QUESTIONS COURTES 2010

$\boxed{\textbf{F 1}}$ Assez simple ou proche du cours.

$\boxed{\textbf{F 2}}$ Demande du travail.

$\boxed{\textbf{F 3}}$ Délicat.

Question 1 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Extremums de la fonction $f:\ (x,y)\mapsto e^x+e^y+e^{1-x-y}$, (x,y) décrivant $[0,1]^2$.

(On rappelle que la moyenne géométrique de trois nombres positifs est toujours inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique).

Question 2 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit P une fonction polynomiale. Montrer que l'équation $P(x)=e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions réelles.

Question 3 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Trouver toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Question 4 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 2}}$

a) Soit $u\geqslant 1$. Comparer $\ln u$ et $u-1$.

b) Soit $f\in C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ telle que $f(0)=1$ et pour tout $x>0, f(x)>1$.

On suppose que : $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)\geqslant \dfrac{1}{\ln(f(x))}\cdot$ Montrer que : $\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)\geqslant 1+\sqrt{2x}$

Question 5 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$.

On définit la fonction F sur l'intervalle $]0,+\infty[$ en posant : $F(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{xf(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que F est continue sur $]0,+\infty[$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Question 6 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire de densité $x\mapsto \dfrac{1}{\ln 2}\times\dfrac{1}{1+x}\times\mathbf{1}_{[0,1]}$.

Montrer que $Y=\dfrac{1}{X}-\left\lfloor\dfrac{1}{X}\right\rfloor$ suit la même loi que X.

Question 7 ESCP 2010 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit E un espace euclidien de dimension n, avec $n\geqslant 2$.

On suppose qu'il existe $n+1$ vecteurs $e_1,e_2,\dots,e_{n+1}$ tels que pour $i\neq j : \langle e_i,e_j\rangle<0$.

a) Montrer, en utilisant la norme de u, que si $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0$

b) Montrer que n quelconques de ces vecteurs forment une base de E.

Question 8 **ESCP 2010** $\boxed{\textbf{F 1}}$

On casse un bâton de longueur 1. Le point de rupture suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Calculer la probabilité que le grand morceau soit au moins 3 fois plus grand que le petit morceau.

Question 9 **ESCP 2010** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que 2 événements A et B soient indépendants est que

$$P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B) \times P(A \cap \overline{B}).$$

Question 10 **ESCP 2010** $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont toutes les racines sont réelles.

Montrer que pour tout x réel : $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$.

Réciproquement si pour tout réel x, $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$, P a-t-il toutes ses racines réelles ?

Question 1 ESCP 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Extremums de la fonction $f : (x,y) \mapsto e^x + e^y + e^{1-x-y}$, (x,y) décrivant $[0,1]^2$.

(On rappelle que la moyenne géométrique de trois nombres positifs est toujours inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique).

Rappelons que $\forall (u,v,w) \in \mathbb{R}_+^3$, $\dfrac{u+v+w}{3} \geqslant \sqrt[3]{uvw}$.

Alors $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $f(x,y) = 3\,\dfrac{e^x + e^y + e^{1-x-y}}{3} \geqslant 3\sqrt[3]{e^x e^y e^{1-x-y}} = 3\,e^{1/3}$.

Notons que $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = e^{1/3} + e^{1/3} + e^{1-1/3-1/3} = 3\,e^{1/3}$.

Ainsi $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \leqslant f(x,y)$.

<u>f possède un minimum sur $[0,1]^2$ qui vaut $3\,e^{1/3}$</u>... ce que nous retrouverons dans la suite.

$\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{2}$.

<u>$[0,1]^2$ est un borné de $\mathbb{R}^2$.</u>

<u>$[0,1]^2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$</u> comme produit de deux fermés de $\mathbb{R}$.

De plus <u>f est continue sur $[0,1]^2$.</u>

Alors <u>f possède un maximum et un minimum sur $[0,1]^2$.</u> (1)

$]0,1[\times]0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$ et f est de classe C^1 sur $]0,1[^2$. Cherchons les points critiques de f sur $]0,1[^2$.

Soit $(x,y) \in]0,1[^2$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff \begin{cases} e^x - e^{1-x-y} = 0 \\ e^y - e^{1-x-y} = 0 \end{cases} \iff e^x = e^y = e^{1-x-y} \iff x = y = 1-x-y \iff x = y = \dfrac{1}{3}$.

<u>Ainsi si f admet un extremum en un point de $]0,1[^2$ ce point est $A = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.</u> (2)

R

c) A réalise le minimum de f sur $[0,1]^2$. Comme f n'est pas constante sur $[0,1]^2$, A ne réalise pas le maximum de f. Donc f atteint son maximum en un point de $F = [0,1]^2 \cap \overline{]0,1[^2}$.

$F = \underbrace{\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid x=0\}}_{F_1} \cup \underbrace{\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid x=1\}}_{F_2} \cup \underbrace{\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid y=0\}}_{F_3} \cup \underbrace{\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid y=1\}}_{F_4}$

- $\forall (x,y)\in F_1$, $x=0$, $y\in[0,1]$ et $f(x,y) = 1+e^y+e^{1-y}$.

Posons $\forall y\in[0,1]$, $\varphi(y) = e^y+e^{1-y}$. φ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall y\in[0,1]$, $\varphi'(y) = e^y - e^{1-y}$. $\forall y\in[0,1]$, $\varphi'(y)\geq 0 \Leftrightarrow e^y \geq e^{1-y} \Leftrightarrow y \geq 1-y \Leftrightarrow y\geq \frac{1}{2}$.

y	0		$1/2$		1
$\varphi'(y)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(y)$	$2+e$	$\searrow$	$1+2\sqrt{e}$	$\nearrow$	$2+e$

le maximum de φ sur $[0,1]$ est $2+e$ et il est atteint en 0 et 1.

le maximum de f sur F_1 est $2+e$ et il est atteint en $(0,0)$ et en $(0,1)$

x et y jouent un rôle symétrique : le maximum de f sur F_3 est $2+e$ et il est atteint en $(0,0)$ et $(1,0)$.

- $\forall (x,y)\in F_2$, $x=1$, $y\in[0,1]$ et $f(x,y) = e+e^y+e^{-y}$.

Posons $\forall y\in[0,1]$, $\psi(y) = e+e^y+e^{-y}$. ψ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall y\in[0,1]$, $\psi'(y) = e^y - e^{-y}$.

$\forall y\in[0,1]$, $\psi'(y)\geq 0 \Leftrightarrow e^y\geq e^{-y} \Leftrightarrow y\geq -y \Leftrightarrow y\geq 0$.

y	0		1
$\psi'(y)$		$+$	
$\psi(y)$	$2+e$	$\nearrow$	$2e+e^{-1}$

le maximum de ψ sur $[0,1]$ est $2e+e^{-1}$ et il est atteint en 1

le maximum de f sur F_2 est $2e+e^{-1}$ et il est atteint en $(1,1)$.

de même le maximum de f sur F_4 est $2e+e^{-1}$ et il est atteint en $(1,1)$

Finalement le maximum de f sur F est $2e+e^{-1}$ car $2e+e^{-1} > 2+e$ et il est atteint en $(1,1)$.

B

<u>Finalement le maximum de f sur $[0,1]^2$ est $2e+e^{-1}$ et il est atteint a le seul point $(1,1)$.</u>

<u>Remarque</u>.. Notons que la démarche initiale au minimum n'est pas utile.

- (1) montre que f possède un maximum et un minimum sur $[0,1]$
- (2) montre que si f atteint son maximum (resp. minimum) en un point de $]0,1[^2$ c'est nécessairement en $A=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ et ce maximum (resp. minimum) vaut $f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ c'est-à-dire $3e^{1/3}$.
- L'étude de φ et ψ montre que le maximum de f sur F est $2e+e^{-1}$ et qu'il est atteint en le seul point $(1,1)$.
  Comme $3e^{1/3} < 2e+e^{-1}$ nécessairement $2e+e^{-1}$ est le maximum de f sur $[0,1]^2$ et il est atteint en le seul point $(1,1)$.
- L'étude de φ et ψ montre que le minimum de f sur F est $1+2\sqrt{e}$ et il est atteint en $(0,\frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2},0)$. Comme $1+2\sqrt{e} > 3e^{1/3}$, le maximum de f sur $[0,1]^2$ est $3e^{1/3}$ et il est atteint en le seul point $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

Question 2 ESCP 2010 $\boxed{\text{F}}$

Soit P une fonction polynomiale. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions réelles.

Si P est nul c'est clair. Supposons P non nul et posons $r = \deg P$.

Posons encore : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = P(x) - e^x$. φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(k)}(x) = P^{(k)}(x) - e^x$.

En particulier $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(r+1)}(x) = -e^x \neq 0$ car $\deg P = r$.

Supposons que φ admet une infinité de zéros. Montrons alors par récurrence que pour tout i dans $[\![0, r+1]\!]$, $\varphi^{(i)}$ admet au moins $r+2-i$ zéros distincts.

→ La propriété est vraie pour $i=0$ car φ admet une infinité de zéros.

→ Supposons la propriété vraie pour i dans $[\![0, r]\!]$ et montrons la pour $i+1$.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{r+2-i}$, $r+2-i$ zéros de $\varphi^{(i)}$ tels que :

$x_1 < x_2 < \cdots < x_{r+2-i}$. Soit $k \in [\![1, r+1-i]\!]$. $\varphi^{(i)}$ est dérivable sur

$[x_k, x_{k+1}]$ et $\varphi^{(i)}(x_k) = \varphi^{(i)}(x_{k+1})$ $(=0)$. Le théorème de Rolle donne

l'existence de y_k dans $]x_k, x_{k+1}[$ tel que $\left(\varphi^{(i)}\right)'(y_k) = 0$ ou

tel que $\varphi^{(i+1)}(y_k) = 0$.

Alors $y_1, y_2, \ldots, y_{r+1-i}$ sont $r+1-i$ zéros distincts de $\varphi^{(i+1)}$.

Ainsi $\varphi^{(i+1)}$ admet au moins $r+2-(i+1)$ zéros distincts.

Ceci achève la récurrence.

En appliquant la propriété pour $r+1$ on obtient l'existence de au moins un zéro pour $\varphi^{(r+1)}$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(r+1)}(x) = -e^x$!!

Ainsi φ ne peut pas avoir une infinité de zéros. L'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions réelles.

Question 3 **ESCP 2010** $\boxed{\textbf{F1}}$

Trouver toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

* Soit M une matrice solution. Posons $E = \mathbb{C}^3$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathbb{C}^3$ et soit f l'endomorphisme de E de matrice M dans $\mathcal{B}$.

$M_{\mathcal{B}}(f^2) = M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ et $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Vect}(e_1)$.

$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ donc $\dim \operatorname{Ker} f \leq 2$. Montrons que $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

Supposons $\dim \operatorname{Ker} f = 0$. f est alors un endomorphisme injectif de E. Alors f^2 est également injectif. Donc $\operatorname{Ker} f^2 = \{0_E\}$! Ainsi $\dim \operatorname{Ker} f \geq 1$

Supposons $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$. Le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Im} f = 1 = \dim \operatorname{Im} f^2 = 1$.

Or $\operatorname{Vect}(e_1) = \operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. Ainsi $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Vect}(e_1) \subset \operatorname{Vect}(e_1, e_2) = \operatorname{Ker} f$.

Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. $\forall x \in E, f(x) \in \operatorname{Ker} f$. $\forall x \in E, f^2(x) = 0_E$. $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ce qui donne $M^2 = 0$!! Ainsi $\dim \operatorname{Ker} f \leq 1$.

Finalement $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. Alors $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Montrons que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.

$f(f(e_1)) = f(f(e_2)) = 0_E$. $f(e_1) \in \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ et $f(e_2) \in \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.

$\exists (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ $f(e_3) = x e_1 + y e_2 + z e_3$.

$e_1 = f^2(e_3) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) = x f(e_1) + y f(e_2) + z(x e_1 + y e_2 + z e_3)$.

Alors $z^2 e_3 = e_1 - x f(e_1) - y f(e_2) - z x e_1 - z y e_2 \in \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$

car $f(e_1) \in \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$, $f(e_2) \in \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$

Donc $z^2 e_3 \in \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.

Comme (e_1, e_2, e_3) est libre : $z^2 = 0$; $z = 0$. $f(e_3) = x e_1 + y e_2 \in \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.

Ainsi $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ sont dans $\operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.

Alors $\operatorname{Im} f = f(E) = f(\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3)) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \subset \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.

Or $\dim \operatorname{Im} f = 2 = \dim \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$. Donc $\underline{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)}$.

$\operatorname{Vect}(e_1) = \operatorname{Im} f^2 = f(f(E)) = f(\operatorname{Im} f) = f(\operatorname{Vect}(e_1, e_2)) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$.

En particulier : $f(e_1) \in \operatorname{Vect}(e_1)$ et $f(e_2) \in \operatorname{Vect}(e_1)$.

$\exists \alpha \in \mathbb{C}$, $f(e_1) = \alpha e_1$ et $\exists \beta \in \mathbb{C}$, $f(e_2) = \beta e_1$.

$0 = f^2(e_1) = \alpha^2 e_1$ et $e_1 \neq 0_E$. Alors $\alpha^2 = 0$. $\alpha = 0$. $f(e_1) = 0_E$.

Rappelons que $f(e_3) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$. $\exists (\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$; $f(e_3) = \gamma e_1 + \delta e_2$.

donc $M = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M^2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta\delta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\beta\delta = 1$.

Finalement $\underline{\underline{M = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \beta\delta = 1}}$.

* Réciproquement soit (β, γ, δ) un élément de $\mathbb{C}^3$ tel que $\beta\delta = 1$.

Posons $M = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta\delta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors M est solution.

$\underline{\underline{\text{L'ensemble des matrices } M \text{ de } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \text{ telles que } M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est}}}$

$\underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ (\beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^3 \text{ et } \beta\delta = 1 \right\}}}$

R

Question 4 ESCP 2010 $\boxed{\text{F}\mathcal{E}}$

a) Soit $u \geqslant 1$. Comparer $\ln u$ et $u-1$.

b) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x > 0, f(x) > 1$.

On suppose que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) \geqslant \dfrac{1}{\ln(f(x))}$. Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \geqslant 1 + \sqrt{2x}$

---

a) $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln u \leq u - 1$!

b) $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) > 1$. $\forall x \in]0, +\infty[$, $0 < \ln(f(x)) \leq f(x) - 1$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) \geq \dfrac{1}{\ln(f(x))} > 0$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[$, $1 \leq f'(x) \ln f(x) \leq f'(x)\,(f(x) - 1)$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $1 \leq f'(x) f(x) - f'(x)$.

Fixons x dans $]0, +\infty[$.

Soit $\varepsilon \in]0, x[$. $\forall t \in [\varepsilon, x]$, $1 \leq f'(t) f(t) - f'(t)$.

En intégrant il vient : $\displaystyle\int_\varepsilon^x 1\, dt \leq \int_\varepsilon^x f'(t) f(t)\, dt - \int_\varepsilon^x f'(t)\, dt$ car $\varepsilon \leq x$.

Ainsi $x - \varepsilon \leq \frac{1}{2}\left(f^2(x) - f^2(\varepsilon)\right) - f(x) + f(\varepsilon)$, ceci pour tout ε dans $]0, x[$. En faisant tendre ε vers 0^+ et en remarquant que f est continue en 0 il vient : $x \leq \frac{1}{2}\left(f^2(x) - f^2(0)\right) - f(x) + f(0)$.

Donc $2x \leq f^2(x) - 1 - 2 f(x) + 2$ car $f(0) = 1$.

$2x \leq (f(x) - 1)^2$; $\sqrt{2x} \leq |f(x) - 1| = f(x) - 1$ car $f(x) \geq 1$.

Ainsi $f(x) \geq 1 + \sqrt{2x}$.

Notons que ceci vaut encore pour $x = 0$ car $f(0) = 1$.

Donc $\underline{\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \geq 1 + \sqrt{2x}}$.

R

Question 5 ESCP 2010 $\boxed{F1}$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$.

On définit la fonction F sur l'intervalle $]0,+\infty[$ en posant : $F(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{xf(t)}{x+t}\,dt$.

Montrer que F est continue sur $]0,+\infty[$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=\int_0^1 f(t)\,dt$.

Notons que pour tout x dans $]0,+\infty[$, $t\mapsto \dfrac{x f(t)}{x+t}$ est continue sur $[0,1]$.

Donc F est définie sur $]0,+\infty[$. Soit $(x,y)\in(]0,+\infty[)^2$.

$$|F(x)-F(y)|=\left|\int_0^1\left(\frac{x}{x+t}-\frac{y}{y+t}\right)f(t)\,dt\right|\underset{0\leq 1}{\leq}\int_0^1\left|\frac{x(y+t)-y(x+t)}{(x+t)(y+t)}\right||f(t)|\,dt=\int_0^1\frac{|x-y|\,t}{(x+t)(y+t)}|f(t)|\,dt$$

$\forall t\in[0,1]$, $\dfrac{t}{y+t}\leq 1$ et $\dfrac{|x-y|}{(x+t)}|f(t)|\geq 0$.

Donc, comme $0\leq 1$, $\displaystyle |F(x)-F(y)|\leq\int_0^1\frac{|x-y|}{x+t}|f(t)|\,dt=|x-y|\int_0^1\frac{|f(t)|}{x+t}\,dt$.

Or $\displaystyle\lim_{y\mapsto x}\left(|x-y|\int_0^1\frac{|f(t)|}{x+t}\,dt\right)=0$.

Donc par encadrement il vient $\displaystyle\lim_{y\mapsto x}(F(y)-F(x))=0$ donc $\displaystyle\lim_{y\mapsto x}F(y)=F(x)$.

Ainsi <u>F est continue en x et ceci pour tout x dans $]0,+\infty[$.</u>

Soit $x\in]0,+\infty[$. Posons $I=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

$$|I-F(x)|=\left|\int_0^1\left(1-\frac{x}{x+t}\right)f(t)\,dt\right|\underset{0\leq 1}{\leq}\int_0^1\left|\frac{x+t-x}{x+t}\right||f(t)|\,dt=\int_0^1\frac{t}{x+t}|f(t)|\,dt$$

$\forall t\in[0,1]$, $\dfrac{1}{x+t}\leq\dfrac{1}{x}$ et $t|f(t)|\geq 0$.

Comme $0\leq 1$: $\displaystyle |I-F(x)|\leq\int_0^1\frac{1}{x}t|f(t)|\,dt=\frac{1}{x}\int_0^1 t|f(t)|\,dt$.

$\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^1 t|f(t)|\,dt\right)=0$ donc par encadrement :

$$\underline{\lim_{x\mapsto+\infty}F(x)=I=\int_0^1 f(t)\,dt.}$$

Question 6 ESCP 2010 $\boxed{\text{F1}}$

Soit X une variable aléatoire de densité $x \mapsto \dfrac{1}{\ln 2} \times \dfrac{1}{1+x} \times \mathbf{1}_{[0,1]}$.

Montrer que $Y = \dfrac{1}{X} - \lfloor \dfrac{1}{X} \rfloor$ suit la même loi que X.

Posons $Z = \dfrac{1}{X}$. Z prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ car X prend ses valeurs dans $[0,1]$... ou dans $]0,1]$. Notons F_X et F_Y les fonctions de répartitions de X et de Y.

Y prend ses valeurs dans $[0,1[$. Ainsi $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_Y(x) = 0$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F_Y(x) = 1$.

X également donc $\underline{\forall x \in]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[,\ F_Y(x) = F_X(x)}$.

Posons $T = \lfloor \frac{1}{X} \rfloor = \lfloor Z \rfloor$. T prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. $(\{T = k\})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. Soit $x \in [0,1[$.

$$F_Y(x) = P(Z - T \leqslant x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{T = k\} \cap \{Z - k \leqslant x\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{k \leqslant Z < k+1\} \cap \{Z \leqslant k+x\})$$

$$\underset{x \in [0,1[}{F_Y(x) =} \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leqslant Z < k+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\frac{1}{k+x} < X \leqslant \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{k+x}}^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{1+t}.$$

$$F_Y(x) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{+\infty} \Big[\ln(1+t)\Big]_{1/(k+x)}^{1/k} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{k+x}\right)\right]$$

$$F_Y(x) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\ln(k+1) - \ln k - \ln(k+1+x) + \ln(k+x)\Big)$$

$$F_Y(x) = \frac{1}{\ln 2} \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \Big(\ln(k+1) - \ln k - \ln(k+1+x) + \ln(k+x)\Big)$$

$$F_Y(x) = \frac{1}{\ln 2} \lim_{N \to +\infty} \Big(\ln(N+1) - 0 - \ln(N+1+x) + \ln(1+x)\Big)$$

$$F_Y(x) = \frac{1}{\ln 2} \lim_{N \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{N+1}{N+1+x}\right) + \ln(1+x)\right) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} = \int_0^x \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+t}\, dt = F_X(x)$$

$$\frac{N+1}{N+1+x} \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{N}{N} = 1.$$

donc $\underline{\forall x \in [0,1[,\ F_Y(x) = F_X(x)}$.

Finalement $F_Y = F_X$. $\underline{\underline{Y \text{ et } X \text{ ont même loi.}}}$

R

Question 7 ESCP 2010 $\boxed{\text{F2}}$

Soit E un espace euclidien de dimension n, avec $n \geqslant 2$.

On suppose qu'il existe $n+1$ vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ tels que pour $i \neq j : \langle e_i, e_j \rangle < 0$.

a) Montrer, en utilisant la norme de u, que si $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, alors $\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0$

b) Montrer que n quelconques de ces vecteurs forment une base de E.

---

a) Supposons que $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ soit un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$.

Posons $I = \{i \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_i > 0\}$.

1er cas.. $I = [\![1,n]\!]$. Alors $0_E = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i$; $\sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0_E$

2e cas.. $I = \emptyset$. Alors $0_E = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = -\sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i$; $\sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0_E$

3e cas.. $I \neq [\![1,n]\!]$ et $I \neq \emptyset$. Posons $I' = [\![1,n]\!] - I$.

I' n'est pas vide et $I' = \{i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \leqslant 0\}$

$$0_E = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i + \sum_{i \in I'} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I} |\lambda_i| e_i - \sum_{i \in I'} |\lambda_i| e_i .$$

Posons $v = \sum\limits_{i \in I} |\lambda_i| e_i$ et $w = \sum\limits_{i \in I'} |\lambda_i| e_i$.

$$0 = \|0_E\|^2 = \|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w \rangle .$$

$$-2\langle v, w \rangle = -2 \sum_{i \in I} \sum_{j \in I'} |\lambda_i| |\lambda_j| \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{<0 \text{ car } i \neq j \ (i \in I,\, j \in I',\, I \cap I' = \emptyset)} \geqslant 0$$

Donc $0 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w \rangle = 0$ avec $\|v\|^2 \geqslant 0$, $\|w\|^2 \geqslant 0$, $-2\langle v, w \rangle \geqslant 0$

Ainsi $\|v\|^2 = \|w\|^2 = -2\langle v, w \rangle = 0$. En particulier $v = w = 0_E$.

Donc $0_E = v + w = \sum\limits_{i \in I} |\lambda_i| e_i + \sum\limits_{i \in I'} |\lambda_i| e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i$; $\sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0_E$

Dans les trois cas $\sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0_E$

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0_E .$$

R

b) Montrons que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$

d'après a) : $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0_E$.

Alors $0 = \langle 0_E, e_{n+1} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i, e_{n+1} \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \langle e_i, e_{n+1} \rangle$

or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i| \langle e_i, e_{n+1} \rangle \leq 0$

donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i| \langle e_i, e_{n+1} \rangle = 0$ et $\langle e_i, e_{n+1} \rangle < 0$.

Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i| = 0$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.

Ceci achève de montrer la liberté de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$

Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$. Montrons que $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1})$ est libre.

La famille $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1}, e_i)$ a les mêmes qualités que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$. Ce qui précède montre alors que $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1})$ est libre.

Ceci achève de montrer que n quelconques des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ constituent une famille libre de E. Or $\dim E = n$. Ainsi :

<u>n quelconques des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ forment une base de E.</u>

Question 8 ESCP 2010 F1

On casse un bâton de longueur 1. Le point de rupture suit la loi uniforme sur [0, 1].

Calculer la probabilité que le grand morceau soit au moins 3 fois plus grand que le petit morceau.

Notons X la variable aléatoire égale au point de rupture. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

On cherche la probabilité de l'événement $A = \{\max(X, 1-X) \geqslant 3 \min(X, 1-X)\}$

$P(A) = P(A \cap \{X \leqslant \frac{1}{2}\}) + P(A \cap \{X > \frac{1}{2}\})$

$P(A) = P(\{1-X \geqslant 3X\} \cap \{X \leqslant \frac{1}{2}\}) + P(\{X \geqslant 3(1-X)\} \cap \{X > \frac{1}{2}\})$.

$P(A) = P(\{X \leqslant \frac{1}{4}\} \cap \{X \leqslant \frac{1}{2}\}) + P(\{X \geqslant \frac{3}{4}\} \cap \{X > \frac{1}{2}\})$.

$P(A) = P(X \leqslant \frac{1}{4}) + P(X \geqslant \frac{3}{4}) = P(X \leqslant \frac{1}{4}) + 1 - P(X < \frac{3}{4})$.

$P(A) = (1/4) + 1 - (3/4) = 1/2$.

La probabilité cherchée est 1/2.

Question 9 ESCP 2010 $\boxed{\text{F1}}$

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que 2 événements A et B soient indépendants est que

$$P(A\cap B)\times P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A}\cap B)\times P(A\cap\overline{B}).$$

A et B sont deux événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1 - P(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}) = 1 - P(\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B)$.
- $P(A) = P(A\cap\overline{B}) + P(A\cap B)$; $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$.
- $P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap\overline{A})$; $P(\overline{A}\cap B) = P(B\cap\overline{A}) = P(B) - P(B\cap A) = P(B) - P(A\cap B)$.

Alors : $P(A\cap B)\,P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A}\cap B)\times P(A\cap\overline{B})$

$\Updownarrow$

$P(A\cap B)\big(1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B)\big) = \big(P(B) - P(A\cap B)\big)\big(P(A) - P(A\cap B)\big)$

$\Updownarrow$

$P(A\cap B) - P(A\cap B)P(A) - P(A\cap B)P(B) + \big(P(A\cap B)\big)^2 = P(B)P(A) - P(B)P(A\cap B) - P(A\cap B)P(A) + \big(P(A\cap B)\big)^2$

$\Updownarrow$

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$

$\Updownarrow$

A et B sont indépendants.

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A\cap B)\times P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A}\cap B)\,P(A\cap\overline{B})$.

R

Question 10 ESCP 2010 F

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont toutes les racines sont réelles.

Montrer que pour tout x réel : $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$.

Réciproquement si pour tout réel x, $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$, P a-t-il toutes ses racines réelles ?

Notons que si P est constant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$ car $P' = P'' = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Dans la suite nous supposons que P n'est pas constant et que toutes ses racines sont réelles. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \exists r \in \mathbb{N}^*, \exists (x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - x_k)$.

Posons $D = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$.

Notons que si $x \in D$: $P'^2(x) \geqslant 0 = P(x)P''(x)$ (car $P(x) = 0$).

Donc $\forall x \in D$, $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$.

$\varphi : x \mapsto \ln |P(x)|$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus D$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $\varphi'(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $\varphi(x) = \ln \left|\lambda \prod_{k=1}^{r} (x - x_k)\right| = \ln|\lambda| + \sum_{k=1}^{r} \ln|x - x_k|$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $\varphi'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{r} \dfrac{1}{x - x_k}$. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{r} \dfrac{1}{x - x_k} = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$

φ' est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus D$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $\varphi''(x) = -\sum_{k=1}^{r} \dfrac{1}{(x - x_k)^2} \leqslant 0$.

Or on a aussi $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $\varphi''(x) = \dfrac{1}{(P(x))^2} \left[P''(x)P(x) - P'(x)P'(x) \right]$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $P''(x)P(x) - (P'(x))^2 \leqslant 0$; $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$.

Posons $P = X^3 + X$. Les racines de P sont 0, i et $-i$. Elles ne sont pas toutes réelles.

$P'^2 - PP'' = (3X^2+1)^2 - (X^3+X)(6X) = 9X^4 + 6X^2 + 1 - 6X^4 - 6X^2 = 3X^4 + 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P'^2(x) - P(x)P''(x) = 3x^4 + 1 \geqslant 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'^2(x) \geqslant P(x)P''(x)$.

En clair la réciproque est fausse.

QUESTIONS COURTES 2010

F 1 Assez simple ou proche du cours.

F 2 Demande du travail.

F 3 Délicat.

Question 11 **ESCP 2010** S. ARSALANE et J.D. FOATA **F1**

Existence et valeur de $\underset{(a,b)\in(]0,+\infty[)^2}{\text{Min}}\left(\sqrt{a+b}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)\right)$.

Question 12 **ESCP 2010** O. GUESNÉ **F 1**

u_1, u_2, ..., u_n sont n réels tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1$. A est la matrice $(u_i\, u_j)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = 2\,A - I_n$.

Montrer que B est orthogonale. Quelles-sont les valeurs propres de A ?

Question 13 **ESCP 2010** G. FOUBART **F 1**

André, Jacques et Maurice se donnent rendez-vous et se déplacent de façon indépendante.

La probabilité pour que André (resp. Jacques et Maurice) arrive à l'heure est 1/2 (resp. 1/3 et 1/4).

Quelle est la probabilité pour que au moins 2 personnes soient à l'heure ?

Question 14 **ESCP 2010** X. MARTUCCI **F1**

X est une variable aléatoire de densité f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 2}\,\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On pose $Y = \dfrac{1}{X} - \text{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ Montrer que Y suit la même loi que X.

Question 15 **ESCP 2010** E. JARDIN **F1**

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

Trouver la loi de $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que la suite Y_n converge en loi.

Question 16 **ESCP 2010** Obtenue par E. JARDIN **F1**

A est une matrice carrée d'ordre n. Pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = 1$ si $i + j = n + 1$ et 0 sinon.

Déterminer le spectre de A

Question 17 **ESCP 2010** F. HUA **F 1**

Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3-1} - \sqrt{x^2-1}\right) \mathrm{d}x$.

Question 18 **ESCP 2010** T. VERGER $\boxed{\textbf{F1}}$

f est une application continue de $[a, b]$ $(a < b)$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ si et seulement si f garde un signe constant sur $[a, b]$.

Question 19 **ESCP 2010** K. AFRIAT $\boxed{\textbf{F1}}$

Q1. Montrer que $F : x \to \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant pour fonction de répartition F.

Montrer que $(\mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \ln n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi.

Question 20 **ESCP 2010** J. DIAZ $\boxed{\textbf{F1}}$

Donner les conditions pour que $x \to a\, e^{-|x|}\, \ln(1 + e^{|x|})$ soit une densité de probabilité.

Question 21 **ESCP 2010** S. ALLAIN $\boxed{\textbf{F1}}$

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a p valeurs propres distinctes et est diagonalisable. Donnez le degré minimal pour un polynôme annulateur non nul de cette matrice.

Question 22 **ESCP 2010** J. MESNILDREY et M. PARIN $\boxed{\textbf{F2}}$

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité f continue sur $[a, b]$ et nulle en dehors de $[a, b]$.

Justifier l'existence d'un réel α tel que $E(|X - \alpha|)$ soit minimale. Que représente α ?

Question 23 **ESCP 2010** L. VIE $\boxed{\textbf{F2}}$

n et p sont deux éléments de $[\![2, +\infty[\![$. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $A^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

On pose $E = \{P(A)\,;\, P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et trouver sa dimension.

Question 24 **ESCP 2010** D. ATTIAS $\boxed{\textbf{F1}}$

On lance une pièce qui donne face avec la probabilité p (où p appartient $]0, 1[$). n est entier supérieur ou égal 1. On note : P_n (resp. F_n) la variable aléatoire égale au nombre de piles (resp. faces) obtenus au cours des n premiers lancers. ε est un réel strictement positif.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{F_n - P_n}{n} - (1 - 2p)\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1$.

Question 25 **ESCP 2010** G. PECORARI $\boxed{\textbf{F1}}$

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Les boules numérotées de 1 à k sont rouges et les autres blanches $(1 < k < n)$.

On effectue n tirages successifs et sans remise d'une boule dans l'urne. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, X_i est la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage et 0 sinon.

Trouver la loi de X_i, $E(X_i)$, $V(X_i)$.

Écrire une fonction en Turbo-Pascal qui simule la variable aléaoire X_i.

Question 26 ESCP 2010 J. HÉRY $\boxed{\textbf{F2}}$

n appartient à $[\![2, +\infty[\![$. Soit P un polynôme réel de degré n, admettant n racines réelles distinctes.

a) Combien P' admet-il de racines réelles ?

b) Comparer la moyenne arithmétique des racines de P à la moyenne arithmétique des racines de P'.

Question déjà donnée en 2009.

Question 27 ESCP 2010 PROST et ROUX

Une urne contient $4n+2$ boules numérotées de 1 à $4n+2$. On tire $2n+1$ boules sans remise, quelle est la probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à la somme des numéros des boules restantes ?

Question déjà donnée en 2009.

Question 11 ESCP 2010 S. ARSALANE et J.D. FOATA $\boxed{\text{F1}}$

Existence et valeur de $\underset{(a,b)\in]0,+\infty[^2}{\text{Min}} \left(\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\right)$.

Posons $\forall (a,b)\in(]0,+\infty[)^2$, $f(a,b)=\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)$.

$\forall (a,b)\in(]0,+\infty[)^2$, $f(a,b)=\sqrt{\frac{a+b}{a}}+\sqrt{\frac{a+b}{b}}=\sqrt{1+b/a}+\sqrt{1+a/b}$.

Posons $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1+1/x}$.

Alors $\forall (a,b)\in(]0,+\infty[)^2$, $f(a,b)=\varphi\left(\frac{b}{a}\right)$. Etudions φ sur $]0,+\infty[$.

φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[$, $\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{-1/x^2}{2\sqrt{1+1/x}}=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{x^2}\,\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1+x}}$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x)=\frac{1}{2x^2\sqrt{1+x}}\left[x^2-\sqrt{x}\right]=\frac{\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{1+x}}\left(x\sqrt{x}-1\right)$

$\varphi'(1)=0$, $\forall x\in]0,1[$, $\varphi'(x)<0$ et $\forall x\in]1,+\infty[$, $\varphi'(x)>0$.

φ est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Ainsi $\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\varphi(x)>\varphi(1)=2\sqrt{2}$.

Donc 1) φ admet un minimum sur $]0,+\infty[$ qui vaut $2\sqrt{2}$.

2) 1 est le seul élément de $]0,+\infty[$ qui réalise ce minimum.

Soit $(a,b)\in(]0,+\infty[)^2$. $f(a,b)=\varphi\left(\frac{b}{a}\right)\geqslant 2\sqrt{2}=\varphi(1)=f\left(\frac{1}{1}\right)=f(1,1)$.

Donc $\underset{(a,b)\in(]0,+\infty[)^2}{\text{Min}}\left(\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\right)$ existe et vaut $2\sqrt{2}$.

Soit $(a,b)\in(]0,+\infty[)^2$.

$f(a,b)=2\sqrt{2}\iff\varphi\left(\frac{b}{a}\right)=2\sqrt{2}\iff\frac{b}{a}=1\iff a=b$.

L'ensemble des points de $(]0,+\infty[)^2$ qui réalisent le minimum de f est

$\{(a,a)\,;\ a\in]0,+\infty[\}$.

Question 12 ESCP 2010 O. GUESNÉ **F1**

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont n réels tels que $\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1$. A est la matrice $(u_i u_j)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = 2A - I_n$.

Montrer que B est orthogonale. Quelles-sont les valeurs propres de A ?

Nous notons $<\cdot,\cdot>$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|.\|$ la norme associée. Nous posons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. $\|U\|^2 = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1$.

Observons que $\underline{\underline{A = U\,{}^tU}}$

${}^tA = {}^t(U\,{}^tU) = {}^t({}^tU)\,{}^tU = U\,{}^tU = A$. $\underline{A \text{ est symétrique}}$. B également ! $\underline{{}^tB = B}$

$A^2 = U\underbrace{{}^tU\,U}_{\|U\|^2}{}^tU = \|U\|^2\,U\,{}^tU = U\,{}^tU = A$; $\underline{A^2 = A}$

<u>Remarque</u>.. A est la matrice d'une projection orthogonale car $A^2 = A$ et A est symétrique

Alors $B = 2A - I_n$ est la matrice d'une symétrie orthogonale...

Ainsi ${}^tB = B$ et $B^2 = I_n$ donc ${}^tBB = I_n$ et B est orthogonale !!

Oublions la remarque.. ${}^tB\,B = B^2 = (2A - I_n)^2 \underset{AI_n = I_nA}{=} 4A^2 - 4A + I_n \underset{A^2 = A}{=} I_n$.

B est une matrice orthogonale.

$A^2 - A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de A ayant pour zéros 0 et 1.

$\operatorname{Sp} A \subset \{0, 1\}$.

$AU = U\underbrace{{}^tU\,U}_{\|U\|^2} = \|U\|^2 U = U$ et $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $1 \in \operatorname{Sp} A$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff U\,{}^tU\,X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff <U,X>U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \underset{U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}}{\iff} <U,X> = 0$

$AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff X \in (\operatorname{Vect}(U))^\perp$.

1^{er} cas $n = 1$ Alors $\underline{\underline{\operatorname{Sp} A = \{1\}}}$

2^e cas $n \geq 2$ $(\operatorname{Vect}(U))^\perp$ est non réduit à $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ car sa dimension est $n-1$;

alors $0 \in \operatorname{Sp} A$. Finalement $\underline{\underline{\operatorname{Sp} A = \{0, 1\}}}$.

<u>Remarque</u>.. $\operatorname{SEP}(A, 0) = (\operatorname{Vect}(U))^\perp$ et $\operatorname{SEP}(A, 1) = \operatorname{Vect}(U)$.

Question 13 ESCP 2010 G. FOUBART $\boxed{\text{F 1}}$ ou F0

André, Jacques et Maurice se donnent rendez-vous et se déplacent de façon indépendante.

La probabilité pour que André (resp. Jacques et Maurice) arrive à l'heure est 1/2 (resp. 1/3 et 1/4).

Quelle est la probabilité pour que au moins 2 personnes soient à l'heure ?

Notons S l'événement dont on cherche la probabilité.

Notons A (resp. J ; resp. M) l'événement André (resp. Jacques ; resp. Maurice) arrive à l'heure. $P(A) = 1/2$, $P(J) = 1/3$, $P(M) = 1/4$.

S est la réunion des événements incompatibles : $A\cap J\cap \bar{M}$, $A\cap \bar{J}\cap M$, $\bar{A}\cap J\cap M$, $A\cap J\cap M$.

Donc $P(S) = P(A\cap J\cap \bar{M}) + P(A\cap \bar{J}\cap M) + P(\bar{A}\cap J\cap M) + P(A\cap J\cap M)$.

Par indépendance on obtient :

$P(S) = P(A)P(J)P(\bar{M}) + P(A)P(\bar{J})P(M) + P(\bar{A})P(J)P(M) + P(A)P(J)P(M)$

$P(S) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$

$P(S) = \frac{1}{24}(3+2+1+1) = \frac{7}{24}$. $\quad \underline{\underline{P(S) = \frac{7}{24}}}$.

Question 14 ESCP 2010 X. MARTUCCI $\boxed{\text{F1}}$

X est une variable aléatoire de densité f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On pose $Y = \dfrac{1}{X} - \text{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ Montrer que Y suit la même loi que X.

Posons $Z = \dfrac{1}{X}$. Notons F_Z sa fonction de répartition.

Z prend ses valeurs dans $[1,+\infty[$. $\forall x \in]-\infty,1[,\ F_Z(x) = 0$.

Soit $x \in [1,+\infty[$. $F_Z(x) = P\left(\dfrac{1}{X} \leq x\right) = P\left(\dfrac{1}{x} \leq X\right) = 1 - P\left(X < \dfrac{1}{x}\right) = 1 - \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{dt}{(\ln 2)(t+1)}$.

$\begin{cases} X \text{ prend des valeurs positives...} \\ x > 0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{1}{x} \in [0,1]$

$F_Z(x) = 1 - \dfrac{1}{\ln 2}\Big[\ln|t+1|\Big]_0^{1/x} = 1 - \dfrac{1}{\ln 2}\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right) = 1 - \dfrac{1}{\ln 2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\ln 2}\ln\dfrac{x+1}{x} & \text{si } x \in [1,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

<u>Exercice</u>.. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité.

Posons $T = \text{Ent}(Z)$. $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$. $\left(\{T=k\}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements...

$Y = \dfrac{1}{X} - \text{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right) = Z - \text{Ent}(Z) = Z - T$ prend ses valeurs dans $[0,1[$.

Notons F_Y la fonction de répartition de Y. $\forall x \in]-\infty,0[,\ F_Y(x) = 0$ et

$\forall x \in [1,+\infty[,\ F_Y(x) = 1$. Soit $x \in [0,1[$.

$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(Z - T \leq x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\{T=k\} \cap \{Z - T \leq x\}\right)$

$F_Y(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\{\text{Ent}(Z)=k\} \cap \{Z \leq x+k\}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\{k \leq Z < k+1\} \cap \{Z \leq x+k\}\right)$.

Or $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ x+k < k+1$ car $x \in [0,1[$

Alors $F_Y(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq Z \leq x+k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(F_Z(x+k) - F_Z(k)\right)$

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{\ell=1}^{r} \left(F_Z(x+\ell) - F_Z(\ell)\right) = \sum_{\ell=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{x+\ell+1}{x+\ell}\right) - 1 + \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{\ell+1}{\ell}\right)\right)$$

$$\sum_{\ell=1}^{r} \left(F_Z(x+\ell) - F_Z(\ell)\right) = \left[\sum_{\ell=1}^{r} \left(\ln(x+\ell) - \ln(x+\ell+1)\right) + \sum_{\ell=1}^{r} \left(\ln(\ell+1) - \ln \ell\right)\right] \times \frac{1}{\ln 2}$$

$$\sum_{\ell=1}^{r} \left(F_Z(x+\ell) - F_Z(\ell)\right) = \left[\ln(x+1) - \ln(x+r+1) + \ln(r+1) - \ln 1\right] \times \frac{1}{\ln 2}.$$

$$\sum_{\ell=1}^{r} \left(F_Z(x+\ell) - F_Z(\ell)\right) = \frac{1}{\ln 2} \ln(x+1) - \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{x+r+1}{r+1}\right)$$

Or $\lim\limits_{r \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{x+r+1}{r+1}\right)\right) = \ln 1 = 0$.

Alors $F_Y(x) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(F_Z(x+\ell) - F_Z(\ell)\right) = \frac{1}{\ln 2} \ln(x+1)$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{\ln 2} \ln(x+1) & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Notons F_X la fonction de répartition de X.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0 = F_Y(x)$

$\forall x \in [0, 1[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+t}\,dt = \frac{1}{\ln 2} \left[\ln|1+t|\right]_0^x = \frac{1}{\ln 2} \ln(x+1) = F_Y(x)$.

$\forall x \in [1, +\infty[\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F_X(1) + \int_1^x f(t)\,dt = 1 + 0 = 1 = F_Y(x)$.

Donc $F_Y = F_X$. <u>Y suit la même loi que X.</u>

Question 15 ESCP 2010 E. JARDIN $\boxed{\text{F1}}$

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

Trouver la loi de $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que la suite Y_n converge en loi.

$\boxed{\text{V1}}$ $Y_n(\Omega) = \{-1, 1\}$. $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{S}_k$ est l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ ayant k éléments.

$$\{Y_n = 1\} = \bigcup_{0\leqslant 2k\leqslant n} \bigcup_{J\in \mathcal{S}_{2k}} \left[\left(\bigcap_{j\in J} \{X_j = -1\}\right) \cap \left(\bigcap_{j\in \overline{J}} \{X_j = 1\}\right)\right] \ !!!$$

En effet $\{Y_n = 1\}$ se réalise si et seulement si un nombre pair de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ prennent la valeur -1.

Par incompatibilité :

$$P(Y_n = 1) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \sum_{J\in \mathcal{S}_{2k}} P\left(\left(\bigcap_{j\in J} \{X_j = -1\}\right) \cap \left(\bigcap_{j\in \overline{J}} \{X_j = 1\}\right)\right)$$

par indépendance

$$P(Y_n = 1) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \sum_{J\in \mathcal{S}_{2k}} \left(\prod_{j\in J} P(X_j = -1)\right)\left(\prod_{j\in \overline{J}} P(X_j = 1)\right)$$

$$P(Y_n = 1) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \sum_{J\in \mathcal{S}_{2k}} q^{\operatorname{card} J} \times p^{\operatorname{card} \overline{J}} = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \sum_{J\in \mathcal{S}_{2k}} q^{2k} p^{n-2k}.$$

$\forall k' \in [\![0, n]\!]$, $\operatorname{card} \mathcal{S}_{k'} = \binom{n}{k'}$.

$$\underline{\underline{P(Y_n = 1) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} q^{2k} p^{n-2k}}}$$

$$1 = (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k p^{n-k} = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} q^{2k} p^{n-2k} + \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1} q^{2k+1} p^{n-(2k+1)}$$

$$(p-q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-q)^k p^{n-k} = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} q^{2k} p^{n-2k} - \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1} q^{2k+1} p^{n-(2k+1)}$$

En ajoutant il vient : $1 + (p-q)^n = 2\,P(Y_n = 1)$. $\underline{\underline{P(Y_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + (p-q)^n\right)}}$.

$P(Y_n = -1) = 1 - P(Y_n = 1) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + (p-q)^n\right)$. $\underline{\underline{P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}\left(1 - (p-q)^n\right)}}$.

$\boxed{V2}$ Même chose en plus simple. Soit N la variable aléatoire qui compte le nombre de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ amenant -1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ étant indépendantes, N suit la loi binomiale de paramètres n et q.

$(Y_n = 1)$ se réalise si et seulement si N prend pour valeur un entier pair de l'intervalle $[\![0, n]\!]$.

Alors $P(Y_n = 1) = \sum\limits_{0 \leq 2k \leq n} P(N = 2k) = \sum\limits_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} q^{2k} p^{n-2k} = \dots = \frac{1}{2}\left(1 + (p-q)^n\right)$.

$\uparrow$ <u>Voir V1</u>.

$\boxed{V3}$ $Y_n(\Omega) = \{-1, 1\}$. Posons $\alpha = P(Y_n = 1)$.

$E(Y_n) = 1 \times \alpha + (-1)(1-\alpha) = 2\alpha - 1$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $E(X_i) = 1 \times p + (-1) \times q = p - q$.

Alors $2\alpha - 1 = E(Y_n) = E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2) \dots E(X_n) = (p-q)^n$.

Ainsi $P(Y_n = 1) = \alpha = \frac{1}{2}\left(1 + (p-q)^n\right)$.

$p \in]0, 1[$. $q = 1 - p \in]0, 1[$. $p - q \in]-1, 1[$. $|p - q| < 1$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (p-q)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Y_n = 1) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$.

<u>Alors $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.</u>

Question 16 **ESCP 2010** Obtenue par E. JARDIN $\boxed{\textbf{F1}}$

A est une matrice carrée d'ordre n. Pour tout (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = 1$ si $i+j = n+1$ et 0 sinon.

Déterminer le spectre de A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme de matrice A dans $\mathcal{B}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = e_{n+1-i}$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f^2(e_i) = f(e_{n+1-i}) = e_{n+1-(n+1-i)} = e_i$.

$f^2 = Id_E$. $A^2 = I_n$. Ainsi $Sp\, A \subset \{-1, 1\}$.

$f\left(\sum_{i=1}^n e_i\right) = \sum_{i=1}^n f(e_i) = \sum_{i=1}^n e_{n+1-i} = \sum_{i=1}^n e_i$ et $\sum_{i=1}^n e_i \neq 0_E$. Donc $1 \in Sp f = Sp A$.

<u>1er cas</u>.. $n = 1$. Alors $\underline{Sp A = \{1\}}$.

<u>2e cas</u>.. $n \geqslant 2$ A est symétrique réelle (à coefficients réels) donc A est diagonalisable.

Ainsi f est diagonalisable. Supposons que $Sp f = Sp A = \{1\}$.

Alors $\mathbb{R}^n = SEP(f, 1) = Ke(f - Id_{\mathbb{R}^n})$. $f = Id_{\mathbb{R}^n}$. $A = I_n$!!

donc $Sp A = Sp f \subset \{-1, 1\}$ et $Sp A = Sp f \neq \{1\}$.

Alors $Sp A = Sp f = \{-1, 1\}$. $\underline{Sp A = \{-1, 1\}}$

<u>Exercice</u>.. Trouver les sous-espaces propres de A (faire deux cas : n pair, n impair).

Question 17 ESCP 2010 F. HUA $\boxed{\text{F 1}}$

Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-1}-\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x$.

$f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3-1} - \sqrt[3]{x^2-1}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

$\forall x \in [1,+\infty[,\quad f(x) = x\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}} - \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]$.

$\sqrt[3]{1+t} \underset{t\to 0}{=} 1+\frac{1}{3}t+o(t)$; $\sqrt[3]{1-t} \underset{t\to 0}{=} 1-\frac{1}{3}t+o(t)$, $\sqrt[3]{1-z^3} \underset{z\to 0}{=} 1-\frac{1}{3}z^3+o(z^3)$.

$\sqrt{1+t} \underset{t\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}t^2+o(t^2)$; $\sqrt{1-t} \underset{t\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)$.

$\sqrt{1-z^2} \underset{z\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{8}z^4+o(z^4)$; $\sqrt[3]{1-z^2} \underset{z\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}z^2+o(z^3)$.

Donc $\sqrt[3]{1-z^3}-\sqrt{1-z^2} \underset{z\to 0}{=} +\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+o(z^3)$; $\sqrt[3]{1-z^3}-\sqrt{1-z^2} \underset{z\to 0}{\sim} \frac{1}{2}z^2$

Alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x}$. De plus $\forall x\in[1,+\infty[,\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{x} \geqslant 0$ et

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x}$ diverge. Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées

de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-1}-\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x$ diverge.

Question 18 ESCP 2010 T. VERGER $\boxed{\text{F1}}$

f est une application continue de $[a,b]$ $(a<b)$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ si et seulement si f garde un signe constant sur $[a,b]$.

---

* Supposons que f garde un signe constant sur $[a,b]$. Alors $\exists\, \varepsilon \in \{-1,1\}$, $|f| = \varepsilon f$.

$\varepsilon |f| = \varepsilon^2 f = f$. Ainsi $f = \varepsilon |f|$.

$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b \varepsilon |f(t)|\,dt\right| = |\varepsilon|\left|\int_a^b |f(t)|\,dt\right| = \left|\int_a^b |f(t)|\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$

car $|f|$ est positive et $a<b$.

donc $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$.

* Supposons que $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$. Alors $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$ ou $-\int_a^b |f(t)|\,dt$

donc $\int_a^b f(t)\,dt = \varepsilon \int_a^b |f(t)|\,dt$ avec $\varepsilon \in \{-1,1\}$ ou $\int_a^b |f(t)|\,dt = \varepsilon \int_a^b f(t)\,dt$.

Alors $\int_a^b (|f| - \varepsilon f)(t)\,dt = 0$.

1) $\int_a^b (|f| - \varepsilon f)(t)\,dt = 0$

2) $a \neq b$

3) $|f| - \varepsilon f$ est continue sur $[a,b]$

4) $|f| - \varepsilon f \geqslant 0$ car $f \leqslant |f|$ et $-f \leqslant |f|$.

Dans ces conditions $|f| - \varepsilon f$ est nulle sur $[a,b]$. $\varepsilon f = |f|$. donc $f = \varepsilon |f|$.

Alors $f \geqslant 0$ ou $f \leqslant 0$. f garde un signe constant sur $[a,b]$.

Question 19 ESCP 2010 K. AFRIAT $\boxed{\text{F1}}$

Q1. Montrer que $F : x \to \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Q2. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant pour fonction de répartition F. Montrer que $(\text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \ln n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi.

Q1 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

2) $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto 1+e^{-x}$ est décroissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.

3) F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Cela suffit très largement pour dire que <u>F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.</u>

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $Y_n = \text{Max}(X_1, \ldots, X_n) - \ln n$ et notons F_n la fonction de répartition de Y_n. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_{Y_n}(x) = P(\text{Max}(X_1, \ldots X_n) \leqslant x + \ln n) = P(\{X_1 \leqslant x+\ln n\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant x + \ln n\})$

Par indépendance $F_{Y_n}(x) = P(X_1 \leqslant x+\ln n) \times \cdots \times P(X_n \leqslant x + \ln n)$.

Donc $F_{Y_n}(x) = (F(x+\ln n))^n = \left(\dfrac{1}{1+e^{-x-\ln n}}\right)^n = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{n}e^{-x})^n} = e^{-n\ln(1+\frac{1}{n}e^{-x})}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}e^{-x} = 0$. $-n\ln(1+\frac{1}{n}e^{-x}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\left(\frac{1}{n}e^{-x}\right) = -e^{-x}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-n\ln(1+\frac{1}{n}e^{-x})\right) = -e^{-x}$. Par continuité de la fonction exponentielle on obtient : <u>$\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = e^{-e^{-x}}$ et ceci pour tout réel x.</u>

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = e^{-e^{-x}}$. Notons que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire ... à densité!

1) $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto -e^{-x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $G : x \mapsto e^{-e^{-x}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty}(-e^{-x}) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty}(-e^{-x}) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = 0$

3) $x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto e^{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par composition G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ceci suffit pour dire que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

<u>Ainsi la suite de terme général $\max(X_1, X_2, \dots, X_n) - \ln n$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de fonction de répartition G.</u>

Question 20 ESCP 2010 J. DIAZ $\boxed{\text{F1}}$

Donner les conditions pour que $x \to a\, e^{-|x|} \ln(1+e^{|x|})$ soit une densité de probabilité.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\, e^{-|x|} \ln(1+e^{|x|})$.

1) f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a \geqslant 0$ car

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-|x|} \ln(1+e^{|x|}) > 0$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = a\int_0^x e^{-t}\ln(1+e^t)\,dt$

$t \mapsto e^t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Cela autorise le changement de variable $u = e^t$ dans ce qui suit.

$$\int_0^x f(t)\,dt \underset{\substack{u=e^t\\ t=\ln u\\ dt=\frac{1}{u}du}}{=} a\int_1^{e^x} \frac{1}{u}\ln(1+u)\,\frac{du}{u} = a\int_1^{e^x}\frac{1}{u^2}\ln(1+u)\,du.$$ En intégrant par parties il vient :

$$\int_0^x f(t)\,dt = a\left[-\frac{1}{u}\ln(1+u)\right]_1^{e^x} - a\int_1^{e^x} -\frac{1}{u}\,\frac{1}{1+u}\,du$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = a\left(-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + \ln 2 + \int_1^{e^x}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du\right) \quad \cdots\ \frac{1}{u}-\frac{1}{u+1} = \frac{1}{u(u+1)}$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = a\left(-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + \ln 2 + \Big[\ln u - \ln(u+1)\Big]_1^{e^x}\right)$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = a\left(-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + \ln 2 + \ln\frac{e^x}{e^x+1} - \ln\frac{1}{1+1}\right)$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = 0$ par croissance comparée et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) = \ln 1 = 0$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt = a\left(\ln 2 - \ln\frac{1}{2}\right) = 2a\ln 2$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $2a\ln 2$.

f étant paire : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $4a\ln 2$. $4a\ln 2 = 1 \iff a = \dfrac{1}{4\ln 2}$

notons que $\dfrac{1}{4\ln 2} > 0$. <u>Plus de doute : f est une densité de probabilité si et seulement si $a = \dfrac{1}{4\ln 2}$.</u>

Question 21 ESCP 2010 S. ALLAIN $\boxed{\text{F1}}$

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a p valeurs propres distinctes et est diagonalisable. Donnez le degré minimal pour un polynôme annulateur non nul de cette matrice.

Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

* Soit Q un polynôme annulateur non nul de A. Le spectre de A est contenu dans l'ensemble des zéros de Q. Ainsi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont p racines distinctes de Q. Comme Q n'est pas nul nécessairement $\underline{\deg Q \geqslant p}$.

<u>Le degré d'un polynôme annulateur non nul de A est supérieur ou égal à p.</u>

* Posons $R = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_p)$. $\deg R = p$. Montrons que R est un polynôme annulateur de A.

A est semblable à une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

$\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $D = P^{-1}AP$. $A = PDP^{-1}$.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$, $R = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$.

$R(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = \sum_{k=0}^{p} a_k (PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{p} a_k PD^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{p} a_k D^k\right)P^{-1} = PR(D)P^{-1}$

$D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

$R(D) = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k = \sum_{k=0}^{p} a_k (\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{Diag}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k)$

$R(D) = \mathrm{Diag}\left(\sum_{k=0}^{p} a_k \alpha_1^k, \sum_{k=0}^{p} a_k \alpha_2^k, \dots, \sum_{k=0}^{p} a_k \alpha_n^k\right) = \mathrm{Diag}(R(\alpha_1), R(\alpha_2), \dots, R(\alpha_n))$.

Or $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} = \mathrm{Sp}A = \mathrm{Sp}D = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les zéros de R.

Alors $R(\alpha_1) = R(\alpha_2) = \dots = R(\alpha_n) = 0$. Donc $R(D) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Alors $R(A) = P0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

<u>R est un polynôme annulateur non nul de A de degré p.</u>

<u>Le degré minimal d'un polynôme annulateur non nul d'une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant p valeurs propres distinctes est p.</u>

Question 22 ESCP 2010 J. MESNILDREY et M. PARIN $\boxed{\text{F2}}$

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité f continue sur $[a, b]$ et nulle en dehors de $[a, b]$.

Justifier l'existence d'un réel α tel que $E(|X - \alpha|)$ soit minimale. Que représente α ?

Soit α un réel. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g_\alpha(x) = |x - \alpha|$.

- X est une variable aléatoire à densité prenant ses valeurs dans $[a,b]$ et f est une densité.
- g est continue sur $[a,b]$

Alors $E(|X-\alpha|)$ existe si et seulement si $\int_a^b g(t) f(t)\,dt$ est absolument convergente ... ou convergente ($\forall t \in [a,b],\ g(t)f(t) = |t-\alpha| f(t) \geqslant 0$).

Or $t \mapsto g(t)f(t)$ est continue sur $[a,b]$ donc $\int_a^b g(t)f(t)\,dt$ converge ... absolument.

Alors $E(|X-\alpha|)$ existe et vaut $\int_a^b g(t)f(t)\,dt$ soit $\int_a^b |t-\alpha| f(t)\,dt$.

<u>1er cas</u>.. $\alpha < a$. $E(|X-\alpha|) = \int_a^b (t-\alpha) f(t)\,dt = \int_a^b t f(t)\,dt - \alpha \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b t f(t)\,dt - \alpha$

<u>2e cas</u>.. $\alpha > b$ $E(|X-\alpha|) = \int_a^b (\alpha - t) f(t)\,dt = \alpha - \int_a^b t f(t)\,dt$

<u>3e cas</u>.. $\alpha \in [a,b]$. $E(|X-\alpha|) = \int_a^\alpha (\alpha - t) f(t)\,dt + \int_\alpha^b (t-\alpha) f(t)\,dt$

$$E(|X-\alpha|) = \alpha \int_a^\alpha f(t)\,dt - \int_a^\alpha t f(t)\,dt + \int_\alpha^b t f(t)\,dt - \alpha \int_\alpha^b f(t)\,dt$$

$$E(|X-\alpha|) = \alpha \int_a^\alpha f(t)\,dt - \int_a^\alpha t f(t)\,dt + \int_a^b t f(t)\,dt - \int_a^\alpha t f(t)\,dt - \alpha\left(1 - \int_a^\alpha f(t)\,dt\right)$$

$$E(|X-\alpha|) = 2\alpha \int_a^\alpha f(t)\,dt - 2\int_a^\alpha t f(t)\,dt - \alpha + \int_a^b t f(t)\,dt$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\quad E(|X-\alpha|) = \begin{cases} \int_a^b t f(t)\,dt - \alpha & \text{si } \alpha \in\ ]-\infty, a[\\ 2\alpha \int_a^\alpha f(t)\,dt - 2\int_a^\alpha t f(t)\,dt - \alpha + \int_a^b t f(t)\,dt & \text{si } \alpha \in [a,b] \\ \alpha - \int_a^b t f(t)\,dt & \text{si } \alpha \in\ ]b, +\infty[. \end{cases}$$

Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = E(|X - \alpha|)$.

$\forall t \in\ ]-\infty, a[,\ \varphi(t) > \int_a^b t f(t)\,dt - a = \varphi(a)$ et $\forall t \in\ ]b, +\infty[,\ \varphi(t) > b - \int_a^b t f(t)\,dt = \varphi(b)$

$t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto tf(t)$ sont continues sur $[a,b]$.

Alors $\alpha \mapsto \int_c^\alpha f(t)dt$ et $\alpha \mapsto \int_c^\alpha tf(t)dt$ sont de classe C^1 sur $[a,b]$.

Il est alors clair que $t \mapsto 2\alpha\int_c^\alpha f(t)dt - 2\int_c^\alpha tf(t)dt - \alpha + \int_c^b tf(t)dt$ est de classe C^1 sur $[a,b]$. Ainsi φ est de classe C^1 sur $[a,b]$.

En particulier φ est continue sur le compact $[a,b]$. Alors φ admet un minimum sur $[a,b]$. Soit α_0 un point de $[a,b]$ qui réalise ce minimum.

$\forall t \in [a,b]$, $\varphi(t) \geq \varphi(\alpha_0)$. $\forall t \in]-\infty, a[$, $\varphi(t) > \varphi(a) \geq \varphi(\alpha_0)$ et

$\forall t \in]b,+\infty[$, $\varphi(t) \overset{\cdot\cdot}{>} \varphi(b) \geq \varphi(\alpha_0)$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \geq \varphi(t_0)$.

φ possède un minimum sur $\mathbb{R}$. <u>Il existe un réel α tel que $E(|X-\alpha|)$ soit minimal.</u>

• Et .. montrons que le minimum de φ n'est atteint que par des points de $[a,b]$.

Soit ψ la restriction de φ à $[a,b]$. ψ est de classe C^1 sur $[a,b]$.

$\forall \alpha \in [a,b]$, $\psi(t) = 2\alpha\int_c^\alpha f(t)dt - 2\int_c^\alpha tf(t)dt - \alpha + \int_c^b tf(t)dt$

$\forall \alpha \in [a,b]$, $\psi'(t) = 2\int_c^\alpha f(t)dt + 2\alpha f(\alpha) - 2\alpha f(\alpha) - 1 + 0 = 2\int_c^\alpha f(t)dt - 1$.

Alors ψ' est dérivable sur $[a,b]$ et $\forall \alpha \in [a,b]$, $\psi''(\alpha) = 2f(\alpha) \geq 0$.

ψ' est donc croissante sur $[a,b]$. Alors si ψ' s'annule en deux points α_1 et α_2 de $[a,b]$ tels que $\alpha_1 < \alpha_2$ alors ψ' s'annule sur $[\alpha_1, \alpha_2]$.

Notons également que $\psi'(b) = 1$ et $\psi'(a) = -1$

ψ' étant continue, ψ' est strictement positive au voisinage de b et strictement négative au voisinage de a.

ψ réalise donc son minimum en un point de $]a,b[$ donc en un point qui annule sa dérivée.

<u>Le tout suffit pour dire que si $\alpha \in [a,b]$: ψ réalise son minimum en α si et seulement si $\psi'(\alpha) = 0$.</u> Notons F_X la fonction de répartition.

$\forall \alpha \in [a,b]$, $\psi'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \int_a^\alpha f(t)dt = \frac{1}{2} \Leftrightarrow F_X(\alpha) = \frac{1}{2}$. Notons que $\forall x \in \mathbb{R} - [a,b]$, $F_X(x) \neq \frac{1}{2}$

<u>$E(|X-\alpha|)$ est minimum si et seulement si α est une médiane de X.</u>

Question 23 **ESCP 2010** L. VIE $\boxed{\text{F2}}$

n et p sont deux éléments de $[\![2, +\infty[\![$. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $A^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

On pose $E = \{P(A)\,;\, P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et trouver sa dimension.

- $E \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $X \in \mathbb{R}[X]$ donc $A \in E$; $E \neq \emptyset$.
- Soit $(B, C) \in E^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\exists (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $B = P(A)$ et $C = Q(A)$

$\lambda B + C = \lambda P(A) + Q(A) = (\lambda P + Q)(A)$ et $\lambda P + Q \in \mathbb{R}[X]$ donc $\lambda B + C \in E$.

Ceci achève de montrer que $\underline{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Posons $F = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ et montrons que $E = F$.

$\rightarrow$ $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $X^k \in \mathbb{R}[X]$ donc $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $A^k \in E$.

Comme E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $F = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1}) \subset E$.

$\rightarrow$ Soit $B \in E$. $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $B = Q(A)$.

$\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $Q = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k X^k$.

$$B = Q(A) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k A^k \underset{\substack{\uparrow \\ \forall i \in [\![p, +\infty[\![,\ A^i = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}}{=} \sum_{k=0}^{\min(r, p-1)} \alpha_k A^k \in \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1}) = F.$$

$\forall B \in E$, $B \in F$. $E \subset F$. Finalement $\underline{E = F = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})}$.

Montrons par l'absurde que la famille $(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ est libre. Supposons cette famille liée.

$\exists (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$, $\sum_{k=0}^{p-1} \beta_k A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}) \neq 0_{\mathbb{R}^p}$.

$\{i \in [\![0, p-1]\!] \mid \beta_i \neq 0\}$ n'est pas vide. Notons i_0 son plus petit élément. $\beta_{i_0} \neq 0$.

$\sum_{k=i_0}^{p-1} \beta_k A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Multiplions par A^{p-1-i_0} $\qquad A^h = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ si $h \geqslant p$

$$0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \left(\sum_{k=i_0}^{p-1} \beta_k A^k\right) A^{p-1-i_0} = \sum_{k=i_0}^{p-1} \beta_k A^{k+p-1-i_0} \overset{\downarrow}{=} \beta_{i_0} A^{p-1} \text{ et } A^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

donc $\beta_{i_0} = 0$!! $(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ est donc une famille libre et génératrice de

E de cardinal p. $\underline{\dim E = p}$.

Question 24 **ESCP 2010** D. ATTIAS $\boxed{\textbf{F1}}$

On lance une pièce qui donne face avec la probabilité p (où p appartient $]0,1[$). n est entier supérieur ou égal 1. On note : P_n (resp. F_n) la variable aléatoire égale au nombre de piles (resp. faces) obtenus au cours des n premiers lancers. ε est un réel strictement positif.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{F_n-P_n}{n}-(1-2p)\right|\leqslant\varepsilon\right)=1$.

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $X_n=\dfrac{F_n-P_n}{n}$. $X_n=\dfrac{(n-P_n)-P_n}{n}=1-\dfrac{2P_n}{n}$. Posons $q=1-p$.

$P_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. $E(P_n)$ (resp. $V(P_n)$) existe et vaut np (resp. npq)

Alors $E(X_n)$ existe et vaut $1-\frac{2}{n}\times np$ donc $1-2p$ et $V(X_n)$ existe et vaut $\left(-\frac{2}{n}\right)^2\times npq$ donc $\dfrac{4pq}{n}$.

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant P(|X_n-E(X_n)|>\varepsilon)\leqslant\dfrac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$. Or $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{V(X_n)}{\varepsilon^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4pq}{n\varepsilon^2}\right)=0$.

Par encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n-E(X_n)|>\varepsilon)=0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n-E(X_n)|\leqslant\varepsilon)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-P(|X_n-E(X_n)|>\varepsilon)\right)=1$.

Finalement $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{F_n-P_n}{n}-(1-2p)\right|\leqslant\varepsilon\right)=1$.

Question 25 **ESCP 2010** G. PECORARI **F1**

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Les boules numérotées de 1 à k sont rouges et les autres blanches ($1 < k < n$).

On effectue n tirages successifs et sans remise d'une boule dans l'urne. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, X_i est la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage et 0 sinon.

Trouver la loi de X_i, $E(X_i)$, $V(X_i)$.

Écrire une fonction en Turbo-Pascal qui simule la variable aléaoire X_i.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $P(X_i = 1) = \dfrac{\text{card}(X_i = 1)}{n!} = \dfrac{\overset{(1)}{k} \times \overset{(2)}{(n-1)!}}{n!} = \dfrac{k}{n}$.

(1) : choix de la boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage ; (2) : choix d'une boule pour les $n-1$ autres tirages

X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{k}{n}$. $E(X_i) = \dfrac{k}{n}$ et $V(X_i) = \dfrac{k}{n}\left(1 - \dfrac{k}{n}\right)$.

```
Function simule(n,i,k:integer):integer;

var j,r,t:integer;

begin

r:=k;t:=n;

For j:=1 to i-1 do

        begin
        If random(t)+1<=r then r:=r-1;
        t:=t-1;
        end;

If random(t)+1<=r then simule:=1 else simule:=0;

end;
```

- r contient le nombre de boules rouges après chaque tirage
- t contient le nombre de boules dans l'urne après chaque tirage.

Si l'urne contient t boules dont r rouges, pour simuler le tirage d'une boule de cette urne on choisit un entier au hasard dans $[\![1, t]\!]$. S'il est inférieur ou égal à r on considère que l'on a obtenu une boule rouge, sinon on a obtenu une boule blanche.

On fait d'abord $i-1$ tirages en retranchant 1 à t à chaque fois et en retranchant 1 à r lorsque l'on obtient une boule rouge.

On fait alors le $i^{\text{ème}}$ tirage. S'il donne une boule rouge on renvoie la valeur 1 sinon on renvoie la valeur 0.