Voici les questions sans préparation 2008 qu'à bien voulu nous fournir l'ESCP. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

Il y a deux séries de "pistes". Dans la première les solutions sont très rapides.

QUESTIONS COURTES ESCP 2008

Question 1 ESCP 2008 F1

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. On note f une densité de X. Justifier l'existence et calculer, pour tout z de $\mathbb{R}$:

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leqslant zx) f(x)\, dx.$$

Vérifier que G possède les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition.

Question 2 ESCP 2008 F1

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables de Bernoulli de paramètres respectifs p_1, p_2 et p_3. On suppose ces variables définies sur le même espace probabilisé et indépendantes. On suppose que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ et on note $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Déterminer la valeur maximale de la variance de S et préciser quand elle est atteinte.

Question 3 ESCP 2008 F1

Soit α un réel non nul, n un entier strictement plus grand que 1 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - \alpha I) = 0$.

Montrer que A est diagonalisable.

Question 4 ESCP 2008 F2

L'équation matricielle $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a-t-elle des solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? Donner un exemple non trivial d'une matrice nilpotente telle que l'équation matricielle $X^2 = A$ possède des solutions.

Question 5 ESCP 2008 F1

On considère l'équation $x^2 + px + q = 0$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$. On suppose que cette équation admet une solution complexe non réelle z telle que $|z| \leqslant 1$.

Montrer que $|z| = 1$ et qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z^n = 1$. Quelles sont les valeurs possibles de n ?

Question 6 ESCP 2008 F1

Soit $(E, (.,.))$ un espace euclidien. Trouver toutes les fonctions f définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (u, v) \in E^2,\ f(u + v) - f(u - v) = 4(u, v).$$

Question 7 ESCP 2008 F2

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe des réels $k > 0$ et $\alpha > 1$ tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|^{\alpha}.$$

A-t-on le même résultat si on suppose $0 < \alpha < 1$?

Question 8 ESCP 2008 $\boxed{\textbf{F3}}$

Soit A une matrice inversible telle que tous les coefficients de A et de A^{-1} sont positifs ou nuls. Montrer que chaque ligne et chaque colonne de A comporte un coefficient non nul et un seul.

Question 9 ESCP 2008 $\boxed{\textbf{F1}}$

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X - Y$.

Question 10 ESCP 2008 $\boxed{\textbf{F1}}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{n}$.

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

QUELQUES PISTES POUR QUELQUES QUESTIONS COURTES ESCP 2008

Question 1. Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\hat{f}$ est aussi une densité de X. $\hat{f}$ et f coïncident sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq zx) f(x)\,dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq zx) \hat{f}(x)\,dx$ sont de même nature ; en

cas de convergence elles sont égales (ceci pour tout $z \in \mathbb{R}$).

Si $z \in]-\infty, 0[$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X \leq xz)\hat{f}(x) = 0$ (2 cas : $x \geq 0$ et $x < 0$)

Si $z \in [0,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X \leq xz)\hat{f}(x) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda xz})\lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On montre alors sans difficulté que G est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall z \in \mathbb{R}$, $G(z) = \begin{cases} \frac{z}{1+z} & \text{si } z \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

G est croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{z \to -\infty} G(z) = 0$, $\lim_{z \to +\infty} G(z) = 1$, G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe

C^1 sur $\mathbb{R}^*$. G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Question 2. $V(S) = p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2) + p_3(1-p_3)$.

Intéressons-nous alors sur $\mathbb{R}^3$ au problème $\begin{array}{l} \text{Max } x(1-x)+y(1-y)+z(1-z) \\ \text{sc } x+y+z=1 \end{array}$

On pose $\Omega = \mathbb{R}^3$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = x(1-x)+y(1-y)+z(1-z)$ et $g(x,y,z) = x+y+z$.

On pose aussi $C = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid g(X) = 1\}$. f est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

On suppose que $A = (a,b,c)$ est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte C. $\nabla f(A) \in \text{Vect}(\nabla g(X)) = \text{Vect}(1,1,1)$; $(1-2a, 1-2b, 1-2c) \in \text{Vect}(1,1,1)$.

Alors $a = b = c$. Or $A \in C$ donc $a = b = c = \frac{1}{3}$. On pose alors $A = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Soit $X = (x,y,z) \in C$. On pose $\alpha = \frac{1}{3} - x$, $\beta = \frac{1}{3} - y$, $\gamma = \frac{1}{3} - z$. $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

$f(X) - f(A) = -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \leq 0$. f admet en A un maximum global sous la contrainte C.

La valeur maximale de $V(S)$ est $\frac{2}{3}$; elle est atteinte pour $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$.

Question 3 1) Prendre un endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^n$ associé à A.

2) Montrer par analyse synthèse que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E) = E$.

3) Construire une base de E constituée de vecteurs propres de f en distinguant trois cas : $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$, $\mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

Question 4 On suppose que $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ vérifie $X^2 = A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alors $XA = X^3 = AX$. $XA = AX$ donc alors $z = 0$ et $x = t$.

$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$!!!

Pour la suite. Pas de salut dans $M_2(\mathbb{C})$ car si $A \in M_2(\mathbb{C}) - \{0_{M_2(\mathbb{C})}\}$ et si A est nilpotente alors A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (à savoir prouver par cœur).

Dans $M_3(\mathbb{C})$ prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$!!

$(\exists X \in M_3(\mathbb{C}),\ X^2 = A$ et $A^2 = 0_{M_3(\mathbb{C})})$. On peut de toute évidence donner un exemple analogue dans $M_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 3$.

Question 5 L'équation admet pour solution z et $\bar{z}$ avec $z \notin \mathbb{R}$.

$|z|^2 = z\bar{z} = q$; par hypothèse $|z| \leq 1$. Donc $0 \leq q \leq 1$ et $q \in \mathbb{Z}$. $q = 0$ ou 1.

Si $q = 0$ les racines de l'équation sont réelles, donc $q = 1$. $|z|^2 = 1$. $|z| = 1$.

$\Delta < 0$. $p^2 - 4q = p^2 - 4 < 0$. $|p| < 2$. $p \in \{0, 1, -1\}$.

Si $p = 0$ les racines sont i et $-i$ donc $z^4 = 1$.

Si $p = 1$ les racines sont j et j^2 donc $z^3 = 1$.

Si $p = -1$ les racines sont $-j$ et $-j^2$ donc $z^3 = 1$.

Question 6.. La forme vient immédiatement à $u \mapsto \|u\|^2$ (identité de polarisation !).

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \mapsto \|u\|^2+\alpha$ est encore solution.

Montrons qu'il n'y a pas d'autre solution. Soit f une solution.

$\forall u \in E,\ f\left(\frac{u}{2}+\frac{u}{2}\right) - f\left(\frac{u}{2}-\frac{u}{2}\right) = 4\left(\frac{u}{2}, \frac{u}{2}\right) = \|u\|^2$

$\forall u \in E,\ f(u) = \|u\|^2 + f(0)$. On pose $\alpha = f(0)$. $\forall u \in E,\ f(u) = \|u\|^2+\alpha$.

Question 7 Soit f une solution. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\forall y \in \mathbb{R}-\{x\},\ \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq k\,|x-y|^{\alpha-1}$

$\forall y \in \mathbb{R}-\{x\},\ \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leq k\,|y-x|^{\alpha-1}$

Par encadrement $\lim\limits_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = 0$; f est dérivable en x et $f'(x)=0$.

f est alors constante sur $\mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ est un intervalle...)

Réciproquement si f est constante sur $\mathbb{R}^+$, f est solution.

Le résultat ne vaut pas pour $0<\alpha<1$. Prendre $\alpha \in]0,1[$ et $f : x \mapsto x^\alpha$ et montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ |f(x)-f(y)| \leq |x-y|^\alpha$.

Question 8. (*) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. A est inversible donc sa $i^{\text{ème}}$ ligne contient au moins un coefficient non nul. Supposons que cette $i^{\text{ème}}$ ligne contienne au moins deux coefficients non nuls : a_{ir} et a_{is} $(r \neq s)$.

(*) $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Alors ou $j \neq r$ ou $j \neq s$.

1er cas.. $j \neq r$: $BA = I_n$ donc $\sum_{k=1}^{n} b_{jk}a_{kr} = 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!],\ b_{jk}a_{kr} \geq 0$

Alors $\forall k \in [\![1,n]\!],\ b_{jk}a_{kr} = 0$ donc $b_{ji}a_{ir} = 0$ et $a_{ir} \neq 0$

Alors $b_{ji} = 0$.

2e cas $j \neq s$: On montre de même que $b_{ji} = 0$.

Finalement $\forall j \in [\![1,n]\!],\ b_{ji} = 0$. La $i^{\text{ème}}$ colonne de A^{-1} est nulle !!

Question 9. $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $P(X=k)=P(Y=k)=\frac{1}{n}$.

$(X-Y)(\Omega)=[\![-n+1,n-1]\!]$ indépendance

$$\forall k\in[\![-n+1,n-1]\!],\ P(X-Y=k)=\sum_{i=1}^{n}P\big((Y=i)\cap(X=k+i)\big)\overset{\downarrow}{=}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(X=k+i).$$

$$\forall k\in[\![-n+1,n-1]\!]\ P(X-Y=k)=\frac{1}{n}\sum_{i=\max(1,1-k)}^{\min(n,n-k)}\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\left[\min(n,n-k)-\max(1,1-k)+1\right]$$

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ P(X-Y=k)=\frac{1}{n^2}\left[n-k-1+1\right]=\frac{n-k}{n^2}=\frac{n-|k|}{n^2}$$

$$\forall k\in[\![-n+1,-1]\!],\ P(X-Y=k)=\frac{1}{n^2}\left[n-(1-k)+1\right]=\frac{n+k}{n^2}=\frac{n-|k|}{n^2}.$$

$$\forall k\in[\![-n+1,n-1]\!],\ P(X-Y=k)=\frac{n-|k|}{n^2}.$$

Question 10 Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=2n\ln(1+\frac{1}{n})$ et $b_n=n\ln(1+\frac{2}{n})$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=2=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$ (cas connu), $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$.

$$u_n=e^{a_n}-e^{b_n}=e^{b_n}\left(e^{a_n-b_n}-1\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}e^2(a_n-b_n)=ne^2\left[2\ln(1+\tfrac{1}{n})-\ln(1+\tfrac{2}{n})\right]$$

$$2\ln(1+\tfrac{1}{n})-\ln(1+\tfrac{2}{n})=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)-\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$2\ln(1+\tfrac{1}{n})-\ln(1+\tfrac{2}{n})=\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right);\quad 2\ln(1+\tfrac{1}{n})-\ln(1+\tfrac{2}{n})\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$$

$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e^2}{n}$ … la divergence est claire.

Question 1 **ESCP 2008** $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. On note f une densité de X. Justifier l'existence et calculer, pour tout z de $\mathbb{R}$:

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leqslant zx) f(x)\, dx.$$

Vérifier que G possède les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition.

Ceci n'est pas une correction.

Sans perte de généralité nous supposons que f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit $z \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $P(X \leqslant zx) f(x) = 0$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $P(X \leqslant zx) f(x) = \alpha e^{-\alpha x} P(X \leqslant zx) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha z x}) & \text{si } z \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Si $z \in]-\infty, 0[$ $x \mapsto P(X \leqslant zx) f(x)$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

Donc si $z \in]-\infty, 0[$, $G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leqslant zx) f(x)\, dx$ converge et vaut 0.

Supposons $z \in [0,+\infty[$. $\int_{-\infty}^{0} P(X \leqslant zx) f(x)\, dx$ converge et vaut 0.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $P(X \leqslant zx) f(x) = (1 - e^{-\alpha z x}) f(x) = f(x) - \alpha e^{-\alpha z x} e^{-\alpha x} = f(x) - \alpha e^{-\alpha(z+1)x}$

$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge et vaut 1. $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-\alpha(z+1)x}\, dx = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{-e^{-\alpha(z+1)x}}{\alpha(z+1)} \right]_0^A = \frac{1}{\alpha(z+1)}$.

Alors $\int_0^{+\infty} P(X \leqslant zx) f(x)\, dx$ converge et vaut $1 - \alpha \times \frac{1}{\alpha(z+1)}$ ou $\frac{z}{z+1}$.

Donc $G(z)$ converge et vaut $\frac{z}{z+1}$.

Finalement G est définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{z}{z+1} & \text{si } z \in [0,+\infty[\end{cases}$.

Il est alors aisé de montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$, croissante sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$ et que $\lim_{z \to +\infty} G(z) = 1$ et $\lim_{z \to -\infty} G(z) = 0$.

Alors G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

R

Question 2 **ESCP 2008** $\boxed{\text{F1}}$

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables de Bernoulli de paramètres respectifs p_1, p_2 et p_3. On suppose ces variables définies sur le même espace probabilisé et indépendantes. On suppose que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ et on note $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Déterminer la valeur maximale de la variance de S et préciser quand elle est atteinte.

Ceci n'est pas une correction.

V1 $V(S) = V(X_1)+V(X_2)+V(X_3) = p_1(1-p_1)+p_2(1-p_2)+p_3(1-p_3) = p_1+p_2+p_3-(p_1^2+p_2^2+p_3^2)$.

↑ indépendance

On suppose que $p_1+p_2+p_3=1$.

$V(S) = 1-(p_1^2+p_2^2+p_3^2)$

(*)

Cauchy-Schwarz donne $1^2 = (1\times p_1+1\times p_2+1\times p_3)^2 \leqslant (1^2+1^2+1^2)(p_1^2+p_2^2+p_3^2)$

$\frac{1}{3} \leqslant p_1^2+p_2^2+p_3^2$. $V(S) \leqslant 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)$ et

de plus $\frac{1}{3} \in [0,1]$ et $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$.

Notons que si $V(S)=\frac{2}{3}$ alors (*) est une égalité et donc $((1,1,1),(p_1,p_2,p_3))$ est une famille liée.

Si $V(S)=\frac{2}{3}$: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $p_1=p_2=p_3=\lambda$; comme $p_1+p_2+p_3=1$: $p_1=p_2=p_3=\frac{1}{3}$.

Lorsque $p_1+p_2+p_3=1$ la valeur maximale de la variance de S est $\frac{2}{3}$

et elle est atteinte si et seulement si $p_1=p_2=p_3=\frac{1}{3}$.

V2 Esquisse .. la démarche la plus naturelle est de se ramener à un problème d'extremum sans contrainte.

Nous traiterons le problème dans $\mathbb{R}^3$ pour être un peu court.

<u>Étape 1</u> .. le décor. Posons $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=x(1-x)+y(1-y)+z(1-z)$,

$g(x,y,z)=x+y+z$ et $E=\{X\in\mathbb{R}^3 \mid g(X)=1\}$.

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

On cherche alors le maximum de f sous la contrainte E.

Etape 2.. Recherche des points critiques.

- Supposons que f admette un extremum local en $A=(a,b,c)$ sous la contrainte $\mathcal{C}$.
  Le cours indique que $\nabla f(A) \in (\operatorname{Ker} g)^{\perp} = \operatorname{Vect}(\nabla g(X))$ où λ est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$.

  $\nabla f(A) = (1-2a, 1-2b, 1-2c) \in (\operatorname{Ker} g)^{\perp} = \operatorname{Vect}(\nabla g(X)) = \operatorname{Vect}(1,1,1)$.

  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $1-2a = 1-2b = 1-2c = \lambda$. Alors $a=b=c$.

  Comme $A \in \mathcal{C}$: $1 = a+b+c = 3a$. $a=b=c=\frac{1}{3}$. $A=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

- Réciproquement. Pour $A=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

  $A \in \mathcal{C}$ car $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$.

  $\nabla f(A) = (1-2\times\frac{1}{3}, 1-2\times\frac{1}{3}, 1-2\times\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \in \operatorname{Vect}((1,1,1)) = (\operatorname{Ker} g)^{\perp}$

  A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

  C'est le seul !

Etape 3.. Etudions si f admet en A un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}$.
$f(A) = 3\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$. Soit $X=(x,y,z)\in\mathcal{C}$. $x+y+z=1$.

$f(X) = x(1-x)+y(1-y)+z(1-z) = 1-(x^2+y^2+z^2)$.

Par Cauchy-Schwarz donc, $1^2 = (x+y+z)^2 \leq (1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)$; $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}$.

$f(X) \leq 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3} = f(A)$. f admet en $A=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ un maximum global sous la contrainte $\mathcal{C}$. A est le seul point qui réalise ce maximum.

Ceci suffit largement pour obtenir la médaille du travail 2.

Question 3 **ESCP 2008** $\boxed{\text{F1}}$

Soit α un réel non nul, n un entier strictement plus grand que 1 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - \alpha I) = 0$.

Montrer que A est diagonalisable.

Ceci n'est pas une correction.

1er cas.. A est inversible. Alors $A^{-1}A(A-\alpha I)=A^{-1}0=0$; $A-\alpha I=0$; $A=\alpha I$

A est diagonale donc A est diagonalisable

2e cas.. $A-\alpha I$ est inversible. On montre de même que $A=0$; A est diagonalisable.

3e cas.. A et $A-\alpha I$ ne sont pas inversibles. Alors $0 \in \mathrm{Sp}\, A$ et $\alpha \in \mathrm{Sp}\, A$.

$X(X-\alpha)$ est un polynôme annulateur de A donc les valeurs propres sont racines ; $\mathrm{Sp}\, A \subset \{0,\alpha\}$.

Finalement $\mathrm{Sp}\, A = \{0,\alpha\}$.

$SEP(A,0)$ et $SEP(A,\alpha)$ sont en somme directe (comme car $\alpha \neq 0$).

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X = \frac{1}{\alpha} A X + \left(-\frac{1}{\alpha}\right)(A-\alpha I)X = X_1 + X_2$ avec $\begin{cases} X_1 = \left(-\frac{1}{\alpha}\right)(A-\alpha I)X \\ X_2 = \frac{1}{\alpha} A X \end{cases}$.

$AX_1 = \left(-\frac{1}{\alpha}\right)A(A-\alpha I)X = 0$; $X_1 \in SEP(A,0)$.

$(A-\alpha I)X_2 = \frac{1}{\alpha}(A-\alpha I)AX = \frac{1}{\alpha}A(A-\alpha I)X = 0$; $X_2 \in SEP(A,\alpha)$.

Donc $X \in SEP(A,0) + SEP(A,\alpha) = SEP(A,0) \oplus SEP(A,\alpha)$.

Ainsi $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \subset SEP(A,0) \oplus SEP(A,\alpha)$. L'inclusion inverse est claire

donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \overset{(1)}{=} SEP(A,0) \oplus SEP(A,\alpha)$ et $\mathrm{Sp}\, A = \{0,\alpha\}$.

A est diagonalisable.

Exercice.. Retrouver (1) par analyse / synthèse.

R.

Question 4 **ESCP 2008** $\boxed{\textbf{F2}}$

L'équation matricielle $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a-t-elle des solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? Donner un exemple non trivial d'une matrice nilpotente telle que l'équation matricielle $X^2 = A$ possède des solutions.

Ceci n'est pas une correction.

- Supposons que $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit solution. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a^2+bc=0 & \bullet\bullet\bullet \\ c(a+d)=0 & \bullet\bullet \\ b(a+d)=1 & \bullet \\ cb+d^2=0 & \bullet\bullet\bullet\bullet \end{cases}$$

$\bullet$ donne $b\neq 0$ et $a+d\neq 0$.
$\bullet\bullet$ donne alors $c=0$
$\bullet\bullet\bullet$ et $\bullet\bullet\bullet\bullet$ donnent $a=d=0$ donc $a+d=0$!

L'équation n'a pas de solution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- Posons $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons que $A^2 = 0$.

Ainsi A est nilpotente, non triviale et l'équation $X^2 = A$ admet au moins une solution. Cette équation admet en fait une infinité de solutions. Toutes les matrices du type $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ sont solutions.

<u>Exercice 1</u>.. Reprendre cette dernière question avec n quelconque dans $\mathcal{M}_n$, $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 2</u>.. Utiliser la première question pour montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, si A est nilpotente et non nulle l'équation $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $X^2 = A$ n'a pas de solution.

Question 5 **ESCP 2008** $\boxed{\textbf{F1}}$

On considère l'équation $x^2 + px + q = 0$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$. On suppose que cette équation admet une solution complexe non réelle z telle que $|z| \leqslant 1$.

Montrer que $|z| = 1$ et qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z^n = 1$. Quelles sont les valeurs possibles de n ?

Ceci n'est pas une correction.

Supposons que z soit une solution non réelle de l'équation.

Alors • $\Delta = p^2 - 4q < 0$

• $\bar{z}$ est l'autre solution de l'équation

• $z \bar{z} = q$

donc $q = |z|^2 \leqslant 1$. Alors $0 \leqslant q \leqslant 1$.

1er cas. $q = 0$. Alors $p^2 - 4q = p^2 \geqslant 0$ ceci est incompatible avec $p^2 - 4q < 0$.

2ème cas $q = 1$. Alors $p^2 - 4 < 0$. $p^2 < 4$; $|p| < 2$; $|p| \leqslant 1$.

Ainsi $p \in \{0, -1, 1\}$.

a) $p = 0$. L'équation est $x^2 + 1 = 0$. $z = i$ ou $-i$

Alors $|z| = 1$ et $z^4 = 1$

b) $p = 1$ L'équation est $x^2 + x + 1 = 0$. $z = j$ ou j^2

Alors $|z| = 1$ et $z^3 = 1$

c) $p = -1$ L'équation est $x^2 - x + 1 = 0$; $z = -j$ ou $-j^2$

Alors $|z| = 1$ et $z^3 = 1$

R

Question 6 **ESCP 2008** $\boxed{\text{F1}}$

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien. Trouver toutes les fonctions f définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) - f(u-v) = 4\langle u, v\rangle.$$

Ceci n'est pas une correction.

* Il vient aux yeux que $u \mapsto \|u\|^2$ est solution car

$\forall (u,v) \in E^2, \quad \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u, v\rangle.$

Il est aussi clair que $u \mapsto \|u\|^2 + \alpha$ est solution pour tout réel α.

* Soit f une solution. Posons $\alpha = f(0_E)$.

$$f\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}u\right) - f\left(\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}u\right) = 4\left\langle \tfrac{1}{2}u, \tfrac{1}{2}u\right\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2$$

$\forall u \in E, \quad f(u) - f(0_E) = \|u\|^2$

$\forall u \in E, \quad f(u) = \|u\|^2 + f(0_E) = \|u\|^2 + \alpha$

L'ensemble des solutions est : $\underline{\{f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R}) \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in E, f(u) = \|u\|^2 + \alpha\}}$.

R

Question 7 **ESCP 2008** $\boxed{\textbf{F2}}$

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe des réels $k > 0$ et $\alpha > 1$ tels que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+2}, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|^\alpha.$$

A-t-on le même résultat si on suppose $0 < \alpha < 1$?

Ceci n'est pas une correction.

* Soit f une solution. Soit $a \in \mathbb{R}^+$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+ - \{a\}$, $0 \leqslant \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| = \frac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|} \leqslant k|x-a|^{\alpha-1}$

$\alpha > 1$ donc $\lim\limits_{x \to a} k(|x-a|^{\alpha-1}) = 0$; par encadrement $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$.

Alors f est dérivable en a et $f'(a) = 0$ et ceci pour tout a dans $\mathbb{R}^+$.

$\mathbb{R}^+$ est un intervalle f est constante sur $\mathbb{R}^+$

* Réciproquement toute application constante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ est solution.

▲ Posons $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{x}$.

- f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^+$.
- Montrons que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|^{1/2}$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Montrons que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$;

ou que $x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} = |\sqrt{x}-\sqrt{y}|^2 \leqslant |x-y|$

1er cas.. $x \geqslant y$. Alors $|x-y| - x - y + 2\sqrt{x}\sqrt{y} = x - y - x - y + 2\sqrt{x}\sqrt{y} = 2\sqrt{x}\sqrt{y} - 2y$.

$|x-y| - x - y + 2\sqrt{x}\sqrt{y} = 2\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \geqslant 0$ cqfd.

2e cas.. $x \leqslant y$ même preuve.

Nous avons donc trouvé une application f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, non constante et telle qu'il existe $k > 0$ et $0 < \alpha < 1$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, |f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|^\alpha.$$

Question 8 **ESCP 2008** $\boxed{\text{F3}}$

Soit A une matrice inversible telle que tous les coefficients de A et de A^{-1} sont positifs ou nuls. Montrer que chaque ligne et chaque colonne de A comporte un coefficient non nul et un seul.

Ceci n'est pas une correction.

Nous supposons que $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si $n=1$ cela semble clair.

Supposons $n\geqslant 2$. A est inversible. Posons $A^{-1}=(b_{ij})$.

On a $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij}\geqslant 0$, $b_{ij}\geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=\begin{cases}1 \text{ si } i=j\\ 0 \text{ si } i\neq j\end{cases}$

* Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Soit j un élément de $[\![1,n]\!]$ distinct de i.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=0$ et $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_{ik}b_{kj}\geqslant 0$

Donc $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_{ik}=0$ ou $b_{kj}=0$.

Si $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_{ik}=0$ alors la i^{e} ligne de A est nulle et A n'est pas inversible ! Donc $\exists k_0\in[\![1,n]\!]$, $a_{ik_0}\neq 0$.

La i^{e} ligne de A contient un terme non nul.

Supposons qu'il existe un second terme non nul dans cette ligne.

$\exists k_1\in[\![1,n]\!]-\{k_0\}$, $a_{ik_1}\neq 0$.

$BA=I_n$. Donc $\forall (r,s)\in[\![1,n]\!]^2$, $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} b_{rt}a_{ts}=\begin{cases}1 \text{ si } r=s\\ 0 \text{ si } r\neq s\end{cases}$.

Soit $r\in[\![1,n]\!]-\{k_0\}$, $0=\displaystyle\sum_{t=1}^{n} b_{rt}a_{tk_0}$ et $\forall t\in[\![1,n]\!]$, $b_{rt}a_{tk_0}\geqslant 0$.

Donc $\forall t\in[\![1,n]\!]$, $b_{rt}a_{tk_0}=0$. $b_{ri}a_{ik_0}=0$ donc $b_{ri}=0$.

Ainsi $\forall r\in[\![1,n]\!]-\{k_0\}$, $b_{ri}=0$. De même $\forall r\in[\![1,n]\!]-\{k_1\}$, $b_{ri}=0$.

Donc $\forall r\in[\![1,n]\!]$, $b_{ri}=0$ et la i^{e} colonne de B est nulle !!

Finalement la i^{e} ligne contient un terme non nul et un seul.

* Même type de preuve pour les colonnes ou utilisation de la transposée.

R

Question 9 ESCP 2008 $\boxed{\textbf{F1}}$

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X - Y$.

Ceci n'est pas une correction.

Posons $Z = X - Y$. $Z(\Omega) = [\![-(n-1), n-1]\!]$.

$P(Z=k) = \sum_{i=1}^{n} P([X-Y=k] \cap [Y=i]) = \sum_{i=1}^{n} P([X=k+i] \cap [Y=i])$

Par indépendance $P(Z=k) = \sum_{i=1}^{n} P(X=k+i)\, P(Y=i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P(X=k+i)$

$P(Z=k) = \frac{1}{n} \sum_{i=\max(1,1-k)}^{\min(n,n-k)} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \left[\min(n,n-k) - \max(1,1-k) + 1\right]$.

$\uparrow$

$1 \leq k+i \leq n \iff 1-k \leq i \leq n-k$

$P(Z=k) = \frac{1}{n^2} \left[\min(n,n-k) - \max(1,1-k) + 1\right]$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(Z=k) = \frac{1}{n^2} [n-k-1+1] = \frac{n-k}{n^2}$.

Soit $k \in [\![-(n-1), -1]\!]$, $P(Z=k) = \frac{1}{n^2} (n-(1-k)+1) = \frac{n+k}{n^2}$.

$\forall k \in [\![-(n-1), n-1]\!]$, $P(Z=k) = \frac{n-|k|}{n^2}$.

R

Question 10 **ESCP 2008** $\boxed{\textbf{F1}}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$.

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Ceci n'est pas une correction.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \left[\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} - 1\right]$.

$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}$. $n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim n \times \frac{2}{n} = 2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) = 2$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$.

$\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} - 1 = e^{2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)} - 1$.

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 2 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

$\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 2 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

$2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Alors $2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) = 0$.

$\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} - 1 = e^{2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^2}{n}$... Alors la série de terme général u_n diverge.