Voici des questions sans préparation de l'oral ESCP 2009 obtenues auprès des élèves. Les énoncés ne sont pas garantis. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

QUESTIONS COURTES ESCP 2009 (suite)

F 1 Assez simple ou proche du cours.

F 2 Demande du travail.

F 3 Délicat.

Question 12 ESCP 2009 F 1 ANGLADE

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'quation $\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=4$.

Question 13 ESCP 2009 F 1 SITBON

X est Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

Trouver la probabilité pour que les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soient semblables.

Question 14 ESCP 2009 F 1 SALS

Soient X_1, ..., X_n, n variables aléatoires réelles indépendantes, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

Q1. Déterminer la loi de $Y_n = \text{Max}(X_1, ..., X_n)$.

Q2. Déterminer un équivalent de $P(Y_n \geqslant a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Question 15 ESCP 2009 F 1 PELLEGRINI

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E telle que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $||e_i|| = 1$ et $||e_i||^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} < e_i, e_j >^2$.

Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Variante JF $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille de vecteurs $\boxed{\text{unitaires}}$ d'un espace vectoriel euclidien E (dont on ne précise pas la dimension...) telle que :

$$\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} (< x, u_k >)^2$$

Montrer que $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base orthonormée de E.

Question 16 ESCP 2009 F 1 BUCCARI

M et X sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prennent leurs valeurs dans N. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ la loi de X sachant $\{M = n\}$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Trouver la loi de X en fonction de la loi de M. Comparer les lois de X et de $M - X$.

On suppose que M possède une espérance. Montrer que $E(X)$ existe et l'exprimer en fonction de $E(N)$.

Trouver la loi de X lorsque M suit la loi géométrique de paramètre p.

JF On entendra que M suit la loi géométrique "sur $\mathbb{N}$" de paramètre p ; autrement dit que $M+1$ suit notre loi géométrique de paramètre 1.

Question 17 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ GARBE et HELD

Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^+$ que nous noterons a_n.

Étudier la suite (a_n).

Question 18 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ BLOCK

Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}^*$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X = n) = P(X = -n) = \dfrac{1}{2n(n+1)}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, A_n est l'événement : $\{X = n\} \cup \{X = -n\}$.

Montrer que l'espérance de X sachant A_n existe et la calculer.

Question 19 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ DUTEIL

A et B sont deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B)\, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B)\, P(A \cap \overline{B}).$$

Question 20 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F } 2^+}$ BILLETTE

f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, telle qu'il existe un polynôme de degré impair P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leqslant |P(x)|.$$

Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

R.

Question 12 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ ANGLADE

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'quation $\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=4.$

Soit $z\in\mathbb{C}^*$. Posons $u=z+\frac{1}{z}$ et $v=u^2$.

$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=(v-2)^2+v=v^2-3v+4.$

$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=4 \iff v^2-3v+4=4 \iff v^2-3v=0 \iff v=0$ ou $v=3 \iff u^2=0$ ou $u^2=3$.

$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=4 \iff u=0$ ou $u=\sqrt{3}$ ou $u=-\sqrt{3} \iff z+\frac{1}{z}=0$ ou $z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$ ou $z+\frac{1}{z}=-\sqrt{3}$

$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=4 \iff z^2+1=0$ ou $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ ou $z^2+\sqrt{3}z+1=0$.

$z^2+1=0 \iff z=i$ ou $-i$

$z^2-\sqrt{3}z+1=0 \iff \left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}+1=0 \iff \left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}=\left(\frac{i}{2}\right)^2 \iff \begin{cases} z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2} \\ \text{ou} \\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2} \end{cases}$.

$z^2+\sqrt{3}z+1=0 \iff \cdots \iff \begin{cases} z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2} \\ z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2} \end{cases}$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{i,-i,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right\}$

ou $\left\{i,-i,e^{i\pi/6},e^{-i\pi/6},e^{i5\pi/6},e^{-i5\pi/6}\right\}$

ou $\underline{\left\{i,-i,e^{i\pi/6},e^{-i\pi/6},-e^{-i\pi/6},-e^{i\pi/6}\right\}}$.

Question 13 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ SITBON

X est Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

Trouver la probabilité pour que les deux matrices $\begin{pmatrix}1 & Y\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}X & X\\ 0 & Y\end{pmatrix}$ soient semblables.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Posons $A=\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$.

* Supposons que A et B sont semblables. Alors $\operatorname{Sp} A=\operatorname{Sp} B$.

A et B sont triangulaires supérieures donc $\operatorname{Sp} A=\{1,2\}$ et $\operatorname{Sp} B=\{\alpha,\beta\}$

Ainsi $\{\alpha,\beta\}=\{1,2\}$ ce qui signifie que $(\alpha=1$ et $\beta=2)$ ou $(\alpha=2$ et $\beta=1)$.

* Réciproquement supposons que $\{\alpha,\beta\}=\{1,2\}$.

Alors $\operatorname{Sp} A=\operatorname{Sp} B=\{1,2\}$. A et B ont deux valeurs propres distinctes 1 et 2 et appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A et B sont diagonalisables.

Mieux : $\exists Q\in GL_2(\mathbb{R}),\ Q^{-1}AQ=\operatorname{Diag}(1,2)$.

$\exists Q'\in GL_2(\mathbb{R}),\ Q'^{-1}BQ'=\operatorname{Diag}(1,2)$. Posons $D=\operatorname{Diag}(1,2)$.

Alors $A=QDQ^{-1}=QQ'^{-1}BQ'Q^{-1}=(Q'Q^{-1})^{-1}BQ'Q^{-1}$; A et B sont semblables.

Ainsi A et B sont semblables si et seulement si $\{\alpha,\beta\}=\{1,2\}$.

Notons $\hat{p}$ la probabilité pour que $\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}X & X\\ 0 & Y\end{pmatrix}$ soient semblables.

D'après ce qui précède $\hat{p}=P\big((\{X=1\}\cap\{Y=2\})\cup(\{X=2\}\cap\{Y=1\})\big)$.

Par incompatibilité et indépendance on a $\hat{p}=P(X=1)P(Y=2)+P(X=2)P(Y=1)$.

$\hat{p}=p\times p(1-p)+p(1-p)\times p=2p^2(1-p)$.

<u>La probabilité cherchée est $2p^2(1-p)$.</u>

R

Question 14 ESCP 2009 $\boxed{\text{F 1}}$ SALS

Soient X_1, ..., X_n, n variables aléatoires réelles indépendantes, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

Q1. Déterminer la loi de $Y_n = \text{Max}(X_1, ..., X_n)$.

Q2. Déterminer un équivalent de $P(Y_n \geqslant a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Q1 Notons F_n la fonction de répartition de Y_n. Rappelons que la fonction de répartition des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ est la fonction F définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(\text{Max}(X_1,\dots,X_n) \leqslant x) = P(\{X_1 \leqslant x\} \cap \{X_2 \leqslant x\} \cap \dots \cap \{X_n \leqslant x\})$.

Par indépendance on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(X_1 \leqslant x)\,P(X_2 \leqslant x) \dots P(X_n \leqslant x) = (F(x))^n$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$

$x \mapsto 0$ et $x \mapsto (1-e^{-\lambda x})^n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Alors F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0,+\infty[$.

Cela suffit pour dire que F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et qu'ainsi Y_n est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_n'(x) = 0$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $F_n'(x) = n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_n est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_n' sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points ; f_n est une densité de Y_n

Q2 $P(Y_n \geq a) = 1 - P(Y_n < a) = 1 - P(Y_n \leq a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a})^n$.

$(1+x)^n - 1 \underset{x \to 0}{\sim} nx$; $1 - (1+x)^n \underset{x \to 0}{\sim} -nx$; $1 - (1-x)^n \underset{x \to 0}{\sim} nx$

$\lim\limits_{a \to +\infty} e^{-\lambda a} = 0$ car $\lambda > 0$ donc $P(Y_n \geq a) \underset{a \to +\infty}{\sim} n e^{-\lambda a}$.

Question 15 ESCP 2009 $\boxed{\text{F 1}}$ PELLEGRINI

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E telle que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\|e_i\| = 1$ et $\|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} < e_i, e_j >^2$.

Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Variante JF $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille de vecteurs $\boxed{\text{unitaires}}$ d'un espace vectoriel euclidien E (dont on ne précise pas la dimension...) telle que :

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (< x, u_k >)^2$$

Montrer que $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée de E.

---

1) $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E.

2) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\|e_i\| = 1$

3) Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $\|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j\rangle^2 = \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \langle e_i, e_j\rangle^2$

Alors $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \langle e_i, e_j\rangle^2 = 0$ et $\forall j \in [\![1,n]\!] - \{i\}$, $\langle e_i, e_j\rangle^2 \geq 0$.

donc $\forall j \in [\![1,n]\!] - \{i\}$, $\langle e_i, e_j\rangle^2 = 0$. $\forall j \in [\![1,n]\!] - \{i\}$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ et

ceci pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Donc $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une famille orthogonale de E.

1), 2) et 3) montrent que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

__Variante__ On montre comme plus haut que la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est orthonormée en

partant de $\|u_i\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\langle u_i, u_k\rangle)^2$ pour $i \in [\![1,n]\!]$.

$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est alors une famille orthonormée donc libre de E. __Soit $x \in E$__

$\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k\rangle + \|\sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k\|^2$

$\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k\|^2 = \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle\langle x, u_k\rangle + \langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k, \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i\rangle u_i\rangle$

$\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k\|^2 = \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle x, u_k\rangle\langle x, u_i\rangle \underbrace{\langle u_k, u_i\rangle}_{= \begin{cases} 1 \text{ si } k=i \\ 0 \text{ si } k\neq i\end{cases}}$

$\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k\|^2 = \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle^2}_{\|x\|^2} = 0$. $\underline{x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k}$.

$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k$.

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de E.

Comme $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille libre et orthonormée de E :

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base orthonormée de E.

Question 16 ESCP 2009 $\boxed{F 2}$ BUCCARI

M et X sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prennent leurs valeurs dans N. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ la loi de X sachant $\{M = n\}$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Trouver la loi de X en fonction de la loi de M. Comparer les lois de X et de $M - X$.

On suppose que M possède une espérance. Montrer que $E(X)$ existe et l'exprimer en fonction de $E(N)$.

Trouver la loi de X lorsque M suit la loi géométrique de paramètre p.

JF On entendra que M suit la loi géométrique "sur $\mathbb{N}$" de paramètre p ; autrement dit que $M + 1$ suit notre loi géométrique de paramètre 1.

Soit $k \in \mathbb{N}$. $(\{M=n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

$P(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(M=n)\, P_{\{M=n\}}(X=k)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{\{M=n\}}(X=k) = \begin{cases} 1/(n+1) & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $P(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(M=n)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. $P(M-X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{M=n\} \cap \{M-X=k\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{M=n\} \cap \{X=n-k\})$.

$P(M-X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(M=n)\, P_{\{M=n\}}(X=n-k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(M=n)$

$P_{\{M=n\}}(X=n-k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } 0 \leqslant n-k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi <u>X et $M-X$ ont même loi.</u>

Supposons que M possède une espérance. Notons alors que $E(X)$ existe en utilisant le théorème sur les espérances conditionnelles.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(|X| \mid M=n) = E(X \mid M=n)$ existe et vaut $\frac{n}{2}$ car la loi de X sachant que $\{M=n\}$ est la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(|X| \mid M=n) \times P(M=n) = \frac{n}{2} P(M=n)$. $E(M)$ existe donc la série de terme général $\frac{n}{2} P(M=n)$ converge.

Alors la série de terme général $E(|X| \mid M=n) P(M=n)$ converge.

Le tout suffit pour dire que :

1) X possède une espérance. $\underline{E(X) \text{ existe}}$.

2) $E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} E(X|N=n)P(N=n)$.

Alors $E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{2}P(N=n)$; $\underline{E(X)=\frac{1}{2}E(N)}$ ... ce que l'on peut retrouver en se rappelant que X et $N-X$ ont même loi.

Supposons que $N+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Posons $q=1-p$.

Alors $N(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(N=n)=P(N+1=n+1)=p\,q^{(n+1)-1}=pq^n$.

Alors $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n+1}pq^n=\frac{p}{q}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{q^{n+1}}{n+1}$.

Soit $k\in\mathbb{N}$. Soit $r\in [\![k,+\infty[\![$.

$$\sum_{n=k}^{r}\frac{q^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=k}^{r}\int_0^q t^n\,dt=\int_0^q\sum_{n=k}^{r}t^n\,dt=\int_0^q t^k\,\frac{1-t^{r-k+1}}{1-t}\,dt.$$

$$\sum_{n=k}^{r}\frac{q^{n+1}}{n+1}=\int_0^q\frac{t^k}{1-t}\,dt-\int_0^q\frac{t^{r+1}}{1-t}\,dt.$$

Or $0\leq\int_0^q\frac{t^{r+1}}{1-t}\,dt\leq\int_0^q\frac{t^{r+1}}{1-q}\,dt=\frac{1}{1-q}\int_0^q t^{r+1}\,dt=\frac{1}{1-q}\,\frac{q^{r+2}}{r+2}\leq\frac{1}{1-q}\,\frac{1}{r+2}$

$t\mapsto\frac{1}{1-t}$ croissante sur $[0,q]$

$\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{1-q}\,\frac{1}{r+2}\right)=0$ donc $\lim_{r\to+\infty}\int_0^q\frac{t^{r+1}}{1-t}\,dt=0$.

Alors $\lim_{r\to+\infty}\sum_{n=k}^{r}\frac{q^{n+1}}{n+1}=\int_0^q\frac{t^k}{1-t}\,dt$; $\underline{P(X=k)=\frac{p}{q}\int_0^q\frac{t^k}{1-t}\,dt}$

$$P(X=k)=\frac{p}{q}\left(\int_0^q\frac{t^k-1}{1-t}\,dt+\int_0^q\frac{1}{1-t}\,dt\right)=\frac{p}{q}\left(-\int_0^q\sum_{i=0}^{k-1}t^i\,dt-\left[\ln(1-t)\right]_0^q\right)$$

$$P(X=k)=\frac{p}{q}\left(-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{q^{i+1}}{i+1}-\ln(1-q)\right)=-\frac{p}{q}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{q^i}{i}+\ln p\right)$$

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad P(X=k)=-\frac{p}{q}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{q^i}{i}+\ln p\right).$$

R

Question 17 **ESCP 2009** $\boxed{\text{F 1}}$ GARBE et HELD

Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^+$ que nous noterons a_n.

Étudier la suite (a_n).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = x^n + x - 1$

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(x) = n x^{n-1} + 1 > 0$.

f_n est continue sur $[0, +\infty[$, f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, $f_n(0) = -1$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Alors f_n est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[-1, +\infty[$.

$0 \in [-1, +\infty[$ donc $\exists!\, a_n \in \mathbb{R}^+$, $f_n(a_n) = 0$.

$\exists!\, a_n \in \mathbb{R}^+$, $a_n^n + a_n - 1 = 0$.

<u>L'équation $x \in \mathbb{R}^+$ et $x^n + x - 1 = 0$ admet une solution et une seule.</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$f_n(1) = 1$ donc $a_n < 1$. $f_n(0) = -1$ donc $0 < a_n$. <u>$a_n \in]0, 1[$.</u>

$$f_{n+1}(a_n) = a_n^{n+1} + a_n - 1 \underset{a_n - 1 = -a_n^n}{=} a_n^{n+1} - a_n^n = a_n^n (a_n - 1) < 0$$

$f_{n+1}(a_n) < 0 = f_{n+1}(a_{n+1})$ et f_{n+1} est strictement croissante. $a_n < a_{n+1}$.

$(a_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante et majorée par 1 donc elle converge.

Notons ℓ sa limite. $\ell \in [0, 1]$. <u>Supposons que $\ell < 1$.</u>

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq \ell$ (car la suite est croissante). $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < a_n^n \leq \ell^n$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell^n = 0$ car $|\ell| < 1$. Par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n^n = 0$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - a_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n^n = 0$; $1 - \ell = 0$; <u>$\ell = 1$!!</u>

Ainsi la suite <u>$(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1.</u>

Question 18 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F 1}}$ BLOCK

Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}^*$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X = n) = P(X = -n) = \dfrac{1}{2n(n+1)}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, A_n est l'événement : $\{X = n\} \cup \{X = -n\}$.

Montrer que l'espérance de X sachant A_n existe et la calculer.

Soit $k \in \mathbb{Z}^*$. $P_{A_n}(X=k) = \dfrac{1}{P(A_n)} P(\{X=k\} \cap A_n)$. n est donné dans $\mathbb{Z}^*$

$$P_{A_n}(X=k) = \frac{1}{P(A_n)}\left[P(\{X=k\} \cap (\{X=n\} \cup \{X=-n\}))\right]$$

$$P_{A_n}(X=k) = \frac{1}{P(A_n)}\left[P(\{X=k\} \cap \{X=n\}) + P(\{X=k\} \cap \{X=-n\})\right]$$

$$P(\{X=k\} \cap \{X=n\}) = \begin{cases} P(X=n) & \text{si } k=n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

$$P(\{X=k\} \cap \{X=-n\}) = \begin{cases} P(X=-n) & \text{si } k=-n \\ 0 & \text{si } k \neq -n \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} P(X=n) & \text{si } k=-n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $P(\{X=k\} \cap \{X=n\}) + P(\{X=k\} \cap \{X=-n\}) = \begin{cases} P(X=n) & \text{si } k \in \{-n, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $P_{A_n}(X=k) = \begin{cases} \dfrac{P(X=n)}{P(A_n)} & \text{si } k \in \{-n, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$\frac{P(X=n)}{P(A_n)} = \frac{P(X=n)}{P(X=n) + P(X=-n)} = \frac{P(X=n)}{2P(X=n)} = \frac{1}{2}.$$

$\forall k \in \mathbb{Z}^*$, $P_{A_n}(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k \in \{-n, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $E(X \mid A_n)$ existe et vaut $-n \times \frac{1}{2} + n \times \frac{1}{2}$.

$$\underline{\underline{E(X \mid A_n) = 0.}}$$

R

Question 19 ESCP 2009 $\boxed{\text{F 1}}$ DUTEIL

A et B sont deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A\cap B)\,P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A}\cap B)\,P(A\cap\overline{B}).$$

$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap\overline{B})$; $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$

$P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)$; $P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$

$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1 - P(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}) = 1 - P(\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B).$

$P(A\cap B)P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A}\cap B)\ P(A\cap\overline{B})$

$\Leftrightarrow$

$P(A\cap B)(1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B)) = (P(A) - P(A\cap B))(P(B) - P(A\cap B))$

$\Leftrightarrow$

$P(A\cap B) - P(A\cap B)P(A) - P(A\cap B)P(B) + (P(A\cap B))^2 = P(A)P(B) - P(A)P(A\cap B) - P(A\cap B)P(B) + (P(A\cap B))^2$

$\Leftrightarrow$

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow$

A et B sont indépendants

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A\cap B)P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A}\cap B)\,P(A\cap\overline{B})$.

Question 20 ESCP 2009 $\boxed{\text{F } 2^+}$ BILLETTE

f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, telle qu'il existe un polynôme de degré impair P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leqslant |P(x)|.$$

Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

1°/ P est continue sur $\mathbb{R}$

2°/ P est un polynôme de degré impair donc $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \\ \text{ou} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty. \end{cases}$

Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors que P admet au moins un zéro a dans $\mathbb{R}$. $\underline{P(a)=0}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(a)| \leq |P(a)| = 0$; $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(a) = 0}$. En particulier $f(a)=0$.

Fixons x dans $\mathbb{R}-\{a\}$ et appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre n « en a » (f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$).

$$\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} \underbrace{f^{(k)}(a)}_{=0}\Big| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t\in[a,x]} |f^{(n+1)}(t)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t\in[a,x]} |P(t)|$$

P est continue sur le segment $[a,x]$

$$|f(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t\in[a,x]} |P(t)| \quad (1)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ car la série de terme général $\dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ converge.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (1) il vient $|f(x)| \leq 0$ donc $f(x)=0$.

$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.\ f \text{ est nulle sur } \mathbb{R}.}}$

Voici les questions sans préparation 2009 qu'à bien voulu nous fournir l'ESCP. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

QUESTIONS COURTES ESCP 2009

Question 1 ESCP 2009 F2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et T définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $T(M) = M - \text{tr}(M)A$ où $\text{tr}(M)$ est la somme des éléments diagonaux de M.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\text{tr}(A)$ pour que T soit bijective.

c) Caractériser T lorsque T n'est pas bijective.

Question 2 ESCP 2009 F1

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient : $A^tAA^tAA = I$.

Question 3 ESCP 2009 F1

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. E un espace euclidien de dimension n. $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E.

On suppose encore que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow \|e_i - e_j\| = 1$.

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Question 4 ESCP 2009 F1

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi et admettant une espérance.

Montrer que $E\left(\dfrac{X}{X+Y}\right) = \dfrac{E(X)}{E(X+Y)}$.

Question 5 ESCP 2009 F1

Soit un réel $a > 0$. Pour tout entier $n > a$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi géométrique de paramètre a/n.

Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires définies par $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

Question 6 ESCP 2009 F1

Une urne contient $4n + 2$ boules numérotées de 1 à $4n + 2$. On tire $2n + 1$ boules sans remise, quelle est la probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à la somme des numéros des boules restantes ?

Question 7 ESCP 2009 F1

On retourne une à une les cartes d'un jeu ordinaire (32 cartes) bien battu. Quel est le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour voir le premier as ?

Question 8 ESCP 2009 F1

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k e^{\frac{k}{2n}}$.

Question 9 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F2}}$

Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) = e^{-a}$.

Question 10 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et f un endomorphisme de E. Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker} f$ lorsque $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Question 11 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F2}}$

n appartient à $[\![2, +\infty[\![$. Soit P un polynôme réel de degré n, admettant n racines réelles distinctes.

a) Combien P' admet-il de racines réelles ?

b) Comparer la moyenne arithmétique des racines de P à la moyenne arithmétique des racines de P'.

QUESTIONS COURTES ESCP 2009

Question 1 ESCP 2009 $\boxed{\text{F2}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et T définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $T(M) = M - \text{tr}(M)A$ où $\text{tr}(M)$ est la somme des éléments diagonaux de M.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\text{tr}(A)$ pour que T soit bijective.

c) Caractériser T lorsque T n'est pas bijective.

Ceci n'est pas une correction.

a) est sans problème.

b) $\dim E = n^2 < +\infty$. Ainsi T est bijective si et seulement si T est injective.

Remarque. Soit $M \in \text{Ker}\, T$

$T(M) = 0_E$. $M = \text{tr}(M) A$. Alors $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(M)\,\text{Tr}(A)$.

Notons alors que si $\text{tr}(A) \neq 1$: $\text{Tr}(M) = 0$ et $M = \text{tr}(M) A = 0$.

1er cas. $\text{tr}(A) \neq 1$. Soit $M \in \text{Ker}\, T$. $M = \text{tr}(M) A$.

Alors $\text{tr}(M) = \text{tr}(M)\,\text{tr}(A)$. Comme $\text{tr}(A) \neq 1$: $\text{tr}(M) = 0$.

Ainsi $M = \text{tr}(M) A = 0$.

Donc $\text{Ker}\, T = \{0_E\}$. T est injective donc bijective.

2e cas. $\text{tr}(A) = 1$. $A \neq 0$ et $T(A) = A - \text{tr}(A) A = A - A = 0_E$.

$\text{Ker}\, T \neq \{0_E\}$. T n'est pas injective. T n'est pas bijective.

Finalement T est bijective si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 1$.

c) Supposons $\text{tr}(A) = 1$. Soit $M \in E$. $T(T(M)) = T(M - \text{tr}(M) A) = T(M) - \text{tr}(M)\, T(A) \overset{T(A)=0}{=} T(M)$

donc $T \in \mathcal{L}(E)$ et $T \circ T = T$. T est un projecteur donc une projection.

$\forall M \in E$, $T(M) = M \iff \text{tr}(M) A = 0 \overset{A \neq 0}{\iff} \text{tr}(M) = 0$. $\text{Im}\, T = \text{Ker}(T - \text{Id}_E) = \text{Ker}\, \text{tr}$

$A \in \text{Ker}\, T$ donc $\text{Vect}(A) \subset \text{Ker}\, T$. Réciproquement si $M \in \text{Ker}\, T$, $M = \text{tr}(M) A \in \text{Vect}(A)$.

$\text{Ker}\, T = \text{Vect}(A)$. T est donc la projection sur $\text{Ker}\, \text{tr}$ parallèlement à $\text{Vect}(A)$.

R

Question 2 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F1}}$

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient : $A^tAA^tAA = I$.

Ceci n'est pas une correction.

---

* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A\,{}^tA\,A\,{}^tA\,A = I$.

Alors A est inversible et $A^{-1} = {}^tA\,A\,{}^tA\,A$

Or ${}^tA^{-1} = {}^t({}^tA\,A\,{}^tA\,A) = {}^tA\,A\,{}^tA\,A = A^{-1}$; A^{-1} est symétrique. Alors A est symétrique.

Ainsi $I = A\,{}^tA\,A\,{}^tA\,A = A^5$. $A^5 = I$. $X^5 - 1$ est un polynôme annulateur de A. 1 est la seule racine réelle de $X^5 - 1$.

A étant symétrique et à coefficients réels : $Sp_{\mathbb{C}} A = Sp_{\mathbb{R}} A \neq \emptyset$.

Alors $Sp\, A = \{1\}$. Comme A est diagonalisable : $SEP(A, 1) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors $n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \dim(SEP(A, 1)) = n - rg(A - I)$.

$rg(A - I) = 0$. $A - I = 0$. $A = I$.

* Réciproquement I vérifie $I\,{}^tI\,I\,{}^tI\,I = I$.

$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A\,{}^tA\,A\,{}^tA\,A = I\} = \{I\}$.

R

Question 3 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. E un espace euclidien de dimension n. $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E.

On suppose encore que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow \|e_i - e_j\| = 1$.

Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

Ceci n'est pas une correction.

Il suffit de montrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre.

Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0_E$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. $\|e_i\| = \|e_j\| = 1$

$1 = \|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 - 2\langle e_i, e_j\rangle = 2 - 2\langle e_i, e_j\rangle$; $\langle e_i, e_j\rangle = \frac{1}{2}$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $0 = \langle e_i, 0_E\rangle = \langle e_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underbrace{\langle e_i, e_k\rangle}_{= \begin{cases} 1 & \text{si } k=i \\ \frac{1}{2} & \text{si } k \neq i \end{cases}}$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $0 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k + \alpha_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \frac{1}{2}\alpha_i$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$.

Alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$.

Donc $\alpha_1 = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_1$; $(n+1)\alpha_1 = 0$; $\alpha_1 = 0$ car $n \geqslant 2$.

Donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

R

Question 4 ESCP 2009 $\boxed{\text{F1}}$

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi et admettant une espérance.

Montrer que $E\left(\dfrac{X}{X+Y}\right) = \dfrac{E(X)}{E(X+Y)}$.

Ceci n'est pas une correction.

Posons $Z = \dfrac{X}{X+Y}$. Z est une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans $]0,1[$ car X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

1er cas Z est finie. Z possède alors une espérance.

2e cas Z est dénombrable. $Z(\Omega) = \{z_k \,;\, k \in [\![k_0, +\infty[\![\}$ ($k \mapsto z_k$ est une bijection de $[\![k_0, +\infty[\![$ sur $Z(\Omega)$).

$\forall k \in [\![k_0, +\infty[\![$, $0 \leq z_k P(Z = z_k) \leq P(Z = z_k)$ et la série de terme général $P(Z = z_k)$ est convergente. Ceci assure l'existence de $E(Z)$ [illegible] !

X et Y sont indépendantes et ont même loi.

Alors $\dfrac{X}{X+Y}$ et $\dfrac{Y}{X+Y}$ ont même loi. Ainsi $E\left(\dfrac{Y}{X+Y}\right)$ existe et vaut $E\left(\dfrac{X}{X+Y}\right)$.

Alors $1 = E\left(\dfrac{X+Y}{X+Y}\right) = E\left(\dfrac{X}{X+Y}\right) + E\left(\dfrac{Y}{X+Y}\right) = 2E\left(\dfrac{X}{X+Y}\right)$. $E\left(\dfrac{X}{X+Y}\right) = \dfrac{1}{2}$.

X et Y possèdent une espérance donc $X+Y$ en possède également une.

De plus $E(X+Y) = E(X) + E(X) = 2E(X) \neq 0$ (X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$)

Alors $\dfrac{E(X)}{E(X+Y)} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi $E\left(\dfrac{X}{X+Y}\right) = \dfrac{E(X)}{E(X+Y)}$.

R

Question 5 ESCP 2009 $\boxed{\text{F1}}$

Soit un réel $a > 0$. Pour tout entier $n > a$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi géométrique de paramètre a/n.

Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires définies par $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

Ceci n'est pas une correction.

Posons $n_0 = \text{Ent}(a)+1$. Soit $n \in [\![n_0, +\infty [\![$.

$Y_n(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} \; ; \; k \in \mathbb{N}^* \right\}$. Notons F_n la fonction de répartition de Y_n.

$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{n}[$, $F_n(x) = 0$

$\forall x \in [\frac{1}{n}, +\infty[$, $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = \displaystyle\sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \text{ et} \\ \frac{k}{n} \leqslant x}} P\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\text{Ent}(nx)} P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{\text{Ent}(nx)} \frac{a}{n}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{k-1}$

$\forall x \in [\frac{1}{n}, +\infty[$, $F_n(x) = \dfrac{a}{n} \, \dfrac{1-\left(1-\frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)}}{1-\left(1-\frac{a}{n}\right)} = 1 - \left(1-\frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 1-\left(1-\frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

__Remarque__. Soit $x \in]0, \frac{1}{n}[$. $\text{Ent}(nx) = 0$. Alors $F_n(x) = 0 = 1 - \left(1-\frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)}$.

Nous pouvons alors écrire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1-\left(1-\frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)} & \text{si } x \in]0, +\infty[. \end{cases}$

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$

Soit $x \in]0, +\infty[$. $\text{Ent}(nx) \ln\left(1-\frac{a}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} (nx)\left(-\frac{a}{n}\right) = -ax$.

Alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\text{Ent}(nx) \ln\left(1-\frac{a}{n}\right)\right) = -ax$.

Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - e^{\text{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)}\right) = 1 - e^{-ax}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1-e^{-ax} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre a.

R

Question 6 ESCP 2009 $\boxed{\text{F1}}$

Une urne contient $4n+2$ boules numérotées de 1 à $4n+2$. On tire $2n+1$ boules sans remise, quelle est la probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à la somme des numéros des boules restantes ?

Ceci n'est pas une correction.

Notons X (resp. Y) la somme des numéros tirés (resp. non tirés) et posons la somme des numéros de toutes les boules.

$X+Y=N$ et $N=\sum_{k=1}^{4n+2} k = \frac{(4n+2)(4n+3)}{2} = (2n+1)(4n+3)$; N est impair.

$1 = P(X>Y)+P(X<Y)+P(X=Y) \underset{X+Y=N}{=} P(X>N-X)+P(Y>N-Y)+P(X=N-X)$.

$1 = P(X>\frac{N}{2})+P(Y>\frac{N}{2})+\underbrace{P(X=\frac{N}{2})}_{=0 \text{ car } N \text{ est impair}}$. $\quad 1 = P(X>\frac{N}{2})+P(Y>\frac{N}{2})$.

Notons que X et Y ont même loi. Nous aurons donc $P(X>\frac{N}{2})=P(Y>\frac{N}{2})$ donc $P(X>Y)=P(X>\frac{N}{2})=\frac{1}{2}$.

Si A est une partie de $[\![1,4n+2]\!]$ ayant $2n+1$ éléments nous notons T_A (resp. S_A) on a tiré la partie A (resp. aucun des numéros de A n'a été tiré).

Donc si A est une partie de $[\![1,4n+2]\!]$ ayant $2n+1$ éléments, $\bar{A}$ a également $2n+1$ éléments

donc $P(T_A) = \dfrac{1}{\binom{4n+2}{2n+1}} = P(T_{\bar{A}}) = P(S_A)$.

Soit r un élément de $X(\Omega)=Y(\Omega)$. Soit $\mathcal{P}_r$ l'ensemble des parties de $[\![1,4n+2]\!]$ ayant $2n+1$ éléments et dont la somme des éléments est r.

$P(X=r) = P\left(\bigcup_{A\in\mathcal{P}_r} T_A\right) = \sum_{A\in\mathcal{P}_r} P(T_A) = \sum_{A\in\mathcal{P}_r} P(S_A) = P\left(\bigcup_{A\in\mathcal{P}_r} S_A\right) = P(Y=r)$.

Ainsi X et Y ont même loi. Donc $P(X>\frac{N}{2})=P(Y>\frac{N}{2})$.

Comme $1 = P(X>\frac{N}{2})+P(Y>\frac{N}{2})$: $\quad P(X>\frac{N}{2})=\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} = P(X>\frac{N}{2}) = P(2X>N) = P(X>N-X) = P(X>Y)$. $\quad P(X>Y)=\frac{1}{2}$.

La probabilité cherchée est $1/2$.

Question 7 ESCP 2009 $\boxed{\text{F1}}$

On retourne une à une les cartes d'un jeu ordinaire (32 cartes) bien battu. Quel est le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour voir le premier as ?

Ceci n'est pas une correction.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cartes à retourner pour obtenir

Soit A_i l'événement la $i^{\text{ème}}$ carte retournée est un as.

$X(\Omega) = [\![1, 29]\!]$. Soit $k \in [\![1, 29]\!]$.

$P(X=k) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ si $k=1$. Supposons $k \geq 2$

$P(X=k) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k)$

$P(X=k) = P(\overline{A_1})\, P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\, P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(\overline{A_3}) \times \dots \times P_{\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-2}}}(\overline{A_{k-1}})\, P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k)$

$P(X=k) = \frac{28}{32} \times \frac{27}{31} \times \dots \times \frac{28-(k-2)}{32-(k-2)} \times \frac{4}{32-(k-1)}$

$P(X=k) = \frac{(28)!}{(29-k)!} \times 4 \times \frac{(32-k)!}{(32)!} = \frac{(28)!\,4!}{(32)!} \times \frac{(32-k)!}{3!\,(29-k)!} = \frac{\binom{32-k}{3}}{\binom{32}{4}}$

Formule qui vaut pour $k=1$.

$\binom{32}{4} E(X) = \sum_{k=1}^{29} k \binom{32-k}{3} \underset{i=32-k}{=} \sum_{i=3}^{31} (32-i) \binom{i}{3}$.

$32-i = 33-(i+1)$

$\binom{32}{4} E(X) = 33 \sum_{i=3}^{31} \binom{i}{3} - \sum_{i=3}^{31} (i+1)\binom{i}{3} = 33 \sum_{i=3}^{31} \binom{i}{3} - \sum_{i=3}^{31} 4 \binom{i+1}{4}$.

$\binom{32}{4} E(X) = 33 \left[\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \dots + \binom{31}{3} \right] - 4 \left[\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \dots + \binom{32}{4} \right]$.

$\binom{32}{4} E(X) = 33 \binom{32}{4} - 4 \binom{33}{5} = 33 \binom{32}{4} - 4 \times \frac{33}{5} \binom{32}{4}$.

Alors $E(X) = 33 - 4 \times \frac{33}{5} = \frac{33}{5}$. $E(X) = \frac{33}{5} = 6,6$.

__Exercice__ .. Généraliser au temps d'attente de la $1^{\text{ère}}$ boule blanche d'une suite de tirages successifs d'une boule <u>sans remise</u> dans une urne contenant b boules blanches et n noires. R. : $\frac{b+n+1}{b+1}$.

Question 8 **ESCP 2009** $\boxed{\textbf{F1}}$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\, e^{\frac{k}{2n}}$.

Ceci n'est pas une correction.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k e^{\frac{k}{2n}} = \sum_{k=1}^{2n}\left(-e^{1/2n}\right)^k = \left(-e^{1/2n}\right)\frac{1-\left(-e^{\frac{1}{2n}}\right)^{2n}}{1-\left(-e^{1/2n}\right)}$.

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k e^{\frac{k}{2n}} = -\frac{e^{1/2n}}{1+e^{1/2n}}\left(1-e^{1}\right)$$

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k e^{\frac{k}{2n}}\right) = \lim_{n\mapsto+\infty}\left(-\frac{e^{1/2n}}{1+e^{1/2n}}(1-e)\right) = \frac{e-1}{2}.$$

Alors $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k e^{\frac{k}{2n}}\right) = 0$.

$\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$.

R

Question 9 ESCP 2009 $\boxed{\text{F2}}$

Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) = e^{-a}$.

Ceci n'est pas une correction.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + e^{-x}$.

$x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ comme primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Alors φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(x) = f(x) - e^{-x}$.

Il s'agit donc de montrer que : $\exists a \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(a) = 0$.

$\varphi(0) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ ... Rolle n'est pas loin ...

__1er cas.__ φ est constante. Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(x) = 0$. Donc $\exists a \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(a) = 0$!

__2e cas.__ φ n'est pas constante. $\exists b \in]0, +\infty[$, $\varphi(b) \neq 1$.

__a)__ __$\varphi(b) > 1$__. Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$ et que $\varphi(b) > 1$:

$\exists A \in]b, +\infty[$, $\forall x \in [A, +\infty[$, $\varphi(x) < \varphi(b)$.

φ est continue sur $[0, A]$ donc φ possède un maximum sur $[0, A]$.

$\exists a \in [0, A]$, $\varphi(a) = \displaystyle\max_{t \in [0,A]} \varphi(t)$. Or $b \in]0, A[$, $\varphi(0) < \varphi(b)$ et $\varphi(A) < \varphi(b)$.

donc φ ne peut atteindre son maximum sur $[0, A]$ en 0 ou en A.

Alors $a \in]0, A[$. $]0, A[$ étant ouvert et $\varphi(a)$ étant le maximum de φ sur $[0, A]$ et sur $]0, A[$: $\varphi'(a) = 0$.

__b)__ __$\varphi(b) < 1$__

__Exercice.__ Traiter ce cas en s'inspirant du précédent.

Question 10 ESCP 2009 $\boxed{\text{F1}}$

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et f un endomorphisme de E. Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker} f$ lorsque $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Ceci n'est pas une correction.

V1 $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\dim \operatorname{Ker} f \leq \dim \operatorname{Ker} f^2 \leq 2$.

f n'est pas bijective car sinon $f^3 = f \circ f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ serait bijective !!

Alors $1 \leq \dim \operatorname{Ker} f \leq \dim \operatorname{Ker} f^2 \leq 2$.

1er cas.. $1 \leq \dim \operatorname{Ker} f < \dim \operatorname{Ker} f^2 \leq 2$. Alors $\underline{\underline{\dim \operatorname{Ker} f = 1}}$ (et $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 2$).

2e cas.. $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$. Alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ car $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.

Soit $x \in E$. $f^3(x) = 0$. $f^2(f(x)) = 0_E$. $f(x) \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$. $f^2(x) = 0$.
$f(x) \in \operatorname{Ker} f$.

$\forall x \in E$, $f^2(x) = 0_E$. $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ce qui est impossible.

Finalement $\underline{\underline{\dim \operatorname{Ker} f = 1}}$

V2. $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\exists x \in E$, $f^2(x) \neq 0_E$. Notons que $(x, f(x), f^2(x))$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha x + \beta f(x) + \gamma f^2(x) = 0_E$.

$0_E = f^2(0_E) = f^2(\alpha x + \beta f(x) + \gamma f^2(x)) = \alpha f^2(x)$ car $f^3(x) = f^4(x) = 0_E$.

Ainsi $\underline{\alpha = 0}$ car $f^2(x) \neq 0_E$. Alors $\beta f(x) + \gamma f^2(x) = 0_E$.

$0_E = f(0_E) = f(\beta f(x) + \gamma f^2(x)) = \beta f^2(x)$ et $f^2(x) \neq 0_E$ donc $\underline{\beta = 0}$.

Alors $0_E = \gamma f^2(x)$ et $f^2(x) \neq 0_E$. $\underline{\gamma = 0}$.

$B = (x, f(x), f^2(x))$ est libre. Mieux c'est une base de E et $M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Il est donc aisé de montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(f^2(x))$ et de retrouver $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

V3 On part comme dans V2. On montre également que $(f(x), f^2(x))$ est libre.

Alors $\dim \operatorname{Im} f \geq 2$. Mais $\dim \operatorname{Im} f < 3$ car f n'est pas bijective

donc $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Alors $\dim \operatorname{Ker} f = 1$

Exercice.. Trouver les sous-espaces de E stables par f.

R

Question 11 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F2}}$

n appartient à $[\![2, +\infty[\![$. Soit P un polynôme réel de degré n, admettant n racines réelles distinctes.

a) Combien P' admet-il de racines réelles ?

b) Comparer la moyenne arithmétique des racines de P à la moyenne arithmétique des racines de P'.

Ceci n'est pas une correction.

Notons $x_1, x_2, \dots, x_n$ les racines de P ordonnées dans l'ordre croissant.

Alors $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. P est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ et

$P(x_i) = P(x_{i+1})$ $(= 0)$. Le théorème de Rolle montre que : $\exists y_i \in]x_i, x_{i+1}[$, $P'(y_i) = 0$.

$y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ sont n racines distinctes de P' qui est de degré $n-1$.

Alors $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ sont LES racines de P'.

Soit α le coefficient de X^n dans P. Alors $P = \alpha(X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_n)$.

$n\alpha$ est le coefficient de X^{n-1} dans P'. Alors $P' = n\alpha(X - y_1)(X - y_2)\cdots(X - y_{n-1})$.

Notons β le coefficient de X^{n-1} dans P.

Le coefficient de X^{n-1} dans $\alpha(X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_n)$ est $\alpha(-x_1 - x_2 - \cdots - x_n)$ (OK ??)

Ainsi $\beta = \alpha(-x_1 - x_2 - \cdots - x_n)$; $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ (ça très connu).

$(n-1)\beta$ est le coefficient de X^{n-2} dans P'.

Le coefficient de X^{n-2} dans $n\alpha(X - y_1)(X - y_2)\cdots(X - y_{n-1})$ est $n\alpha(-y_1 - y_2 - \cdots - y_{n-1})$.

Donc $(n-1)\beta = n\alpha(-y_1 - y_2 - \cdots - y_{n-1})$; $y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} = -\dfrac{(n-1)\beta}{n\alpha}$.

Alors $\dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}}{n-1} = \dfrac{1}{n}\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right) = \dfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$.

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}}{n-1}.$$ cqfd.