Voici les questions sans préparation 2007 qu'à bien voulu nous fournir l'ESCP. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

QUESTIONS COURTES 2007

Question 11 ESCP 2007 D. ADJERAD

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$. Montrer que si $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.

Question 12 ESCP 2007 C. BONHOMME

A est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 13 ESCP 2007 C. BRONES

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suites de variable aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1. N est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi géométrique de paramètre p. On suppose que les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\geqslant n}$ et N sont mutuellement indépendantes.

Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \underset{1\leqslant k\leqslant N(\omega)}{\operatorname{Min}} X_k(\omega)$.

Question 14 ESCP 2007 M. BOUCHER Oubliée mais du type suivant (ESCP 2006)

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Question 15 ESCP 2007 P. DESMICHEL

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Donner plusieurs conditions nécessaires er suffisantes pour que f soit diagonalisable.

Question 16 ESCP 2007 G. GOBINET

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $[-2, 2]$. Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. X et Y sont indépendantes. t est un réel.

Trouver la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ t & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Question 17 ESCP 2007 J. NAKACHE

Deux joueurs A et B jouent à Pile ou Face. On lance deux fois la pièce. Si l'on obtient PF (resp. FP), A (resp. B) gagne. Dans le cas contraire on recommence.

La probabilité d'obtenir Pile est p ($p \in]0, 1[$). On suppose que la probabilité d'obtenir Pile est plus grande que celle d'obtenir Face.

Q1. Trouver la probabilité pour que le jeu s'arrête.

Q2. Le jeu est-il équitable ?

Question 18 ESCP 2007 V. OWEN

φ est une forme linéaire sur un espace vectoriel E de dimension n non nulle. u est un vecteur non nul de E.

On considère l'endomorphisme f de E défini par : $\forall x \in E,\ f(x) = x + \varphi(x)\,u$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Question 19 **ESCP 2007** M. RAPAPORT

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = 2$.

Question 20 **ESCP 2007** F. TAN et N. RIFFI

λ est un réel non nul. $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \frac{1}{\lambda} & -1 \end{pmatrix}$. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p!}\,(A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p}\right)$.

Question 21 **ESCP 2007** T. TOFFIER

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout élément x de E, il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = 0_E$.

Montrer qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\boxed{\text{JF}}$ Et si E est de dimension quelconque ?

Question 22 **ESCP 2007** J. VANNIMENUS

Montrer que la série de terme général $\dfrac{n^p}{2^n}$ converge.

Question 11 ESCP 2007 D. ADJERAD

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$. Montrer que si $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.

Notons que si f est diagonalisable alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires !

Supposons f diagonalisable.

* Si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ ou $\operatorname{Ker} f = E$: $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

* Supposons $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$ et $\operatorname{Ker} f \subsetneq E$. Alors 0 est valeur propre de f et f admet au moins une valeur propre non nulle.

  Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres non nulles de f. Posons $\lambda_1 = 0$

  $E = \bigoplus_{k=1}^{p} SEP(f,\lambda_k) = \operatorname{Ker} f \oplus \bigoplus_{k=2}^{p} SEP(f,\lambda_k)$. (1)

  Soit $k \in [\![2,p]\!]$ et soit u un élément de $SEP(f,\lambda_k)$. $f(u) = \lambda_k u$ et $\lambda_k \neq 0$

  Alors $u = \frac{1}{\lambda_k} f(u) = f\left(\frac{1}{\lambda_k} u\right) \in \operatorname{Im} f$.

  Donc $\forall k \in [\![2,p]\!]$, $SEP(f,\lambda_k) \subset \operatorname{Im} f$. Ainsi $\bigoplus_{k=2}^{p} SEP(f,\lambda_k) \subset \operatorname{Im} f$ (2)

(1) donne $\dim \bigoplus_{k=2}^{p} SEP(f,\lambda_k) = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f$ (3)

(2) et (3) donnent alors $\bigoplus_{k=2}^{p} SEP(f,\lambda_k) = \operatorname{Im} f$ (car $\dim E < +\infty$).

(1) donne $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$. cqfd.

R

Question 12 **ESCP 2007** C. BONHOMME

A est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans $\mathcal{B}$.

Posons $E = \mathbb{R}^3$.

Il convient de montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ telle que $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

* Analyse.. Supposons que $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ soit une telle base.

$u(e'_1) = u(e'_2) = 0_E$ et $u(e'_3) = e'_1$.

Alors $e'_1 = u(e'_3)$, $e'_1 \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ et $e'_2 \in \operatorname{Ker} f$.

Notons qu'alors $\dim \operatorname{Ker} f \geq 2$ et $\dim \operatorname{Im} f \geq 1$. Donc $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ et $\dim \operatorname{Im} f = 1$ ...

* Synthèse.. $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

De plus $\operatorname{Im} f \neq \{0_E\}$ et $\operatorname{Ker} f \neq E$ car $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ $(A \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})})$.

Alors $1 \leq \dim \operatorname{Im} f \leq \dim \operatorname{Ker} f \leq 2$. Si $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f$: $3 = \dim E = 2 \dim \operatorname{Ker} f$!!

↑ th. du rang.

Ainsi $1 \leq \dim \operatorname{Im} f < \dim \operatorname{Ker} f \leq 2$.

Alors $\dim \operatorname{Im} f = 1$, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ et $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

Soit e'_1 un élément non nul de $\operatorname{Im} f$. $\exists e'_3 \in E$, $f(e'_3) = e'_1$.

(e'_1) est une famille libre de $\operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Le théorème de la base incomplète montre qu'il existe e'_2 dans $\operatorname{Ker} f$ tel que (e'_1, e'_2) soit une base de $\operatorname{Ker} f$.

Posons $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$. $f(e'_1) = f(e'_2) = 0_E$ et $f(e'_3) = e'_1$. Il reste plus qu'à montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E ou une famille libre de E car $\dim E = 3$.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0_E$.

$0_E = f(0_E) = f(\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3) = \alpha f(e'_1) + \beta f(e'_2) + \gamma f(e'_3) = \gamma e'_1$ et $e'_1 \neq 0_E$.

Alors $\gamma = 0$. Donc $\alpha e'_1 + \beta e'_2 = 0_E$. La liberté de (e'_1, e'_2) donne $\alpha = \beta = 0$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. De plus $M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 13 **ESCP 2007** C. BRONES

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suites de variable aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1. N est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi géométrique de paramètre p. On suppose que les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\geqslant n}$ et N sont mutuellement indépendantes.

Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \underset{1\leqslant k\leqslant N(\omega)}{\mathrm{Min}} X_k(\omega)$.

Soit F_Y la fonction de répartition de Y. Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_Y(x)=0$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $(\{N=n\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. Ainsi :

$F_Y(x) = P(Y\leqslant x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{Y\leqslant x\}\cap\{N=n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{\min_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \leqslant x\}\cap\{N=n\})$

$F_Y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\min_{1\leqslant k\leqslant n} X_k\leqslant x)\, P(N=n)$ par indépendance. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$P(\min_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \leqslant x) = 1 - P(\min_{1\leqslant k\leqslant n} X_k > x) = 1 - P(\{X_1>x\}\cap\dots\cap\{X_n>x\})$

$P(\min_{1\leqslant k\leqslant n} X_k\leqslant x) \underset{\text{indépendance}}{=} 1 - P(X_1>x)\cdots P(X_n>x) = 1-(1-P(X_1\leqslant x))\cdots(1-P(X_n\leqslant x)) \underset{X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}{=} 1-(1-(1-e^{-x}))^n$

$P(\min_{1\leqslant k\leqslant n} X_k\leqslant x) = 1-e^{-nx}$.

$F_Y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-e^{-nx})P(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[P(N=n) - e^{-nx} p (qe^{-x})^{n-1}\right]$ où $q=1-p$.

$F_Y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) - pe^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty} (qe^{-x})^{n-1}$ car les deux séries convergent.

$F_Y(x) = 1 - pe^{-x}\dfrac{1}{1-qe^{-x}} = \dfrac{1-qe^{-x}-pe^{-x}}{1-qe^{-x}} = \dfrac{1-e^{-x}}{1-qe^{-x}}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{1-qe^{-x}} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Exercice. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité. Montrer que Y possède une espérance et la calculer.

R

Question 14 **ESCP 2007** M. BOUCHER Oubliée mais du type suivant (ESCP 2006)

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda \in Sp\,A \iff \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ non inversible $\iff (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{ou} \\ \lambda = 5 \end{cases}$

$Sp\,A = \{1,5\}$

Alors A est diagonalisable et semblable à $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$\lambda \in Sp\,B \iff B - \lambda I_2$ non inversible $\iff \begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 5 & 6-\lambda \end{pmatrix}$ non inversible $\iff (-\lambda)(6-\lambda)+5=0$

$\lambda \in Sp\,B \iff \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{ou} \\ \lambda = 5 \end{cases}$.

Alors B est diagonalisable et semblable à $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

A et B étant semblables à C : <u>A et B sont semblables.</u> (*)

* $\exists (P,Q) \in (GL_2(\mathbb{K}))^2$, $P^{-1}AP = C$ et $Q^{-1}BQ = C$.

Alors $B = QCQ^{-1} = QP^{-1}APQ^{-1} = (PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1})$.

d'où la semblabilité de A et B.

R

Question 15 ESCP 2007 P. DESMICHEL

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Donner plusieurs conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit diagonalisable.

Soit (e_1, e_2) une base de Ker f. Complétons-la par un élément e_3 de E tel que :

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. $\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

1er cas.. $c = 0$. Alors $\operatorname{Sp} f = \operatorname{Sp} M_{\mathcal{B}}(f) = \{0\}$ et $\dim SEP(f, 0) = \dim \operatorname{Ker} f = 2$

f n'est pas diagonalisable.

2ème cas.. $c \neq 0$ Alors $\operatorname{Sp} f = \{0, c\}$ avec $c \neq 0$.

$\dim SEP(f, 0) = 2$ et $\dim SEP(f, c) \geq 1$, $\dim SEP(f,0) + \dim SEP(f, c) \leq 3$.

Alors $\dim SEP(f, 0) + \dim SEP(f, c) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. f est diagonalisable.

Notons que $c = \operatorname{Tr}(M_{\mathcal{B}}(f)) = \operatorname{Tr}(f)$.

→ Donc f diagonalisable $\Leftrightarrow \operatorname{Tr}(f) \neq 0$.

$M_{\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & bc \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$

Si $c = 0$ $M_{\mathcal{B}}(f^2) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$; si $c \neq 0$ $M_{\mathcal{B}}(f^2) \neq 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

→ Donc f diagonalisable $\Leftrightarrow f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Rappelons que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$

→ Donc f diagonalisable $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f \not\subset \operatorname{Ker} f$.

Mais $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle donc $\operatorname{Im} f \not\subset \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$

→ Donc f diagonalisable $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$

→ Donc f diagonalisable $\Leftrightarrow \mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

R

Question 16 ESCP 2007 G. GOBINET

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $[-2, 2]$. Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. X et Y sont indépendantes. t est un réel.

Trouver la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ t & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $(x,y) \in [-2,2]^2$ et $t \in \mathbb{R}$. Posons $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ t & y \end{pmatrix}$.

Si A admet deux valeurs propres distinctes, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si A n'a pas de valeur propre dans $\mathbb{R}$, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$!

Supposons que A admet une valeur propre dans $\mathbb{R}$ et une seule λ.

Alors A diagonalisable $\Leftrightarrow \dim SEP(A, \lambda) = 2 \Leftrightarrow 2 - rg(A - \lambda I_2) = 2 \Leftrightarrow rg(A - \lambda I_2) = 0$

A diagonalisable $\Leftrightarrow A = \lambda I_2$. Or $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ t & y \end{pmatrix}$.

Donc A ne peut pas être diagonalisable.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-\lambda & 1 \\ t & y-\lambda \end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda^2 - (x+y)\lambda + xy - t \overset{(1)}{=} 0$.

(1) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ ssi $(x+y)^2 - 4(xy - t) > 0$.

A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (x-y)^2 + 4t > 0$

1er cas... $t > 0$. A est diagonalisable.

2e cas... $t = 0$ A est diagonalisable ssi $x \neq y$

3e cas $t < 0$ A est diagonalisable ssi $x - y \notin [-2\sqrt{|t|}, 2\sqrt{|t|}]$.

Notons S l'événement la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ t & Y \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

- Si $t > 0$: $\underline{P(S) = 1}$
- Supposons $t = 0$. $P(S) = P(X - Y \neq 0) = 1 - P(X - Y = 0) = 1 - P(X = Y)$.

$P(X = Y) = P(\{Y = 0\} \cap \{X = 0\}) + P(\{Y = 1\} \cap \{X = 1\})$. Par indépendance

$P(X = Y) = P(Y = 0)\underbrace{P(X = 0)}_{0} + P(Y = 1)\underbrace{P(X = 1)}_{0} = 0$.

$\underline{P(S) = 1}$

R

• **Supposons $t < 0$.** $P(S) = P(X-Y > 2\sqrt{|t|}) + P(X-Y < -2\sqrt{|t|})$

$$P(S) = P(\{Y=0\} \cap \{X > 2\sqrt{|t|}\}) + P(\{Y=1\} \cap \{X > 2\sqrt{|t|}+1\}) + P(\{Y=0\} \cap \{X < -2\sqrt{|t|}\}) +$$
$$P(\{Y=1\} \cap \{X < 1-2\sqrt{|t|}\}) \underset{\text{Par indépendance}}{\overset{q=1-p}{=}} q\,P(X>2\sqrt{|t|}) + p\,P(X > 2\sqrt{|t|}+1) + q\,P(X<-2\sqrt{|t|}) + p\,P(X < 1-2\sqrt{|t|})$$

Notons F la fonction de répartition de X.

$$P(S) = q(1 - F(2\sqrt{|t|})) + p(1 - F(2\sqrt{|t|}+1)) + q\,F(-2\sqrt{|t|}) + p\,F(1-2\sqrt{|t|}).$$

Rappelons que $\forall z \in \mathbb{R}$, $F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]-\infty, -2[\\ \frac{z+2}{4} & \text{si } z \in [-2,2] \\ 1 & \text{si } z \in]2,+\infty[. \end{cases}$

a) $\sqrt{|t|} < \frac{1}{2}$. $P(S) = q\left(1 - \frac{2\sqrt{|t|}+2}{4}\right) + p\left(1 - \frac{2\sqrt{|t|}+1+2}{4}\right) + q\frac{-2\sqrt{|t|}+2}{4} + p\frac{1-2\sqrt{|t|}+2}{4}$.

$P(S) = 1 - \sqrt{|t|}$

b) $\sqrt{|t|} \in [\frac{1}{2}, 1[$. $P(S) = q\left(1 - \frac{2\sqrt{|t|}+2}{4}\right) + p(1-1) + q\frac{-2\sqrt{|t|}+2}{4} + p\frac{1-2\sqrt{|t|}+2}{4}$.

$P(S) = (1-\sqrt{|t|})q + p\,\frac{3-2\sqrt{|t|}}{4}$

c) $\sqrt{|t|} \in [1, \frac{3}{2}[$. $P(S) = q(1-1) + p(1-1) + q \times 0 + p\,\frac{1-2\sqrt{|t|}+2}{4}$.

$P(S) = \frac{3-2\sqrt{|t|}}{4}\,p$.

d) $\sqrt{|t|} \in [\frac{3}{2}, +\infty[$ $P(S) = 0$.

Remarque : $t<0$ donc $\sqrt{|t|} < \frac{1}{2} \iff t > -\frac{1}{4}$; $\sqrt{|t|} \in [\frac{1}{2}, 1[\iff -\frac{1}{4} \geq t > -1$;

$\sqrt{|t|} \in [1, \frac{3}{2}[\iff -1 \geq t > -\frac{9}{4}$; $\sqrt{|t|} \in [\frac{3}{2}, +\infty[\iff t \leq -\frac{9}{4}$.

$$P(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, -\frac{9}{4}] \\ \frac{3-2\sqrt{|t|}}{4} & \text{si } t \in]-\frac{9}{4}, -1] \\ (1-\sqrt{|t|})q + p\,\frac{3-2\sqrt{|t|}}{4} & \text{si } t \in]-1, -\frac{1}{4}] \end{cases} \qquad P(S) = \begin{cases} 1-\sqrt{|t|} & \text{si } t \in]-\frac{1}{4}, 0[\\ 1 & \text{si } t \in [0, +\infty[\end{cases}$$

R

Question 17 ESCP 2007 J. NAKACHE

Deux joueurs A et B jouent à Pile ou Face. On lance deux fois la pièce. Si l'on obtient PF (resp. FP), A (resp. B) gagne. Dans le cas contraire on recommence.

La probabilité d'obtenir Pile est p ($p \in]0,1[$). On suppose que la probabilité d'obtenir Pile est plus grande que celle d'obtenir Face.

Q1. Trouver la probabilité pour que le jeu s'arrête.

Q2. Le jeu est-il équitable ?

Q1 La probabilité pour obtenir PF ou FP est $2pq$.

Soit S l'événement le jeu s'arrête. Soit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, S_k l'événement le jeu s'arrête au bout de k lancers.

$$P(S) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} S_k\Big) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P(S_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2pq(1-2pq)^{k-1} = 2pq\frac{1}{1-(1-2pq)} = 1.$$

incompatibilité

Presque sûrement le jeu s'arrête.

Q2 Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ notons S_A^k l'événement le joueur A gagne au bout de k lancers.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; P(A_k) = (1-2pq)^{k-1}pq$

Soit S_A la probabilité pour que le joueur A gagne.

$$P(S_A) = P(\cup A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-2pq)^{k-1}pq = pq\frac{1}{1-(1-2pq)} = \frac{1}{2}$$

Alors, comme $P(S) = 1$, la probabilité que B gagne est $1/2$.

Le jeu est équitable ce qui était clair dès le départ car la probabilité d'obtenir PF est la même que celle d'obtenir FP.

R

Question 18 **ESCP 2007** V. OWEN

φ est une forme linéaire sur un espace vectoriel E de dimension n non nulle. u est un vecteur non nul de E.

On considère l'endomorphisme f de E défini par : $\forall x \in E,\ f(x) = x + \varphi(x)\,u$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

1er cas. $n=1$. (u) est une base de E. Soit $x\in E$. $\exists \alpha_x \in \mathbb{K}$, $x=\alpha_x u$

$f(x) = x+\varphi(x)u = x + \alpha_x\varphi(u)u = x+\varphi(u)x = (1+\varphi(u))x$

$f=(1+\varphi(u))Id_E$. $Sp\, f=\{1+\varphi(u)\}$ et $SEP(f,1+\varphi(u))=E$.

2e cas. $n\geq 2$. $\forall x\in E$, $f(x)=x \iff \varphi(x)u=0_E \overset{u\neq 0_E}{\iff} \varphi(x)=0_{\mathbb{K}} \iff x\in \operatorname{Ker}\varphi$

a) $\varphi = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$. $f=Id_E$. $Sp\, f=\{1\}$ et $SEP(f,1)=E$

b) $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$. $\operatorname{Ker}\varphi$ est un hyperplan. donc $\dim \operatorname{Ker}\varphi = n-1\geq 1$.

Alors $1\in Sp\, f$ et $SEP(f,1)=\operatorname{Ker}\varphi$.

Notons que f a au plus deux valeurs propres et que s'il existe un deuxième sous-espace propre il est de dimension 1.

$f(u)=(1+\varphi(u))u$ et $u\neq 0_E$. $1+\varphi(u)$ est une valeur propre de f et u un vecteur propre associé.

i) $u\notin \operatorname{Ker}\varphi$. $\varphi(u)\neq 0$. $1+\varphi(u)\neq 1$.

Alors $Sp\, f=\{1,1+\varphi(u)\}$, $SEP(f,1)=\operatorname{Ker}\varphi$ et $SEP(f,1+\varphi(u))=\operatorname{Vect}(u)$.

ii) $u\in \operatorname{Ker}\varphi$. Soit $\lambda\in\mathbb{K}-\{1\}$ et $x\in \operatorname{Ker}(f-\lambda Id_E)$.

$\lambda x=f(x)=x+\varphi(x)u$. Donc $\lambda\varphi(x)=\varphi(x)+\varphi(x)\underset{\varphi(u)=0}{\varphi(u)=}\varphi(x)$. Or $\lambda\neq 1$ donc $\varphi(x)=0$

Alors $\lambda x=x+\varphi(x)u=x$. Comme $\lambda\neq 1$: $x=0_E$

Si $\lambda\in\mathbb{K}-\{1\}$, $\operatorname{Ker}(f-\lambda Id_E)=\{0_E\}$ et λ n'est pas valeur propre de f.

Ainsi $Sp\, f=\{1\}$ et $SEP(f,1)=\operatorname{Ker}\varphi$.

Résumons le b) ; mieux résumons le 2ème cas

Si $u\in\operatorname{Ker}\varphi$: $Sp\, f=\{1\}$ et $SEP(f,1)=\operatorname{Ker}\varphi$

Si $u\notin\operatorname{Ker}\varphi$: $Sp\, f=\{1,1+\varphi(u)\}$, $SEP(f,1)=\operatorname{Ker}\varphi$ et $SEP(f,1+\varphi(u))=\operatorname{Vect}(u)$

R.

Question 19 **ESCP 2007** M. RAPAPORT

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}=2.$

Posons $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}$. Soit $n\in[\![4,+\infty[\![$.

$$u_n=\frac{1}{\binom{n}{0}}+\frac{1}{\binom{n}{1}}+\frac{1}{\binom{n}{n-1}}+\frac{1}{\binom{n}{n}}+\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\binom{n}{k}}=2+\frac{2}{n}+\underbrace{\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\binom{n}{k}}}_{v_n}$$

Pour montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=2$ il suffit alors de montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n=0$.

Soit $k\in[\![2,n-2]\!]$.

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k(k-1)\cdots2\times1}=n(n-1)\underbrace{\frac{n-2}{k}}_{\geqslant1}\times\underbrace{\frac{n-3}{k-1}}_{\geqslant1}\times\cdots\times\underbrace{\frac{n-k+1}{3}}_{\geqslant1}\times\frac{1}{2\times1}\geqslant\frac{n(n-1)}{2}.$$

Alors $\displaystyle 0\leqslant v_n=\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\binom{n}{k}}\leqslant\sum_{k=2}^{n-2}\frac{2}{n(n-1)}=2\times\frac{n-3}{n(n-1)}\leqslant\frac{2}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0$.

Alors par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n=0$. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=2$. cqfd.

R

Question 20 **ESCP 2007** F. TAN et N. RIFFI

λ est un réel non nul. $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \frac{1}{\lambda} & -1 \end{pmatrix}$. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p!}\,(A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p}\right)$.

$$(A_\lambda + A_{2\lambda})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3\lambda \\ \frac{3}{2\lambda} & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3\lambda \\ \frac{3}{2\lambda} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3\lambda \\ \frac{3}{2\lambda} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 4+\frac{9}{2} \end{pmatrix} = \frac{17}{2}\, I_2 .$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}(A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p} = \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}\left(\frac{17}{2}\right)^p\right) I_2 .$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}(A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p} = e^{17/2}\, I_2 .$$

Question 21 **ESCP 2007** T. TOFFIER

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout élément x de E, il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = 0_E$.

Montrer qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\boxed{\text{JF}}$ Et si E est de dimension quelconque ?

Si $n = 0$: $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$!

Supposons $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\exists\, p_i \in \mathbb{N}^*$, $f^{p_i}(e_i) = 0_E$. Posons $q = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$. $q \in \mathbb{N}^*$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f^q(e_i) \underset{q-p_i \geqslant 0}{=} f^{q-p_i}(f^{p_i}(e_i)) = f^{q-p_i}(0_E) = 0_E$.

f^q et $0_{\mathcal{L}(E)}$ sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur la base de E donc

$f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Posons $E = \mathbb{R}[X]$. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E$, $f(P) = P'$.

Soit $P \in E$. Posons $\hat{p} = \deg P$ si $P \neq 0$ et $\hat{p} = 0$ si $P = 0$. Posons $p = \hat{p} + 1$.

Dans les deux cas $p \in \mathbb{N}^*$ et $f^p(P) = P^{(p)} = 0_E$. $\forall P \in E, \exists p \in \mathbb{N}^*, f^p(P) = 0_E$.

Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $f^q(X^q) = 0_E$ or $f^q(X^q) = (X^q)^{(q)} = q!$

Le résultat ne vaut pas en dimension quelconque.

R

Question 22 **ESCP 2007** J. VANNIMENUS

Montrer que la série de terme général $\dfrac{n^p}{2^n}$ converge.

Par croissance comparée : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n^2\frac{n^p}{2^n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(n^{2+p}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=0$ car $\left|\frac{1}{2}\right|<1$

Ainsi $\dfrac{n^p}{2^n}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{n^p}{2^n}\geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2}\geqslant 0$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\dfrac{n^p}{2^n}$ converge.

<u>Exercice</u> : $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Étudier la convergence de la série de terme général $n^\alpha x^n$.

Voici les questions sans préparation 2007 qu'à bien voulu nous fournir l'ESCP. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

QUESTIONS COURTES 2007

Question 1 ESCP 2007 F2

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A = 0$. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

▶ **On commencera par montrer que c'est faux (!) et on traitera l'équation $A^2 + I = 0$.**

Question 2 ESCP 2007 F2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles (s'il y en a).

Montrer que, lorsque $n = p$, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Question 3 ESCP 2007 F1

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $X^n = A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, admet-elle au moins une solution ?

Question 4 ESCP 2007 F0

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1} n!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^{t/2} dt$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n\, n!}$.

Question 5 ESCP 2007 F3

Soit $f(x) = \ln\left(x + \dfrac{1}{1+x}\right)$. Donner le domaine de définition de f.

Démontrer que les dérivées $f^{(n)}(0)$ d'ordre impair sont nulles, lorsque n est un multiple de 3.

▶ **C'est faux. On donnera une condition nécessaire et suffisant sur n pour que $\mathbf{f^{(n)}} = 0$.**

Question 6 ESCP 2007 F1

Soit (u_n) une suite réelle positive et λ un réel strictement positif. L'équivalence suivante est-elle vérifiée ?

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lambda \iff (u_n)^n \sim \lambda^n.$$

Question 7 ESCP 2007 F2

Soit X une variable aléatoire strictement positive de densité f. On suppose que X et $1/X$ admettent une espérance.

Comparer $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et $\dfrac{1}{E(X)}$.

Question 8 ESCP 2007

Soit $n \geqslant 1$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon identiquement distribué indépendant de loi de Poisson de paramètre inconnu $\lambda > 0$

On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $\quad T_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$

À l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

Question 9 ESCP 2007 $\boxed{\textbf{F1}}$

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue dans cette urne une succession de tirages suivant le protocole suivant :

- si on tire une boule rouge, on remet dans l'urne $r > 0$ boules rouges avant le tirage suivant.
- si on tire une boule noire, on remet dans l'urne $s > 0$ boules noires avant le tirage suivant.

On s'arrête lorsque le nombre de boules d'une couleur présente dans l'urne est 10 fois plus grand que le nombre de boules de l'autre couleur.

Écrire une fonction PASCAL permettant de simuler cette expérience.

Question 10 ESCP 2007 $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit A le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(1, 0)$. Soit θ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

À tout $\omega \in \Omega$, on associe le point M_ω du cercle unité d'affixe $e^{i\theta(\omega)}$

Donner l'espérance de la variable aléatoire représentant la distance de A à M_ω.

Question 1 ESCP 2007

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A = 0$. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On commencera par montrer que c'est faux !

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Si $A = 0$, A ne peut pas être semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non ?!

Notons que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible car $0\times 0 - (-1)\times 1 = 1 \neq 0$; 0 n'est pas valeur propre de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Supposons $A^3+A=0$ et A semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Sp}\,A = \mathrm{Sp}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc 0 n'est pas valeur propre de A. A est inversible. Alors $0 = A^{-1}\times 0 = A^{-1}(A^3+A) = A^2+I_2$.

$A^2+I_2=0$. L'exercice ne peut être que :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2+I_2=0$. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice A dans $\mathcal{B}$. Posons $E=\mathbb{R}^2$. Nous avons $u^2+Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit x un élément non nul de E. Montrons que $\tilde{\mathcal{B}} = (x, u(x))$ est une base de E. Il suffit de montrer que la famille est libre.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\alpha x+\beta u(x)=0_E$. $\quad 0_E = u(0_E) = u(\alpha x+\beta u(x)) = \alpha u(x)+\underbrace{\beta u^2(x)}_{-\beta x}$.

Alors $\begin{cases} \alpha x+\beta u(x)=0_E & \leftarrow \times\alpha \\ -\beta x+\alpha u(x)=0_E & \leftarrow \times(-\beta) \end{cases}$

$0_E = \alpha(\alpha x+\beta u(x)) - \beta(-\beta x+\alpha u(x)) = (\alpha^2+\beta^2)x$. Or $x\neq 0_E$, donc $\alpha^2+\beta^2=0$.

Ainsi $\alpha=\beta=0$.

$\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de E et $M_{\tilde{\mathcal{B}}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{cases} u(x) = 0.x+1.u(x) \\ u^2(x) = (-1).x+0.u(x) \end{cases}$

$M_{\mathcal{B}}(u)=A$ et $M_{\tilde{\mathcal{B}}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

R

Question 2 ESCP 2007

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles (s'il y en a).

Montrer que, lorsque $n = p$, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Soit $\lambda \in Sp\ f\circ g$. $\exists x \in \mathbb{R}^p$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ et $f(g(x)) = \lambda x$.

Supposons $\lambda \neq 0$.

$g(f(g(x))) = \lambda g(x)$.

Si $g(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ alors $\lambda x = f(g(x)) = f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^p}$ et $x \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ donc $\lambda = 0$!

Alors $(g \circ f)(g(x)) = \lambda g(x)$ et $g(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$; λ est valeur propre de $g\circ f$.

Si λ est une valeur propre non nulle de $f\circ g$, λ est valeur propre de $g \circ f$.

On montre de même que si λ est une valeur propre non nulle de $g\circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$.

Supposons $n = p$. Montrons que $Sp\ f\circ g = Sp\ g\circ f$. Il suffit de montrer que $Sp\ f\circ g \subset Sp\ g\circ f$!!

Soit $\lambda \in Sp\,(f \circ g)$. Si λ n'est pas nul, d'après ce qui précède, $\lambda \in Sp\ g \circ f$.

Supposons $\lambda = 0$. Supposons que 0 n'est pas valeur propre de $g \circ f$. Alors $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ (dim $\mathbb{R}^n < +\infty$).

Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. $f(x) = 0_E$; $g(f(x)) = 0_E$; $x \in \operatorname{Ker}(g\circ f) = \{0_E\}$.

Donc f est injectif et même bijectif ! $g = (g\circ f) \circ f^{-1}$. g est alors la composée de deux automorphismes de $\mathbb{R}^n$; g est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Alors $f \circ g$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ comme composée de deux automorphismes de $\mathbb{R}^n$ et ainsi $0 \notin Sp\,(f\circ g)$!! Finalement $\lambda = 0$ appartient à $Sp\,(g\circ f)$.

Ceci achève de montrer que $Sp\,(f\circ g) \subset Sp\,(g \circ f)$. La symétrie du problème donne l'égalité.

Question 3 **ESCP 2007**

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $X^n = A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, admet-elle au moins une solution ?

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Un calcul simple montre que $\mathrm{Sp}\, A = \{-8, 1\}$. A est donc diagonalisable car $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et A possède deux valeurs propres distinctes.

$\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$, $P^{-1}AP = D$ où $D = \mathrm{Diag}(-8, 1)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X^n = A \iff P^{-1}X^nP = P^{-1}AP = D \iff (P^{-1}XP)^n = D$.

Ceci suffit pour dire que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}_n = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^n = A\}$ est équipotent à $\mathcal{S}'_n = \{Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid Y^n = D\}$. $\mathrm{card}\, \mathcal{S}_n = \mathrm{card}\, \mathcal{S}'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Cherchons $\mathrm{card}\, \mathcal{S}'_n$. Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}'_n$. $YD = YY^n = Y^{n+1} = Y^nY = DY$.

Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\begin{cases} -8a = -8a \\ -8c = c \\ b = -8b \\ d = d \end{cases}$; $b = c = 0$. Y est diagonale.

Soit $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{S}'_n \iff \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha^n = -8 \\ \beta^n = 1 \end{cases}$.

$\mathcal{S}'_n = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \alpha^n = -8 \text{ et } \beta^n = 1 \right\}$.

1er cas... n est pair. $\mathcal{S}'_n = \emptyset$. $\mathcal{S}_n = \emptyset$. L'équation initiale n'a pas de solution.

2e cas... n est impair. $\begin{cases} \alpha^n = -8 \\ \beta^n = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -8^{1/n} \\ \beta = 1 \end{cases}$. $\mathrm{card}\, \mathcal{S}_n = \mathrm{card}\, \mathcal{S}'_n = 1$.

L'équation initiale admet une solution et une seule.

R

Question 4 **ESCP 2007**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1}n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, e^{t/2} dt$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n\, n!}$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq (1-t)^n e^{t/2} \leq e^{t/2} \leq e^{1/2}$ et $\dfrac{1}{2^{n+1}n!} \geq 0$.

Alors $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq \dfrac{1}{2^{n+1}n!}(1-t)^n e^{t/2} \leq \dfrac{1}{2^{n+1}n!} e^{1/2}$.

En intégrant il vient $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}n!} e^{1/2}$ car $0 \leq 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}n!} e^{1/2}\right) = 0$. Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Pour $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = e^{t/2}$. φ est de classe C^∞ sur $[0,1]$. $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1]$, $\varphi^{(k)}(t) = \dfrac{1}{2^k} e^{t/2}$.

La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-0)^k}{k!}\varphi^{(k)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)\, dt.$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e^{1/2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\frac{1}{2^{n+1}} e^{t/2} dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k k!} + I_n.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} = e^{1/2} - I_n$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k k!} = e^{1/2}$

La série de terme général $\dfrac{1}{2^n n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} = e^{1/2}$, un vrai scoop !

R

Question 5 ESCP 2007 $\boxed{\text{F3}}$

Soit $f(x) = \ln\left(x + \dfrac{1}{1+x}\right)$. Donner le domaine de définition de f.

Démontrer que les dérivées $f^{(n)}(0)$ d'ordre impair sont nulles, lorsque n est un multiple de 3.

► **C'est faux. On donnera une condition nécessaire et suffisant sur n pour que $\mathbf{f^{(n)} = 0}$.**

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1+x \neq 0$ et $x + \frac{1}{1+x} > 0\}$. Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$x + \frac{1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0.$$

Ainsi $\underline{D_f =]-1, +\infty[}$. f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et sa dérivée coïncide avec une fraction rationnelle. Donc f est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$.

Rappel.. $j = e^{i2\pi/3}$ et $j^2 = e^{i4\pi/3}$. $1+j+j^2=0$ et $j^3 = 1$. $j^2 = \bar{j}$.

Soit $x \in]-1,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{(x+1)^2}}{x + \frac{1}{x+1}} = \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+2x}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)(x-j)(x-j^2)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-j} + \frac{1}{x-j^2}$$

Petite décomposition en éléments simples à côté.

Une récurrence simple donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1,+\infty[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{(x+1)^n} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-j)^n} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-j^2)^n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f^{(n)}(0) = (n-1)!\left[(-1)^n - \frac{1}{j^n} - \frac{1}{j^{2n}}\right] = (n-1)!\left[(-1)^n - \frac{j^n + j^{2n}}{j^{3n}}\right] = (n-1)!\left[(-1)^n - j^n - j^{2n}\right]$$

$$\text{Alors } f^{(n)}(0) = \begin{cases} -(n-1)! & \text{si } n \equiv 0\ [6] \\ 0 & \text{si } n \equiv 1\ [6] \\ 2(n-1)! & \text{si } n \equiv 2\ [6] \\ -3(n-1)! & \text{si } n \equiv 3\ [6] \\ 2(n-1)! & \text{si } n \equiv 4\ [6] \\ 0 & \text{si } n \equiv 5\ [6] \end{cases}$$

$\underline{f^{(n)}(0) = 0 \Leftrightarrow n \equiv 1\ [6] \text{ ou } n \equiv 5\ [6]}$.

Question 6 ESCP 2007

Soit (u_n) une suite réelle positive et λ un réel strictement positif. L'équivalence suivante est-elle vérifiée ?

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda \Longleftrightarrow (u_n)^n \sim \lambda^n.$$

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

* Supposons que : $(u_n)^n \sim \lambda^n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{\lambda}\right)^n = 1$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ \left(\frac{u_n}{\lambda}\right)^n > 0$.

Nécessairement $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ \frac{u_n}{\lambda} > 0$ ((u_n) est une suite réelle positive (au sens large !) et $\lambda > 0$).

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n \ln\left(\frac{u_n}{\lambda}\right)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{u_n}{\lambda}\right)^n\right) = 0$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_n}{\lambda}\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\lambda} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda$

$(u_n)^n \sim \lambda^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda$. (1)

* Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $\lambda = 1$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 = \lambda$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\frac{u_n}{\lambda}\right)^n = (u_n)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 1$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{\lambda}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e$. $\left(\frac{u_n}{\lambda}\right)^n \sim e$.

$(u_n)^n \sim e\,\lambda^n$ donc on n'a pas $(u_n)^n \sim \lambda^n$.

<u>La réciproque de (1) est fausse.</u>

R

Question 7 ESCP 2007

Soit X une variable aléatoire strictement positive de densité f. On suppose que X et $1/X$ admettent une espérance.

Comparer $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et $\dfrac{1}{E(X)}$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Il n'est pas restrictif de supposer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]-\infty, 0]$.

D'après le théorème de transfert $E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f(t)\,dt$.

$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{f(t)}\right)\left(\sqrt{t}\sqrt{f(t)}\right) dt$, $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f(t)\,dt$ convergent.

Dans ces conditions "le prolongement de Cauchy-Schwarz" donne :

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{f(t)}\right)^2 dt \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t}\sqrt{f(t)}\right)^2 dt.$$

Alors $1 = 1^2 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f(t)\,dt \int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = E\left(\frac{1}{X}\right) E(X)$.

donc $E\left(\frac{1}{X}\right) \geqslant E(X)$.

__Exercice..__ Reprendre le problème pour une variable aléatoire discrète X prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $E(X)$ et $E\left(\frac{1}{X}\right)$ existent.

R

Question 8 ESCP 2007

Soit $n \geqslant 1$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon identiquement distribué indépendant de loi de Poisson de paramètre inconnu $\lambda > 0$

On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $\quad T_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$

À l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

$E(\overline{X_n}) = \lambda$ et $V(\overline{X_n}) = \dfrac{1}{n^2} \times n \times \lambda = \dfrac{\lambda}{n}$.

Alors $T_n = \dfrac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sqrt{V(\overline{X_n})}}$. Le théorème de la limite centrée indique que (T_n) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite dont nous notons Φ la fonction de répartition.

Φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$ donc $\exists !\ t_\alpha \in \mathbb{R}$, $\Phi(t_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

$t_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ car $1 - \dfrac{\alpha}{2} > \dfrac{1}{2}$ ($\alpha \in]0,1[$!)

Nous supposerons, dans la suite, n assez grand (sic) et nous supposerons alors que T_n suit la loi normale centrée réduite.

$P(|T_n| \leqslant t_\alpha) = 2\Phi(t_\alpha) - 1 = 2\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - \alpha$.

Alors $1 - \alpha = P(|T_n| \leqslant t_\alpha) = P\left(-t_\alpha \leqslant \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant t_\alpha\right) = P\left(\lambda - \dfrac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\lambda} \leqslant \overline{X_n} \leqslant \lambda + \dfrac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\lambda}\right)$

$1 - \alpha = P\left(\left(\sqrt{\lambda} - \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2 - \dfrac{t_\alpha^2}{4n} \leqslant \overline{X_n} \leqslant \left(\sqrt{\lambda} + \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2 - \dfrac{t_\alpha^2}{4n}\right)$

$1 - \alpha \overset{(*)}{=} P\left(\left\{\sqrt{\lambda} - \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{\overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha^2}{4n}}\right\} \cap \left\{\sqrt{\lambda} + \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{\overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha^2}{4n}}\right\}\right)$

(*) pour n assez grand on a $\sqrt{\lambda} - \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \geqslant 0$!

Alors $1 - \alpha = P\left(\left(\sqrt{\overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha^2}{4n}} - \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2 \leqslant \lambda \leqslant \left(\sqrt{\overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha^2}{4n}} + \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2\right)$

$\left[\left(\sqrt{\overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha^2}{4n}} - \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2, \left(\sqrt{\overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha^2}{4n}} + \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2\right]$ est un intervalle de confiance de λ à la confiance $1 - \alpha$ donc au risque α pour n assez grand...

R

Question 9 ESCP 2007

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue dans cette urne une succession de tirages suivant le protocole suivant :

- si on tire une boule rouge, on remet dans l'urne $r > 0$ boules rouges avant le tirage suivant.
- si on tire une boule noire, on remet dans l'urne $s > 0$ boules noires avant le tirage suivant.

On s'arrête lorsque le nombre de boules d'une couleur présente dans l'urne est 10 fois plus grand que le nombre de boules de l'autre couleur.

Écrire une fonction PASCAL permettant de simuler cette expérience.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

```
Program ESCP;

Function tirage(r,s:integer):integer;

var a,b,t:integer;
begin
a:=1;b:=1;t:=0;
repeat
t:=t+1;
if random <(a/(a+b)) then a:=a+r-1
                      else b:=b+s-1;
until (a>=10*b) or (b>=10*a);
tirage:=t;
end;
```

Ici "dans r" (resp. "dans s") il y a la boule tirée.

```
var r,s:integer;
begin
randomize;

r:=2;s:=3;

Writeln('Nb de tirages : ',tirage(r,s));
readln;
end.
```

Question 10 ESCP 2007

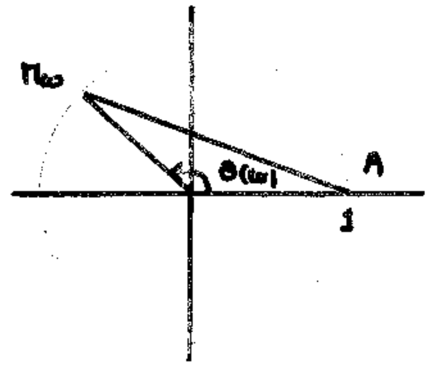
Soit A le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(1,0)$. Soit θ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi,\pi]$.

À tout $\omega \in \Omega$, on associe le point M_ω du cercle unité d'affixe $e^{i\theta(\omega)}$

Donner l'espérance de la variable aléatoire représentant la distance de A à M_ω.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Notons X la variable aléatoire qui à tout ω dans Ω associe la distance de A à M_ω.



Soit $\omega \in \Omega$. Les coordonnées de M_ω sont $\cos\theta(\omega)$ et $\sin\theta(\omega)$.

$X(\omega) = \sqrt{(\cos(\theta(\omega))-1)^2 + (\sin(\theta(\omega)))^2}$

$X(\omega) = \sqrt{\cos^2\theta(\omega) + \sin^2\theta(\omega) + 1 - 2\cos\theta(\omega)}$

$X(\omega) = \sqrt{2(1-\cos\theta(\omega))} = \sqrt{4\sin^2(\theta(\omega)/2)} = 2\left|\sin\dfrac{\theta(\omega)}{2}\right|$.

$X = 2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$. θ prend ses valeurs dans $[-\pi,\pi]$ et admet pour densité la fonction f définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{si } t \in [-\pi,\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$g : t \mapsto 2\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|$ est continue sur $[-\pi,\pi]$.

Alors X possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(t)\,dt$ est absolument convergente. En cas d'existence $E(X) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(t)\,dt$.

$\forall t \in [-\pi,\pi]$, $g(t)f(t) = \dfrac{1}{\pi}\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|$. Donc $t \mapsto g(t)f(t)$ est continue et paire sur $[-\pi,\pi]$. Alors $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(t)\,dt$ est absolument convergente. $E(X)$ existe.

$$E(X) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt \overset{\text{parité}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos t/2}{1/2}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

$\underline{E(X) = \dfrac{4}{\pi}}$.

R