi[$. Alors $k \in \{-1, 0, 1\}$

1) $k=-1$ $\quad \alpha''=\cos t''=\cos\left(t'-\frac{\pi}{2}\right)=\sin t'$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t' & \sin t' \\ 0 & \sin t' & -\cos t' \end{pmatrix}$

$\beta''=\sin t''=\sin\left(t'-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos t'$

2) $k=0$ $\quad \alpha''=\cos t''=\cos\left(t'+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t'$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t' & -\sin t' \\ 0 & \sin t' & \cos t' \end{pmatrix}$

$\beta''=\sin t''=\sin\left(t'+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t'$

A est symétrique ; $\sin t'=-\sin t'$; $\sin t'=0$ et $\cos t'=\pm 1$ $\quad A=I_3$ ou $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3) $k=1$ $\quad \alpha''=\cos t''=\cos\left(t'+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin t'$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t' & \sin t' \\ 0 & \sin t' & -\cos t' \end{pmatrix}$

$\beta''=\sin t''=\sin\left(t'+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos t'$

• Réciproquement si $A=I_3$ ou $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

alors A est symétrique et orthogonale.

<u>Remarque</u>.. La réponse à la question tient en un mot : OUI (en I_n !!) Ici j'ai voulu donner toutes les solutions.

R

Question 4 **HEC 2005** $\boxed{\text{F 1}}$

E est un espace vectoriel de dimension finie et F, G, H sont trois sous-espaces vectoriels de E.

Montrer que la somme $F+G+H$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $(F+G) \cap H = \{0_E\}$.

C.N. Soit $x \in F \cap G$. $x = \underset{F}{x} + \underset{G}{0_E} + \underset{H}{0_E} = \underset{F}{0_E} + \underset{G}{x} + \underset{H}{0_E}$. Par unicité de la décomposition $x = 0_E$. Ainsi $F \cap G = \{0_E\}$.

Soit $x \in (F+G) \cap H$. $\exists (y,z) \in F \times G$, $x = y+z$

$x = \underset{F}{y} + \underset{G}{z} + \underset{H}{0_E} = \underset{F}{0_E} + \underset{G}{0_E} + \underset{H}{x}$. Par unicité de la décomposition $x = 0_E$.

$(F+G) \cap H = \{0_E\}$.

C.S. Soit $x \in F+G+H$. Supposons que $x = x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3$ avec

$(x_1, x_2, x_3) \in F \times G \times H$ et $(y_1, y_2, y_3) \in F \times G \times H$.

$\underbrace{(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)}_{\in F+G} = \underbrace{y_3 - x_3}_{\in H}$. Comme $(F+G) \cap H = \{0_E\}$:

$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = 0_E$ et $y_3 - x_3 = 0_E$.

Alors $x_3 = y_3$ et $\underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in F} = \underbrace{(y_2 - x_2)}_{\in G}$. Comme $F \cap G = \{0_E\}$:

$x_3 = y_3$ et $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0_E$.

Finalement $x_3 = y_3$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$.

Ceci achève de montrer que la somme $F+G+H$ est directe.

R

Question 5 HEC 2005 $\boxed{\text{F 2}}$

Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} [k \ln(n^2+k^2)] - n^2 \ln n$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} k \ln n^2 + \sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) - n^2 \ln n.$$

$$= 2\ln n \times \frac{n(n+1)}{2} - n^2 \ln n + n^2\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right]$$

$$= n^2\left[\underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\to\, 0} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}_{\to\, \int_0^1 t\ln(1+t^2)\,dt}\right]$$

$\Big\}$ $t \mapsto t\ln(1+t^2)$ est continue sur $[0,1]$

$$u_n \sim n^2 \int_0^1 t \ln(1+t^2)\,dt \qquad \left(\text{car } \int_0^1 t\ln(1+t^2)\,dt \neq 0\right)$$

$$\int_0^1 t\ln(1+t^2)\,dt \underset{\substack{u=t^2\\ du=2t\,dt}}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+u)\,du \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2}\left[(1+u)\ln(1+u)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+u)}{1+u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\,2\ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

R

Question 6 HEC 2005 $\boxed{\text{F 2}}$

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels positifs ou nuls. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ et $w_n = \dfrac{u_n}{1+n^2\,u_n}$.

Y a-t-il un lien entre la nature de la série de terme général u_n et celle des autres ?

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant u_n$ et $0 \leqslant w_n \leqslant u_n$.

Si la série de terme général u_n converge il en est de même des séries de termes généraux v_n et w_n.

• Supposons que la série de terme général v_n converge

$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$; $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $v_n \leqslant \frac{1}{2}$.

$\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $v_n(1+u_n) = u_n$.

$\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$. Or $\lim_{n\to+\infty}(1-v_n) = 1$,

Ainsi $u_n \sim v_n$

Alors la série de terme général u_n converge.

• Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

La série de terme général u_n diverge

$w_n = \dfrac{1}{1+n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$; la série de terme général w_n converge.

R

Question 7 **HEC 2005** $\boxed{\text{F 2}}$

Quelles sont les lois possibles pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ P_{\{X>n\}}(X > n+p) = P(X > p) \quad ?$$

- Soit X une var. solution du problème. Notons que nécessairement $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X>n) \neq 0$

$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $P(X>p) = \dfrac{P(\{X>n+p\} \cap \{X>n\})}{P(X>n)} = \dfrac{P(X>n+p)}{P(X>n)}$.

$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $P(X>n+p) = P(X>p)\,P(X>n)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X>n+1) = P(X>1)\,P(X>n)$

Mieux $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X>n+1) = P(X>1)\,P(X>n)$ car $P(X>0)=1$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = P(X>n)$.

$(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $P(X>1)$. Posons $q = P(X>1)$. $q \in]0,1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X>n) = u_n = q^n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = P(X>n-1) - P(X>n) = q^{n-1} - q^n = (1-q)q^{n-1}$.

Posons $p = 1-q$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = p(1-p)^{n-1}$.

$q = P(X>1) \in]0,1]$. Donc $p = 1-q \in [0,1[$.

Si $p=0$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n)=0$, $1 = \sum_{n=1}^{\infty} P(X=n) = 0$!!

Donc $p \in]0,1[$. Finalement $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

- La réciproque est aisée.

R

Question 8 **HEC 2005** $\boxed{\text{F 1}}$

Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices symétriques non diagonalisable ?

Pour $n=1$: NON

Pour $n=2$: OUI $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ (*) $\quad$ $\mathrm{Sp}\, A = \{1\}$ et A n'est pas scalaire donc A n'est pas diagonalisable.

Pour $n \geqslant 3$: OUI $\quad \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right)$

__Piste pour trouver A.__

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. Soit A est symétrique. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

$\lambda \in \mathrm{Sp}\, A \iff (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = 0 \iff \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$

$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-b^2) = (a-d)^2 + 4b^2$

Il ne reste plus qu'à trouver $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $(a-d)^2 + 4b^2 = 0$ __et__ $b \neq 0$

R

Question 9 **HEC 2005** $\boxed{\text{F 2}}$

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. f est un endomorphisme de E tel que $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Déterminer le rang de f.

$f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc f n'est pas injective. $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$; $\operatorname{rg} f \leq n-1$.

$\exists a \in E$, $f^{n-1}(a) \neq 0_E$.

Alors il est de notoriété publique que $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est libre.

Ainsi $(f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une famille libre de $\operatorname{Im} f$ de cardinal $n-1$.

Ainsi $\dim \operatorname{Im} f \geq n-1$; $\operatorname{rg} f \geq n-1$.

Finalement $\operatorname{rg} f = n-1$.

R

Question 10 **HEC 2005** $\boxed{\textbf{F 2}}$

f et g sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)\,g(x) \geqslant 4$.

Montrer que $36 \leqslant \left(\displaystyle\int_{-2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \left(\displaystyle\int_{-2}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ 4 \leq f(x)g(x) = |f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)|.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ 2 \leq \sqrt{|f(x)|}\sqrt{|g(x)|}$ CS

$$\int_{-2}^{1} 2\,dt \leq \int_{-2}^{1} \sqrt{|f(u)|}\sqrt{|g(u)|}\,du = \left|\int_{-2}^{1} \sqrt{|f(u)|}\sqrt{|g(u)|}\,du\right| \leq \sqrt{\int_{-2}^{1} |f(u)|\,du}\sqrt{\int_{-2}^{1} |g(u)|\,du}$$

Alors $6 \leq \sqrt{\displaystyle\int_{-2}^{1} |f(u)|\,du}\sqrt{\displaystyle\int_{-2}^{1} |g(u)|\,du}$

Ainsi $36 \leq \displaystyle\int_{-2}^{1} |f(u)|\,du \int_{-2}^{1} |g(u)|\,du$

Supposons que : $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1) > 0$ et $f(x_2) < 0$.

Alors f prend la valeur 0 en un point de $\mathbb{R}$; ceci est impossible car $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) \geqslant 4$.

Ainsi ou $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 0$.

Mieux $\begin{cases} \text{ou } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \text{ et alors } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) > 0 & (1) \\ \text{ou } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0 \text{ et alors } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) < 0 & (2) \end{cases}$

(1) donne $\displaystyle\int_{-2}^{1} |f(u)|\,du \int_{-2}^{1} |g(u)|\,du = \int_{-2}^{1} f(u)\,du \int_{-2}^{1} g(u)\,du$

(2) donne $\displaystyle\int_{-2}^{1} |f(u)|\,du \int_{-2}^{1} |g(u)|\,du = \int_{-2}^{1} (-f(u))\,du \int_{-2}^{1} (-g(u))\,du = \int_{-2}^{1} f(u)\,du \int_{-2}^{1} g(u)\,du$.

Ainsi dans tous les cas $36 \leq \left(\displaystyle\int_{-2}^{1} f(t)\,dt\right)\left(\int_{-2}^{1} g(t)\,dt\right)$.

R

Question 11 D'après HEC 2005 $\boxed{\text{F 2}}$

X est une variable aléatoire de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $[0, +\infty[$. On pose $Y = [X]$ (partie entière...)

Montrer que X possède une espérance si et seulement si Y possède une espérance.

$Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $P(Y=\ell) = P(\ell \leq X < \ell+1) = \int_\ell^{\ell+1} f(t)\,dt$.

$\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\ell P(Y=\ell) = \ell \int_\ell^{\ell+1} f(t)\,dt \leq \int_\ell^{\ell+1} t f(t)\,dt \leq (\ell+1)\int_\ell^{\ell+1} f(t)\,dt = \ell P(Y=\ell) + P(Y=\ell)$

La série de terme général $P(Y=\ell)$ étant convergente ce qui précède montre que les séries de termes généraux $\ell P(Y=\ell)$ et $\int_\ell^{\ell+1} t f(t)\,dt$ sont de même nature.

Alors $E(Y)$ existe ssi la série de terme général $\int_\ell^{\ell+1} t f(t)\,dt$ converge.

- Supposons que $E(X)$ existe. $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge.

  $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{\ell=0}^{n} \int_\ell^{\ell+1} t f(t)\,dt = \int_0^{n+1} t f(t)\,dt \leq \int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$.

  La série de terme général $\int_\ell^{\ell+1} t f(t)\,dt$ converge car elle est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée.

- Supposons que la série de terme général $\int_\ell^{\ell+1} t f(t)\,dt$ converge.

  $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $t f(t) \geq 0$. Pour montrer que $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge il suffit de prouver que $x \mapsto \int_0^x t f(t)\,dt$ est majorée.

  $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \int_0^x t f(t)\,dt \leq \sum_{\ell=0}^{[x]} \int_\ell^{\ell+1} t f(t)\,dt \leq \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_\ell^{\ell+1} t f(t)\,dt$

  Alors $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge. $E(X)$ existe.

Ceci achève de montrer que $E(X)$ existe ssi $E(Y)$ existe.

Remarque.. En cas d'existence : $E(Y) \leq E(X) \leq E(Y) + 1$!

R

Question 12 D'après HEC 2005 $\boxed{\text{F 2}}$

Etudier la fonction $x \to \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+(\sin t)^2}\,dt$.

$g : t \mapsto \dfrac{t^2}{t^2+\sin^2 t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

$f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+(\sin t)^2}\,dt$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid g$ est continue sur $[x,2x]$ ou $[2x,x]\} = \mathbb{R}^*$.

Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = G(2x) - G(x)$. Alors :

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2\,g(2x) - g(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2\,\dfrac{4x^2}{4x^2+(\sin 2x)^2} - \dfrac{x^2}{x^2+(\sin x)^2} = \dfrac{x^2}{(4x^2+\sin^2 2x)(x^2+\sin^2 x)}\underbrace{\left[8x^2+8(\sin x)^2-4x^2-(\sin 2x)^2\right]}_{N(x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $N(x) = 4x^2 + 8\sin^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x = 4x^2 + 4\sin^2 x\,(2-\cos^2 x) \geqslant 0$.

f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} g(t)\,dt \underset{u=-t}{=} \int_x^{2x} g(-u)(-du) = -\int_x^{2x} g(u)\,du = -f(x)$.

f est impaire sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $f(x) - x = \displaystyle\int_x^{2x}\left(\frac{t^2}{t^2+\sin^2 t} - 1\right)dt = -\int_x^{2x} \frac{\sin^2 t}{t^2+\sin^2 t}\,dt$.

$0 \leqslant x - f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin^2 t}{t^2+\sin^2 t}\,dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2+\sin^2 t} \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x - f(x)) = 0$. La droite d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

... et à $-\infty$ car f est impaire. Sur $]0,+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite d'équation $y = x$ et sur $]-\infty, 0[$ c'est le contraire.

$\lim\limits_{t \to 0} g(t) = 1/2$. g se prolonge en une fonction $\hat{g}$ continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\hat{G}$ une primitive de $\hat{g}$ sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \hat{G}(2x) - \hat{G}(x)$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \hat{G}(0) - \hat{G}(0) = 0$.

f se prolonge en une fonction continue $\hat{f}$ sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \hat{G}(2x) - \hat{G}(x)$.

$\hat{f}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, $\hat{f}(0) = 0$, $\hat{f}'(0) = 2\hat{g}(0) - \hat{g}(0) = \hat{g}(0) = \dfrac{1}{2}$.

R