Question 1 **ESCP 2006** Soit (u_n) une suite réelle. Que pensez-vous de l'assertion :

$$u_n \sim \frac{1}{n} \Longleftrightarrow u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n} \quad ?$$

- Supposons $u_n \sim \frac{1}{n}$. $n(u_n+u_{n+1}) = n u_n + \frac{n}{n+1}(n+1)u_{n+1}$.

$\lim_{n\to+\infty}(n u_n) = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\big(n(u_n+u_{n+1})\big) = 1 + 1\times 1 = 2$; $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$.

- La réciproque est fausse.

Posons $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{2p} = \frac{1}{p}$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{2p+1} = 0$.

$\lim_{p\to+\infty}\big((2p+1)u_{2p+1}\big) = 0$ donc $(n u_n)$ ne converge pas vers 1.

Alors (u_n) et $(\frac{1}{n})$ ne sont pas équivalentes.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + u_{n+1}$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty}(n v_n) = 2$.

Il suffit de prouver que $\lim_{p\to+\infty}\big((2p)v_{2p}\big) = 2$ et $\lim_{p\to+\infty}\big((2p+1)v_{2p+1}\big) = 2$.

$\lim_{p\to+\infty}(2p v_{2p}) = \lim_{p\to+\infty}\left(2p \times \frac{1}{p}\right) = 2$ $\left(v_{2p} = u_{2p} + u_{2p+1} = \frac{1}{p}\right)$.

$\lim_{p\to+\infty}(2p+1)v_{2p+1} = \lim_{p\to+\infty}\left((2p+1)\times\frac{1}{p+1}\right) = 2$ $\left(v_{2p+1} = u_{2p+1} + u_{2p+2} = \frac{1}{p+1}\right)$.

Ainsi $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$ mais (u_n) n'est pas équivalente à $(\frac{1}{n})$.

R

Vu en 2004

Question 2 **ESCP 2006** Étudier la suite (u_n) définie par $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln k}{n^2}\right)$.

$$0 \leqslant \ln u_n \overset{(*)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n}.$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \ln u_n = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

(*) $\ln x \leqslant x - 1$ ou $\ln(1+x) \leqslant x$.

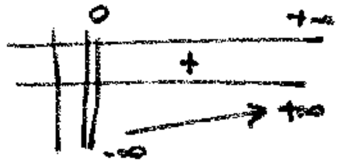
R

Question 3 ESCP 2006 Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un unique y_n solution de l'équation : $\ln x + x = \frac{1}{n}$ Étudier la suite (y_n).

En notant ℓ sa limite, donner un équivalent de $y_n - \ell$ lorsque n tend vers l'infini.

$\varphi(x) = \ln x + x$

$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$



φ définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists !\ y_n \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln y_n + y_n = \frac{1}{n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

(y_n) est décroissante(*) et converge vers $\ell = \varphi^{-1}(0)$. $\ln \ell + \ell = 0$.

$y_n - \ell = -\ln y_n + \frac{1}{n} + \ln \ell = \frac{1}{n} - \ln \frac{y_n}{\ell} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{y_n - \ell}{\ell}\right)$.

$\ln\left(1 + \frac{y_n-\ell}{\ell}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{y_n - \ell}{\ell}$; $\ln\left(1 + \frac{y_n-\ell}{\ell}\right) = (1+\varepsilon_n)\frac{y_n-\ell}{\ell}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

Alors $y_n - \ell = \frac{1}{n} - (1+\varepsilon_n)\left(\frac{y_n-\ell}{\ell}\right)$.

Donc $y_n - \ell = \dfrac{1/n}{1 + \frac{1+\varepsilon_n}{\ell}}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1+\varepsilon_n}{\ell}\right) = 1 + \frac{1}{\ell} = \frac{\ell+1}{\ell}$

Alors $y_n - \ell \sim \frac{\ell}{\ell+1} \times \frac{1}{n}$.

(*) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et φ^{-1} est croissante.

R

Question 4 **ESCP 2006** Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on écrit en base 10 le nombre $\sum_{k=1}^{n} k$ et on note u_n son chiffre des unités.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est périodique, 20 étant une période de cette suite.

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} k$$

$$\alpha_{n+20} - \alpha_n = \sum_{k=n+1}^{n+20} k = 20 \times \frac{n+1+n+20}{2} = 20n + 210.$$

$$\alpha_{n+20} - \alpha_n = 10(2n+21).$$

Le chiffre des unités de α_{n+20} est le même que celui de α_n.

$$u_{n+20} = u_n.$$

Question 5 **ESCP 2006** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $v_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{dt}{1+t^3}$.

Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

- $0 \leqslant v_n \leqslant \int_0^{u_n} 1\,dt = u_n$. $0 \leqslant v_n \leqslant u_n$. Si la série de terme général u_n converge alors la série de terme général v_n converge.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.

φ définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, L[$ où $L = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$. (*)

$v_n = \varphi(u_n)$; $u_n = \varphi^{-1}(v_n)$.

Supposons que la série de terme général v_n converge.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^{-1}(v_n) = \varphi^{-1}(0) = 0$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. $0 \leqslant \frac{u_n}{1+u_n^3} \overset{\triangle}{\leqslant} \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+t^3} = v_n$.

Alors la série de terme général $\frac{u_n}{1+u_n^3}$ converge.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $u_n \sim \frac{u_n}{1+u_n^3}$.

Ainsi la série de terme général u_n converge (règle de comparaison des séries à termes positifs.

(*) φ est clairement continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

$\triangle$ $\forall t \in [0, u_n]$, $\frac{1}{1+t^3} \geqslant \frac{1}{1+u_n^3}$.

Question 6 **ESCP 2006** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que l'on a : $a_{i,j} = 1$ si $i = j+1$ ou $i = j-1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon)

Q1. Soit λ un scalaire. Que peut-on dire du rang de $A - \lambda I_n$?

Q2. Montrer que A admet exactement n valeurs propres réelles.

$(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q1 $\mathrm{rg}(A-\lambda I_n) = \dim \mathrm{Vect}(\underbrace{-\lambda E_1+E_2}_{U_1}, \underbrace{E_1-\lambda E_2+E_3}_{U_2}, \dots, \underbrace{E_{n-1}-\lambda E_n}_{U_n})$.

Montrons que $(U_1, U_2, \dots, U_k)$ est libre pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ par récurrence.

→ C'est clair pour $k = 1$

→ Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![1, n-2]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i U_i = 0$

La composante de E_{k+2} dans $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i U_i$ est α_{k+1}.

Alors $\alpha_{k+1} = 0$. Ainsi $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i U_i = 0$. L'hypothèse de récurrence donne

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Ceci achève la récurrence.

$(U_1, U_2, \dots, U_{n-1})$ est libre.

Ainsi $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \in \{n-1, n\}$

Donc $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = 0$ ou 1.

Alors les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A est symétrique donc A est diagonalisable.

Alors nécessairement A admet n valeurs propres réelles 2 à 2 distinctes.

R

Question 7 **ESCP 2006** Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

$\lambda \in Sp\, A \Leftrightarrow (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-\lambda = 2 \\ \text{ou} \\ 3-\lambda = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 5 \end{array} \right.$

$\lambda \in Sp\,(B) \Leftrightarrow -\lambda(6-\lambda) + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 5 \end{cases}$

A et B sont toutes les deux semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Donc A et B sont semblables.

R

Question 8 **ESCP 2006** Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer que $A + I_n$ ou $A - I_n$ est inversible.

Supposons $A + I_n$ et $A - I_n$ non inversibles.

Alors $1 \in Sp\, A$ et $-1 \in Sp\, A$.

Or $0 \in Sp\, A$ et $\dim SEP(A,0) = n-1$ car $rg\, A = 1$.

Ainsi $n \geqslant \sum_{\lambda \in Sp\, A} \dim SEP(A,\lambda) \geqslant \dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,1) + \dim SEP(A,-1) \geqslant n-1+1+1 = n+1$

Ceci est impossible. Ainsi $A + I_n$ ou $A - I_n$ est inversible !

Question 9 ESCP 2006 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et u et v deux endomorphismes de E.

On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est un automorphisme de E. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$.

$E = (u+v)(E) \subset u(E) + v(E)$

$\dim E \leqslant \dim(u(E) + v(E)) = \dim u(E) + \dim v(E) - \dim(u(E) \cap v(E))$.

$\dim E \leqslant \dim u(E) + \dim v(E) = \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

$u \circ v = 0$; $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$; $\dim \operatorname{Im} v \leqslant \dim \operatorname{Ker} u$.

Alors $\operatorname{rg} v \leqslant \dim E - \operatorname{rg} u$; $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant \dim E$.

Finalement $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = \dim E$.

R

Question 10 **ESCP 2006** Montrer que $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Existe-il un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on ait $\langle A, P\rangle = P(0)$? *(On pourra considérer les polynômes $P_n = \sqrt{n}(1-X)^n$)*

- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ produit scalaire !

- Supposons que A existe et posons $M = \max_{t\in[0,1]} |A(t)|$, $P_n = \sqrt{n}\,(1-X)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} = P_n(0) = \langle A, P_n\rangle = \int_0^1 A(t)P_n(t)\,dt \leq \left|\int_0^1 A(t)P_n(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |A(t)||P_n(t)|\,dt$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \leq M\int_0^1 P_n(t)\,dt = M\sqrt{n}\int_0^1 (1-t)^n\,dt$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq M\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{n+1}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$: $1 \leq 0$!

Question 11 **ESCP 2006** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}^+$ et une espérance m_1 non nulle. On note F la fonction de répartition de X et on définit la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-F(x)}{m_1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que g est une densité de probabilité.

- g est positive sur $\mathbb{R}$.
- g est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- $\int_{-\infty}^0 g(x)\,dx$ existe et vaut 0.

$$\int_0^A g(t)\,dt = \frac{1}{m_1}\int_0^A (1-F(t))\,dt \overset{IPP}{=} \frac{1}{m_1}\left(\left[t(1-F(t))\right]_0^A - \int_0^A t(-f(t))\,dt\right)$$

$$\int_0^A g(t)\,dt = \frac{1}{m_1}A(1-F(A)) + \frac{1}{m_1}\int_0^A t f(t)\,dt.$$

Or $0 \leqslant A(1-F(A)) = A\int_A^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \int_A^{+\infty} t f(t)\,dt$ et

$\lim\limits_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} t f(t)\,dt = 0$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \big(A(1-F(A))\big) = 0$.

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A g(t)\,dt = 0 + \frac{1}{m_1}\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = 1$.

$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ existe et vaut 0. $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ existe et vaut 1.

g est une densité de probabilité.

<u>**Exercice..**</u> Montrer que l'on a bien $m_1 \neq 0$!

R

Question 12 **ESCP 2006** Soit n et m deux entiers naturels non nuls, deux urnes U_1 et U_2 et un stock de $n+m$ boules.

A chaque étape, indépendante des précédentes, on choisit une urne, l'urne U_1 étant choisie avec la probabilité p et l'urne U_2 étant choisie avec la probabilité q et on met une boule dans l'urne choisie.

On s'arrête lorsque l'urne U_1 contient n boules ou lorsque l'urne U_2 contient m boules. On note X le nombre d'étapes ainsi effectuées.

Écrire une fonction en Pascal permettant de simuler la variable aléatoire X.

```
function Simule (n,m : integer; p : real) : integer;

Var C1, C2 : integer;

begin
C1 := 0; C2 := 0;
REPEAT
If random <p then C1 := C1+1
                else C2 := C2+1;
UNTIL (C1=n) OR (C2=m);
Simule := C1+C2;
End;
```

```
program ESCP_QNP_12;

function simule(n,m:integer;p:real):integer;

var C1,C2:integer;

begin
C1:=0;C2:=0;

repeat

if random<p then C1:=C1+1
             else C2:=C2+1;
until (C1=n) or (C2=m);

simule:=C1+C2;

end;
```

Question 13 **ESCP 2006** Soit X une variable aléatoire réelle de densité f continue sur $\mathbb{R}$ et admettant une espérance. On suppose qu'il existe b tel que pour tout x réel $f(b-x)=f(x)$. Quelle est l'espérance de X ?

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} t f(b-t)\,dt=\int_{+\infty}^{-\infty}(b-u)f(u)(-du)=\int_{-\infty}^{+\infty}(b-u)f(u)\,du$$

$u=b-t$

$E(X)=b-E(X)$

$E(X)=\frac{b}{2}$.

Question 14 ESCP 2006 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et F sa fonction de répartition. On suppose que :

- F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- X admet une espérance $E(X)$.
- $\lim_{x \to +\infty} x\,(1 - F(x) - F(-x)) = 0$.

Montrer que $E(X) = \int_0^{+\infty} [1 - F(t) - F(-t)]\, dt$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = F'(x)$. f est densité de X.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$ et $v(t) = 1 - F(t) - F(-t)$.

u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ (car F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$).

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = -f(t) + f(-t)$.

Ceci justifie l'intégration par parties ~~suivante~~

Soit A un élément de $\mathbb{R}^+$.

$$\int_0^A (1 - F(t) - F(-t))\, dt = \Big[t(1 - F(t) - F(-t))\Big]_0^A - \int_0^A t\,[-f(t) + f(-t)]\, dt.$$

$$\int_0^A (1 - F(t) - F(-t))\, dt = A(1 - F(A) - F(-A)) + \int_0^A t f(t)\, dt - \int_0^A t f(-t)\, dt. \quad \downarrow x = -t$$

$$\int_0^A (1 - F(t) - F(-t))\, dt = A(1 - F(A) - F(-A)) + \int_0^A t f(t)\, dt - \int_0^{-A} (-x) f(x) (-dx).$$

$$\int_0^A (1 - F(t) - F(-t))\, dt = A(1 - F(A) - F(-A)) + \int_0^A t f(t)\, dt + \int_{-A}^0 x f(x)\, dx$$

$$\int_0^A (1 - F(t) - F(-t))\, dt = A(1 - F(A) - F(-A)) + \int_{-A}^A t f(t)\, dt.$$

$E(X)$ existe donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ converge. Alors $\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^A t f(t)\, dt = E(X)$.

De plus $\lim_{A \to +\infty} (A(1 - F(A) - F(-A))) = 0$

Alors $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A (1 - F(t) - F(-t))\, dt = E(X)$.

Donc $\int_0^{+\infty} (1 - F(t) - F(-t))\, dt$ converge et vaut $E(X)$.

Question 15 ESCP 2006 Une urne contient n boules rouges et n boules noires. On retire les boules de l'urne deux par deux jusqu'à ce que l'urne soit vide, à chaque rang du tirage toutes les poignées de deux boules possibles étant supposées équiprobables.

Quelle est la probabilité que tout au long de l'épreuve on n'obtienne que des paires bicolores ?

A est l'événement on obtient que des paires bicolores

A_k est l'événement on obtient une paire bicolore à la $k$ième étape.

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

$$= P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \cdots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k) \cdots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

$$= P(A_1) \prod_{k=2}^{n} P_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)$$

$$P(A_1) = \frac{n}{\binom{2n}{2}} = \frac{2n}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}.$$

$$P_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k) = \frac{n-(k-1)}{\binom{2(n-(k-1))}{2}} = \frac{2(n-(k-1))}{2(n-(k-1))(2(n-(k-1))-1)} = \frac{1}{2(n-k+1)-1} = \frac{1}{2n-2k+1}$$

$$P(A) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2n-2k+1} = \frac{1}{(2n-1)(2n-3)\times\dots\times 3\times 1} = \frac{2^n\, n!}{(2n)!}.$$

R

Question 16 **ESCP 2006** $\boxed{\textbf{F1}}$ *(élève)*

A et B sont deux événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que $P(A \cap B) \geqslant \text{Max}\left(P(A) - P(\overline{B}), P(B) - P(\overline{A})\right)$. Quand y a-t-il égalité ?

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \leqslant P(A \cap B) + P(\overline{B})$; $P(A \cap B) \geqslant P(A) - P(\overline{B})$.

Par symétrie $P(A \cap B) \geqslant P(B) - P(\overline{A})$.

Alors $P(A \cap B) \geqslant \text{Max}\left(P(A) - P(\overline{B}), P(B) - P(\overline{A})\right)$.

Supposons que $P(A \cap B) = \text{Max}\left(P(A) - P(\overline{B}), P(B) - P(\overline{A})\right)$.

Alors $P(A \cap B) = P(A) - P(\overline{B})$ ou $P(A \cap B) = P(B) - P(\overline{A})$.

$P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) - P(\overline{B})$ ou $P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(B) - P(\overline{A})$.

Donc $P(A \cup B) = 1$. Réciproquement si $P(A \cup B) = 1$.

Alors $P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) - P(\overline{B})$ et (!) $P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(B) - P(\overline{A})$.

Donc $P(A \cap B) = P(A) - P(\overline{B})$ et $P(A \cap B) = P(B) - P(\overline{A})$.

Alors $P(A \cap B) = \text{Max}\left(P(A) - P(\overline{B}), P(B) - P(\overline{A})\right)$.

⚠ En fait $P(A) - P(\overline{B}) = P(B) - P(\overline{A})$!!!

R

Question 17 **ESCP 2006** $\boxed{\textbf{F 1}}$ (*élève*)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont n réels.

Trouver le reste dans la division de $P = \prod_{k=1}^{n} \big(\cos(a_k) + \sin(a_k)\, X\big)$ par $Q = X^2 + 1$.

Soient S et R le quotient et le reste dans la division de P par Q.

$P = QS + R$ et $\deg R < 2$. $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $R = aX + b$.

Or $Q(i) = Q(-i) = 0$ donc $\begin{cases} ai + b = R(i) = P(i) \\ -ai + b = R(-i) = P(-i) \end{cases}$.

Alors $a = \dfrac{P(i) - P(-i)}{2i}$ et $b = \dfrac{P(i) + P(-i)}{2}$.

$a = \dfrac{P(i) - \overline{P(i)}}{2i} = \operatorname{Im} P(i)$ et $b = \dfrac{P(i) + \overline{P(i)}}{2} = \operatorname{Re}(P(i))$.

$P(i) = \prod_{k=1}^{n} (\cos a_k + i \sin a_k) = \prod_{k=1}^{n} e^{i a_k} = e^{i \sum_{k=1}^{n} a_k} = \cos\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + i \sin\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$

Alors $R = \sin\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) X + \cos\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$

R

Question 18 ESCP 2006 $\boxed{\text{F 1}}$ *(élève)*

X est une variable aléatoire à densité possèdant un moment d'ordre 2.

Comparer $V(|X|)$ et $V(X)$.

X possède un moment d'ordre 2. $E(X^2)$ et $E(|X|^2)$ existent.

$V(X)$ et $V(|X|)$ existent.

$X \leqslant |X|$ et $-X \leqslant |X|$ donc $E(X) \leqslant E(|X|)$ et $-E(X) \leqslant E(|X|)$.

Alors $0 \leqslant |E(X)| \leqslant E(|X|)$; $(E(X))^2 \leqslant (E(|X|))^2$.

Alors $V(|X|) = E(|X|^2) - (E(|X|))^2 \leqslant E(|X|^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = V(X)$

$V(|X|) \leqslant V(X)$.