Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECG Maths appliquées

Juin 2024

Dans leur grande majorité, les candidats montrent de belles qualités de logique et de présentation. On remarque une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 1 à 20.

Les candidats les plus faibles ont montré d'importantes lacunes dans la connaissance du cours ainsi que de grosses faiblesses en calcul.

A contrario, les meilleurs candidats étaient brillants dans leurs connaissances, faisaient preuve de finesse dans leurs raisonnements et démontraient un certain recul sur les concepts étudiés.

La moyenne est de 10,44 et l'écart-type est de 4,21.

Le jury aimerait insister sur les points suivants.

- Dans la continuité de la session précédente, et toujours suite à la réforme des programmes, l'informatique a désormais une place plus importante à l'oral. Toutes les planches comportaient une question d'informatique faisant intervenir soit le langage Python, soit du SQL. Cette évolution semble de mieux en mieux intégrée par les candidats : si on rencontrer encore quelques candidats qui ont visiblement négligé cette partie du programme, ils sont de moins en moins nombreux. Cela est particulièrement vrai en ce qui concerne le SQL : alors que l'an dernier le jury avait pu constater que cette partie du programme informatique était celle à avoir fait l'objet du plus d'impasse, c'était nettement moins le cas cette année.
  Il va sans dire que les quelques candidats qui avaient choisi de faire manifestement l'impasse sur l'informatique ont été sanctionnés, et d'autant plus quand leur prestation sur la partie proprement mathématique de l'oral faisait apparaître que cette impasse était un choix délibéré.
  Les candidats doivent s'attendre pour l'année prochaine, et les suivantes, à ce que l'informatique garde la place qu'elle occupe désormais. Chaque planche proposée aux candidats continuera à comporter au moins une question concernant le programme d'informatique.
- Le jury apprécie particulièrement les candidats attentifs à la cohérence de leurs résultats. Cela est notamment le cas quand cela permet, par exemple, à des candidats de repérer des erreurs de calcul. Des candidats ayant ainsi d'eux-mêmes corriger leurs erreurs ont été récompensés.
- Les candidats doivent savoir citer précisément les résultats de leur cours avec toutes les hypothèses nécessaires. A ce propos, le jury a été frappé notamment du manque de rigueur avec lequel plusieurs candidat ont cité un « théorème du point fixe », à propos des limites de suites récurrentes, qui apparaît bien dans le programme officiel mais sans se voir attribuer ce nom. Quand le jury a demandé aux candidats quel résultat ils désignaient de la sorte, trop peu ont été capables de donner une réponse suffisamment précise, plusieurs ont notamment omis l'hypothèse de continuité, pourtant essentielle ici.
- Le jury attend des candidats qu'ils soient en mesure d'illustrer leurs raisonnements par des schémas, et qu'ils soient également capables de tracer rapidement l'allure du graphe d'une fonction.
- Les candidats ne doivent pas oublier qu'il s'agit d'un oral. Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation. Le jury est extrêmement attentif à la qualité du dialogue qu'il noue

avec le candidat. Il est fortement conseillé d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Des candidats peuvent se voir attribuer une bonne note alors qu'ils ne traitent pas un grand nombre question, tandis que d'autres, ayant l'impression d'avoir pourtant traité tout le sujet, se retrouvent avec une note décevante car leur exposition est trop brouillonne et manque de la rigueur exigible dans le maniement des concepts.

- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral. Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons ceux, nombreux, qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.

L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de rattraper des premières parties d'oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à un attendu.

SUJET Maths Appliquées 1

Exercice principal Maths Appliquées 1

On note I_4 la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
On définit l'ensemble $\mathcal{E}$ par :

$$\mathcal{E} = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Question de cours : Énoncer la formule du binôme de Newton pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Justifier que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et en donner une base.
3. Écrire une fonction Python qui prend en entrée une matrice M de taille 4 et renvoie un message permettant de savoir si M appartient ou non à $\mathcal{E}$.
4. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $M_{a,b} \in \mathcal{E}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une expression matricielle de $M_{a,b}^k$ en fonction de k, a et b.
5. Justifier que les matrices de $\mathcal{E}$ sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible telle que :
$$\forall M \in \mathcal{E}, \quad M = PDP^{-1},$$
où D est une matrice de taille 4 diagonale à déterminer. On donnera une expression matricielle de P.

Solution :

1. ECG 2 : page 7.
2. $\mathcal{E} = \text{Vect}\left(I_4, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}\,(I_4, J)$, où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3.
```python
import numpy as np
def Appartenance(M):
        N = (M[0,0]-M[0,1])*np.eye(4) + M[0,1]*np.ones((4,4))
        compteur = 0
        for i in range(4):
                for j in range(4):
                        if M[i,j] == N[i,j]:
                                compteur = compteur +1
        if compteur == 16 :
                print('La matrice est dans E')
        else:
                print('La matrice n\'est pas dans E')
```
4. Soient $M \in \mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe deux réels a et b tels que $M = (a-b)I_4 + bJ$. Comme I_4 et J commutent, la formule du binôme de Newton donne :
$$M^k = ((a-b)I_4 + bJ) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (a-b)^{k-\ell} b^\ell J^\ell.$$
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on montre que $J^n = 4^{n-1}J$. Ainsi :
$$M^k = (a-b)^k I_4 + \sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell} (a-b)^{k-\ell} b^\ell 4^{\ell-1} J = (a-b)^k I_4 + \frac{1}{4}((a+3b)^k - (a-b)^k)J.$$

5. M est symétrique (à coefficients réels) donc diagonalisable.

On remarque que $M-(a-b)I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, est une matrice de rang 1.

Puis, en notant C_k la k-ième colonne de $M-(a-b)I_4$ pour $k \in [\![1,4]\!]$, on remarque que $C_1-C_2=0, C_1-C_3=0, C_1-C_4=0$, ce qui justifie que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont trois vecteurs propres de M associés à la valeur propre $a-b$.

Puis, $C_1+C_2+C_3+C_4 = (a+3b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc le vecteur $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $a+3b$.

La famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est formée de $4 = dim(\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}))$ vecteurs et est libre, puisque la résolution de $\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 + \delta X_4 = 0$ pour $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ donne $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

On a donc trouvé un base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M. On peut choisir :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+3b \end{pmatrix}.$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 1

On se donne $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires indépendantes suivant toutes une loi normale centrée réduite, $x \in \mathbb{R}$ un réel, et $\alpha \in \,]\,0\,;1\,[$.

On étudie le processus aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$X_0 = x$$

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \alpha X_n + \epsilon_n$$

.

Étudier la convergence en loi de X_n.

Solution :

On remarque d'abord que $X_n = \alpha^n x + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-i-1}\epsilon_i$

Donc, par stabilité par opération affine et par somme de variables indépendentes des lois normales :

$$X_n \sim \mathcal{N}\left(\alpha^n x, \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{2i}\right)$$

ie

$$X_n \sim \mathcal{N}\left(\alpha^n x, \frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}\right)$$

Donc, si G est une variable normale centrée réduite, $t \in \mathbb{R}$, en notant $\sigma_n = \sqrt{\frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}}$ et $\sigma = \sqrt{\frac{1}{1-\alpha^2}}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n \leqslant t) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_n - \alpha^n x}{\sigma_n} \leqslant \frac{t-\alpha^n x}{\sigma_n}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(G \leqslant \frac{t-\alpha^n x}{\sigma_n}\right) \\
&\to_n \mathbb{P}\left(G \leqslant \frac{t}{\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sigma G \leqslant t\right)
\end{aligned}$$

D'où la convergence de X_n vers une loi normale centrée de variance σ^2.

Question supplémentaire :

On étudie maintenant le processus aléatoire suivant :

$$Y_0 = x$$

et pour tout n,

$$Y_{n+1} = (1 - n^{-\frac{1}{2}})Y_n + \epsilon_n$$

. Que peut-on dire de la convergence en loi de Y_n ?

On pourra s'aider de l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, qu'on ne demande pas de redémontrer.

CORRECTION QSUP :

posons $\beta_n = \left(1 - n^{-\frac{1}{2}}\right)$, $\bar{\beta_n} = \prod_{i=1}^{n} \beta_i$.

On a, de même

$$Y_n = \bar{\beta}_n x + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\bar{\beta}_{n-1}}{\bar{\beta}_i} \epsilon_i$$

$$Y_n \sim \mathcal{N}\left(\bar{\beta_n} x, \bar{\beta_n}^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\bar{\beta}_i^2}\right)$$

$\bar{\beta_n}$ est décroissante et positive, donc converge vers une limite que l'on note β

De plus, par passage au logarithme, et étude de la série téléscopique de terme général $(\ln \bar{\beta}_n - \ln \bar{\beta}_{n-1}) = \ln\left(1 - n^{-\frac{1}{2}}\right) \leqslant -n^{-\frac{1}{2}}$.

On a

$$\begin{aligned}
\log \bar{\beta}_n &= \sum_{i=1}^{n} (\ln \bar{\beta}_i - \ln \bar{\beta}_{i-1}) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} i^{-\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \int_1^n t^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t \\
&= 2n^{\frac{1}{2}} \\
\bar{\beta}_n &\leqslant e^{2n^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

D'où la convergence par comparaison de la série (à termes positifs) de terme général $\frac{1}{\bar{\beta}_n^2}$, d'où la convergence en loi de même qu'au dessus.

SUJET Maths Appliquées 2

Exercice principal Maths Appliquées 2

Valeur numérique utile : si Φ désigne la fonction de répartition d'une variable suivant une loi normale centrée réduite, alors $\Phi(1,96) \approx 0,975$

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Énoncer le théorème central limite.
2. (a) On admet que le polynôme $Q = X^3 - 2X^2 - X + 2$ est un polynôme annulateur de A. Déterminer le spectre de A et les sous-espaces propres de A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Soient $X_1, \cdots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. On note : $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $M_n^\star = \frac{M_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$.
   (a) Déterminer l'espérance et la variance de la variable M_n
   (b) Donner, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, l'approximation de la probabilité $\mathbb{P}([-\alpha < M_n^\star < \alpha])$ donnée par le théorème central limite.
   (c) Montrer que, pour n suffisamment grand, $\mathbb{P}\left(p \in \left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; M_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 95\%$.
4. On note N le nombre de vecteurs propres de A dont les cœfficients sont des entiers de $[\![-5, 5]\!]$.
   (a) On admet qu'on dispose d'une fonction en langage Python `vecteurs_propres` prenant en argument un vecteur `u` et renvoyant le booléen `True` si `u` est un vecteur propre de A et `False` sinon. Expliquer comment le programme suivant permet d'estimer la valeur de N :

```python
import numpy.random as rd

def simul():
        u = [ rd.randint ( -5 ,6) for k in range (3) ]
        return vecteurs_propres (u)

n = 10000
nb = 0
for k in range (n):
        if simul ():
                nb += 1
print (round(nb/n *11**3))
```

   Avec `round(x)` = l'entier le plus proche de x.
   (b) Montrer que si n est choisi suffisamment grand et supérieur à 4×11^6, on est alors sûr à 95 % de la valeur affichée.
   (c) En exécutant le programme pour 4×11^6, la valeur qui s'affiche est 22. Calculer la valeur exacte de N et commenter le résultat obtenu par cette estimation.

Solution :

1. Cours : programme de seconde année p. 20
2. (a) $Q = (X+1)(X-1)(X-2)$ donc les éventuelles valeurs propres de A sont parmi -1, 1 et 2. Montrons que ce sont en effet les trois valeurs propres de A : Posons $E_{-1} = \mathrm{Ker}(A+I)$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 4x+y+z & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \\ -3x & = & 0 \end{array} \right.$$

   et ainsi

   $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, de manière analogue : $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

   On a bien $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1, 2\}$ et E_{-1}, E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés.

   (b) Les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (famille libre de 3 vecteurs en dimension 3) donc A est diagonalisable.
3. (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ donc $\mathbb{E}(X_k) = p$ et $\mathbb{V}(X_k) = p(1-p)$.

   Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(M_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = p$

   Par indépendance des X_k, $\mathbb{V}(M_n) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = \dfrac{p(1-p)}{n}$ donc $\sigma(M_n) = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

   (b) Ainsi $M_n^\star = \dfrac{M_n - \mathbb{E}(M_n)}{\sigma(M_n)}$ est la variable centrée réduite associée à M_n.

   Les variables X_k étant indépendantes et de même loi, d'après le théorème central limite, $M_n^\star$ suit approximativement la loi $\mathcal{N}(0,1)$, dès lors, pour $\alpha > 0$, $\mathbb{P}(-\alpha < M_n^\star < \alpha) \approx \Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha) = 2\Phi(\alpha) - 1$

   (c) $\mathbb{P}\left(p \in \left[M_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; M_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) = \mathbb{P}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant M_n^\star \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$

   Or comme $p \in]0;1[$, $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$, on a $2 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{p(1-p)}}$, donc

   $\mathbb{P}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant M_n^\star \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geqslant \mathbb{P}(-2 \leqslant M_n^\star \leqslant 2)$

   Et $\mathbb{P}(-2 \leqslant M_n^\star \leqslant 2) = 2\Phi(2) - 1 \geqslant 2\Phi(1,96) - 1 \approx 0,95$ car Φ est croissante sur $\mathbb{R}$.

   On obtient ainsi le résultat demandé.
4. (a) $\mathrm{card}([\![-5;5]\!]^3) = 11^3$ donc $N = p \times 11^3$

   `simul` modélise l'épreuve de de Bernoulli consistant à choisir au hasard un vecteur (à coordonnées entières) de $[\![-5;5]\!]^3$

   On réalise $n = 10000$ fois dans des conditions indépendantes cette expérience (boucle `for`).

   Si on note X_k la variable aléatoire valant 1 si le vecteur tiré est un vecteur propre de A et 0 sinon, le nombre `nb/n` affiché en sortie de boucle correspond à une réalisation de $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, estimateur sans biais de p. Ainsi `nb/n` donne une estimation de p.

   `nb/n*11**3` arrondi à l'entier le plus proche donne ainsi une estimation de N.

   (b) D'après la question 3(c) : $\mathbb{P}\left(11^3 M_n - \dfrac{11^3}{\sqrt{n}} \leqslant N \leqslant 11^3 M_n + \dfrac{11^3}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$

   Si $n \geqslant 4 \times 11^6$ alors $\dfrac{11^3}{\sqrt{n}} \leqslant 0,5$ donc $\mathbb{P}\left(11^3 M_n - 0,5 \leqslant N \leqslant 11^3 M_n + 0,5\right) \geqslant 0,95$

   Ainsi $\mathbb{P}\left(-0,5 \leqslant N - 11^3 M_n \leqslant 0,5\right) \geqslant 0,95$ donc l'arrondi de $11^3 \times M_n$ calculé par le programme fournit bien une estimation à 95 %.

5. Calculons la valeur exacte de N afin de la comparer à 22 :

D'après l'étude réalisée dans 2.(a), les vecteurs propres de A à coefficients entiers sont de la forme $(0, k, -k)$ ou $(-2k, k, 3k)$ ou $(k, 0, -k)$ avec $k \in \mathbb{Z}^{\star}$.

Comme il y a 10 entiers non nuls compris entre -5 et 5, on dénombre :

— 10 vecteurs propres $(0, k, -k)$ éléments de $[\![-5, 5]\!]^3$

— 10 vecteurs propres $(k, 0, -k)$ éléments de $[\![-5, 5]\!]^3$

Reste à dénombrer ceux qui sont de la forme $(-2k, k, 3k)$ avec $k \neq 0$.

Il faut que l'on ait : $\begin{cases} 0 < |2k| \leqslant 5 \\ 0 < |k| \leqslant 5 \\ 0 < |3k| \leqslant 5 \end{cases}$

Les seuls entiers k qui conviennent sont -1 et 1.

Il y a donc 2 vecteurs propres de la forme $(-2k, k, 3k)$ qui appartiennent à $[\![-5, 5]\!]^3$.

On en déduit que $N = 10 + 10 + 2 = 22$ ce qui correspond à la valeur obtenue par estimation dans la question précédente.

Exercice sans préparation Maths Appliquées 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée vérifiant la propriété :

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2} \geqslant 0.$$

Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_{n+1}-u_n) = 0$.

On pourra poser $v_n = u_n - u_{n+1}$.

Solution :

- La propriété s'écrit $v_n \geqslant v_{n+1}$. Ainsi la suite (v_n) est décroissante.
- Montrons que (v_n) est positive. S'il existe n_0 tel que $v_{n_0} < 0$, $v_n \leqslant v_{n_0} < 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Autrement dit $u_{n+1} \geqslant u_n + |v_{n_0}|$ pour $n \geqslant n_0$. Il en résulte que (u_n) n'est pas majorée, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.
- Puisque (v_n) est positive, la suite (u_n) est décroissante. Elle est minorée. En conséquence elle converge. On note ℓ sa limite. On peut noter que (v_n) converge vers 0.
- On note maintenant que pour tous $n \geqslant p \geqslant 1$, on a

$$(n+1-p)v_n \leqslant \sum_{k=p}^{n} v_k = \sum_{k=p}^{n}(u_k - u_{k+1}) = u_p - u_{n+1} \leqslant u_p - \ell.$$

  D'où $nv_n \leqslant (p-1)v_n + (u_p - \ell)$.
- Pour $\varepsilon > 0$, on fixe p tel que $(u_p - \ell) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

  On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(p-1)v_n = 0$, il existe donc N tel que pour tout $n \geqslant N$, $(p-1)v_n \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

  Ainsi, pour $n \geqslant N$, $0 \leqslant nv_n \leqslant \varepsilon$: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n = 0}$

SUJET Maths Appliquées 3

Exercice principal Maths Appliquées 3

A et B sont deux sacs qui contiennent chacun deux boules portant le numéro 1 ou le numéro 0. Une expérience consiste à tirer simultanément une boule de chaque sac et à la replacer dans l'autre sac.
On part des sacs A_0 contenant deux boules marquées 1 et B_0 contenant deux boules marquées 0 et on définit par récurrence la suite de sacs A_n, B_n par : l'expérience appliquée à A_n, B_n donne A_{n+1}, B_{n+1}.
S_n [resp. T_n] est la variable aléatoire égale à la somme des numéros sur les boules de A_n [resp. B_n] $(n \in \mathbb{N})$.

1. (a) **Cours.** Loi d'une variable aléatoire discrète finie.
   (b) i. Ecrire le code d'une fonction `echange(A,B)` qui prend en entrée les sacs A et B, représentés sous forme de liste à deux éléments, et qui renvoie la nouvelle composition des sacs après échange aléatoire d'une boule de A et d'une boule de B.
   ii. Ecrire le code d'une fonction `simuleS(n)` qui prend en entrée un entier `n` et réalise une simulation de la variable aléatoire S_n.
2. (a) Que valent S_0 et S_1 ? Expliciter la loi de S_2.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$. Expliciter la loi de S_n en fonction de p_n et calculer l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$. Ce résultat était-il prévisible ? Comparer $\mathrm{Var}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(T_n)$. Exprimer $\mathrm{Var}(S_n)$ en fonction de p_n.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n, et en déduire p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter la loi de S_n en fonction de n.
3. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, comment le produit $M.E$ se déduit-il de M ? Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n.E = A^n$.
   (b) En utilisant les résultats précédents, calculer A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Solution :

1. (a) **Cours.** cf. programme $1^{\text{ière}}$année, 2^{nd}semestre, IV . 3 . a.
   (b) *Fonction echange* :
   . Pour simuler les tirages aléatoires, on utilise la fonction randint du module random :
   random.randint(a, b)
   Renvoie un entier aléatoire N tel que a <= N <= b.
   . L'échange des valeurs de deux variables var_1 et var_2 se fait classiquement via une variable auxiliaire :
   $aux \leftarrow var_1; \; var_1 \leftarrow var_2; \; var_2 \leftarrow aux$
   Les habitués de Python utilisent l'affectation simultanée :
   $var_1, var_2 \leftarrow var_2, var_1$

   Réalisation du sac A_n : on part de l'état initial des sacs, A_0 contenant deux boules marquées $1, B_0$ contenant deux boules marquées 0, et on effectue n échanges de boules.

   Un programme Python possible :

   Programme Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

```python
def echange(A, B):
    a=rd.randint(2)
    b=rd.randint(2)
    aux=A[a];A[a]=B[b];B[b]=aux          # ou : A[a],B[b]= B[b],A[a]
    return A, B

def simuleS(n):
    A,B=[1,1], [0,0]
    for k in range(n):
        A,B=echange(A,B)
    return sum(A)
```

---

2. (a) . S_0, somme des numéros de A_0, vaut 2 et est la variable aléatoire constante 2 (aucun échange aléatoire).
. S_1 est la somme des numéros du sac A_1 obtenu après l'échange aléatoire d'une boule 1 du sac A_0 et d'une boule 0 du sac B_0. Dans tous les cas, A_1 contient une boule 1 et une boule 0, donc S_1 vaut 1 : S_1 est la variable aléatoire constante 1.
. A_2 résulte de l'échange aléatoire d'une boule de A_1 et d'une boule de B_1, sacs contenant 0 et 1. $\{S_2=0\}$ s'obtient en tirant la boule 1 de A_1 : 1 chance sur 2, et tirant la boule 0 de B_1 : 1 chance sur 2.
Donc $\mathbb{P}(S_2=0) = \dfrac{1}{4}$
Un raisonnement analogue, en permutant boule 1 et boule 0, donne la probabilité : $\mathbb{P}(S_2=2) = \dfrac{1}{4}$
Il en résulte que : $\mathbb{P}(S_2=1) = 1-\mathbb{P}(S_2=0) - \mathbb{P}(S_2=2) = 1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}$, soit finalement : $\mathbb{P}(S_2=1) = \dfrac{1}{2}$
Conclusion : loi de S_2

valeur k	0	1	2
$\mathbb{P}(S_2=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(b) Si on démarre la récurrence à $n=1$, la répartition initiale entre les boules 0 et 1 est symétrique, donc la probabilité que le premier sac contienne 2 boules 0 est égale à la probabilité qu'il contienne 2 boules 1 ; par suite : $\mathbb{P}(S_n=2)=\mathbb{P}(S_n=0)=p_n$; et donc : $\mathbb{P}(S_n=1) = 1-\mathbb{P}(S_n=0) - \mathbb{P}(S_n=2) = 1-2\,p_n$.
Pour ceux qui ne sont pas convaincus par l'argument de symétrie ci-dessus, voici une autre justification qui a l'avantage de montrer que la symétrie n'est pas nécessaire (et qui sera utile par la suite...) :
(J) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $\{S_n=0\}$, i.e. A_n ne contient que des boules 0, ne peut découler :
. ni du cas $\{S_{n-1}=0\}$, car alors A_{n-1} ne contient que des 0 et un échange amènera fatalement un 1 ,
. ni du cas $\{S_{n-1}=2\}$, car alors A_{n-1} ne contient que des 1 et un échange ne peut éliminer qu'un 1 ;
donc il se déduit aléatoirement du cas où A_{n-1} et B_{n-1} contiennent tous deux 0 et 1.
Or la probabilité de remplacer la boule 1 de A_{n-1} par la boule 0 de B_{n-1} (=1 chance sur 2 de tirer 1 de A_{n-1} × 1 chance sur 2 de tirer 0 de B_{n-1} = 1/4) est égale à la probabilité de remplacer la boule 0 de A_{n-1} par la boule 1 de B_{n-1} (1/2 d'avoir le 0 de A_{n-1} × 1/2 d'avoir le 1 de B_{n-1} 1/4) □

Conclusion : loi de S_n en fonction de p_n

valeur k	0	1	2
$\mathbb{P}(S_n=k)$	p_n	$1-2\,p_n$	p_n

D'où l'espérance mathématique : $\mathbb{E}(S_n) = 0 \times p_n + 1 \times (1-2\,p_n) + 2 \times p_n = 1$.

T_n est la somme des numéros dans le second sac. Pour $n=1$, les deux sacs ont la même composition (1 boule 1 et 1 boule 0), on voit que suivre la somme du second sac équivaut à suivre la somme du premier sac (permuter les deux sacs à l'étape $n=1$ par exemple). Donc $\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(S_n)$.
Alors $S_n+T_n = 2$ implique $2S_n = 2$, i.e. $\mathbb{E}(S_n) = 1$: on retrouve le résultat (quasi) sans calcul.
La relation $S_n+T_n = 2$, qui traduit la conservation des billes lors des expériences successives, donne aussi : $T_n=2-S_n$, d'où : $\mathrm{Var}(T_n)=\mathrm{Var}(-S_n)=\mathrm{Var}(S_n)$; T_n et S_n ont même variance.
Variance : $\mathrm{Var}(S_n) = \mathbb{E}(S_n^2) - \mathbb{E}(S_n)^2$; or $\mathbb{E}(S_n^2) = 0^2 \times p_n + 1^2 \times (1-2p_n) + 2^2 \times p_n = 1+2p_n$.
Donc $\mathrm{Var}(S_n) = 1+2p_n - 1^2$, soit : $\mathrm{Var}(S_n) = 2p_n$.

(c) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, la justification (J) de la question 2.(b) montre que $\mathbb{P}(S_{n+1}=0)=\dfrac{1}{4}\,\mathbb{P}(S_n=1)$.
D'où, connaissant la loi de S_n : $p_{n+1}=\dfrac{1}{4}\,(1-2\,p_n)$, soit : $p_{n+1}=-\dfrac{1}{2}\,p_n+\dfrac{1}{4}$.
Le point fixe étant $\dfrac{1}{6}$, on déduit : $p_{n+1}-\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{1}{6}\right)$, d'où $p_{n+1}-\dfrac{1}{6}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\left(p_1-\dfrac{1}{6}\right)=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2^n}\times\dfrac{1}{6}$

Conclusion : $\left| \begin{array}{l} p_{n+1} = \dfrac{1}{6}\Big(1 + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{2^n}\Big)\ ; \quad \text{on vérifie que la formule vaut pour } n \in \mathbb{N}. \\ \text{Par suite : } \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = \dfrac{1}{6}\Big(1 + \dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}\Big) \end{array}\right.$

D'où la loi de S_n en fonction de n :

valeur k	0	1	2
$\mathbb{P}(S_n)$	$\frac{1}{6}\Big(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\Big)$	$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\,\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{6}\Big(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\Big)$

3. (a) La matrice $M.E$ se déduit de la matrice M en permutant les colonnes 1 et 3 :

$1^{\text{ière}}$ colonne de $M.E = M.E\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 3^{\text{ième}}$colonne de M.

$2^{\text{ième}}$colonne de $M.E = M.E\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 2^{\text{ième}}$colonne de M.

$3^{\text{ième}}$colonne de $M.E = M.E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1^{\text{ière}}$colonne de M.

Montrons par récurrence sur n que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n.E = A^n \quad (\mathcal{P}_n)$
ce qui signifie que les matrices A^n ont même colonne 1 et 3.

- $A.E = A$ puisque la colonne 1 et la colonne 3 de A sont égales.
- si $A^n.E = A$, alors $A^{n+1}.E = A\,.\,A^n.E = A./A^n = A^{n+1}$, donc $(\mathcal{P}_n) \Rightarrow (\mathcal{P}_{n+1})$
- donc $(\mathcal{P}_n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) relation matricielle entre les lois de S_n et S_{n+1} : à partir de la loi de S_n, calculer celle de S_{n+1}

- $\mathbb{P}(S_{n+1} = 0)$: si au rang n on n'a que des boules marquées 0 dans le sac A, l'échange d'une boule amènera nécessairement une boule 1 dans le sac A.
  De même, si au rang n on n'a que des boules marquées 1 dans le sac A, l'échange d'*une* boule ne remplacera qu'une une boule 1 du sac A.
  Donc la seule possibilité que A ne contienne que des 0 au rang $n+1$ est qu'au rang n, A contienne un 1 et un 0 et B aussi, ce qui se produit avec la probabilité $\mathbb{P}(S_n = 1)$; et on a alors 1 chance sur 2 de tirer la boule 1 de A et 1 chance sur 2 de tirer la boule 0 de B, donc 1 chance sur 4 d'aboutir après échange à que des 0 dans A.
  Par conséquent : $\mathbb{P}\Big(S_{n+1} = 0\Big) = \dfrac{1}{4}\,.\,\mathbb{P}\Big(S_n = 1\Big)$.
- En échangeant 0 et 1 dans le raisonnement, on obtient : $\mathbb{P}\Big(S_{n+1} = 2\Big) = \dfrac{1}{4}\,.\,\mathbb{P}\Big(S_n = 1\Big)$.
- $\mathbb{P}(S_{n+1} = 1)$:
  si au rang n, le sac A ne contient que des boules marquées 0, alors après tirage et échange, il contiendra une boule 0 et une boule 1 : donc un premier cas de réussite avec une probabilité $\mathbb{P}(S_n = 0)$;
  symétriquement, si A ne contient que des 1 au rang n, l'échange conduit à la réussite, la probabilité étant $\mathbb{P}(S_n = 2)$;
  enfin, si au rang n le sac A contient une boule 0 et une boule 1, et donc le sac B aussi, la probabilité étant $\mathbb{P}(S_n = 1)$, alors il y a 1 chance sur 4 de tirer le 0 de A et le 0 de B et 1 chance sur 4 de tirer le 1 de A et le 1 de B : soit 1 chance sur 2 de rester avec un 0 et un 1.
  Au total : $\mathbb{P}(S_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(S_n = 0) + \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(S_n = 1) + \mathbb{P}(S_n = 2)$.

La relation entre la loi de S_n et celle de S_{n+1} est donc :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(S_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(S_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_n = 0) \\ \mathbb{P}(S_n = 1) \\ \mathbb{P}(S_n = 2) \end{pmatrix}$$

qu'on écrit : $\left| \begin{array}{l} L_{n+1} = A.L_n \\ \text{où } L_n \text{ "représente" la loi de } S_n. \end{array}\right.$

En particulier $L_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ puisque $S_0 = 2$ variable aléatoire constante

$L_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ puisque $S_1 = 1$ variable aléatoire constante (on a bien $L_1 = AL_0$)

Il résulte de la question 1. que : $L_n = \begin{pmatrix} p_n \\ 1 - 2p_n \\ p_n \end{pmatrix}$.

De la relation $L_{n+1} = A.L_n$, on tire $L_{n+1} = A^n.L_1$ et $L_n = A^n.L_0$. D'où :

- la colonne 3 de A^n est $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^n.L_0 = L_n$;
- la colonne 2 de A^n est $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^n.L_1 = L_{n+1}$
- la colonne 1 de A^n est égale à la colonne 3 (*cf supra*).

Donc $A^n = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} & p_n \\ 1-2p_n & 1-2p_{n+1} & 1-2p_n \\ p_n & p_{n+1} & p_n \end{pmatrix}$, soit, puisqu'on a calculé p_n :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right] & \frac{1}{6}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right] & \frac{1}{6}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right] \\ \frac{2}{3}\left[1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right] & \frac{2}{3}\left[1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right] & \frac{2}{3}\left[1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right] \\ \frac{1}{6}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right] & \frac{1}{6}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right] & \frac{1}{6}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right] \end{pmatrix}$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 3

Soit n un entier $\geqslant 6$. Les n cadres d'une entreprise soit s'apprécient mutuellement, soit se détestent mutuellement. On peut schématiser la situation par un graphe non orienté simple dont les sommets « sont » les cadres et où les arêtes matérialisent les relations d'estime réciproque. Ici, ne pas s'estimer mutuellement équivaut à se détester mutuellement.

1. Chaque cadre dresse la liste des collègues qu'il apprécie.
   (a) Montrer que si on fait deux tas selon la parité de chaque liste, celui des listes contenant un nombre impair de noms contient un nombre pair de listes.
   (b) Montrer qu'il existe au moins deux listes ayant le même nombre de noms.
2. Pour mesurer l'impact des affinités sur le travail d'équipe, le DRH veut former un groupe de travail homogène de 3 de ces cadres. Montrer qu'il peut toujours soit réunir 3 personnes qui s'apprécient mutuellement, soit réunir 3 personnes qui se détestent mutuellement.

Solution :

---

1. le nombre de collègues qu'un employé apprécie est le degré du sommet associé à l'employé.
   (a) Le nombre a de listes contenant un nombre impair de noms est le nombre de degrés impairs ; s'il était impair, la somme de tous les degrés serait impaire : or, la formule d'Euler (des poignées de main) dit que la somme des degrés est le double du nombre d'arêtes, et est donc paire ; contradiction : donc a est pair.
   (b) Cela revient à montrer qu'il existe au moins deux sommets de même degré.
   Démonstration par l'absurde :
   un sommet est reliable à au plus $n-1$ autres sommets, donc son degré est compris entre 0 et $n-1$.
   Si les degrés des n sommets étaient différents, toutes les valeurs entre 0 et $n-1$ seraient prises ;
   mais : . s'il y a un sommet de degré 0, il existe un sommet qui n'est relié à aucun autre ;
   . s'il y a un sommet de degré $n-1$, il y a un sommet qui est relié à tous les autres ;
   contradiction (le second devrait être relié au premier, qui est censé n'être relié à aucun).
2. Il faut montrer qu'il y a toujours soit 3 sommets mutuellement reliés, soit 3 sommets sans liens entre eux.
   Soit s un sommet donné. Le nombre $n-1$ des autres sommets est supérier ou égal à 5 (car $n \geqslant 6$).
   - si s admet 3 voisins : i, j, k (i.e. que s est relié à i, j et k), alors :
     - si deux de ces voisins, par exemple i et j, sont reliés, alors $\{s, i, j\}$ est un groupe de 3 cadres qui s'apprécient ;
     - sinon, $\{i, j, k\}$ est un groupe de sommets sans liens, donc un groupe de 3 cadres qui se détestent (ce qui équivaut ici à : ne s'apprécient pas).
   - sinon s a au plus deux voisins et au moins 3 des $n-1 \geqslant 5$ sommets différents de s ne lui sont pas liés. Notons les i, j, k ; alors :
     - si 2 d'entre eux, par ex. i et j, ne sont pas reliés, $\{s, i, j\}$ est un groupe de 3 cadres qui se détestent ;
     - sinon i, j, k sont mutuellement reliés, donc $\{i, j, k\}$ est un groupe de 3 cadres qui s'apprécient.

SUJET Maths Appliquées 4

Exercice principal Maths Appliquées 4

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de paramètre $p \in \,]0,1[$. On appelle doublet le fait d'obtenir deux succès à la suite. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements suivants : A_n « obtenir le premier doublet au rang n », B_n « obtenir au moins un doublet au cours des n premières épreuves ». Enfin, on pose $p_n = P(A_n)$ et $q = 1-p$.

1. Question de cours : Énoncer le théorème de la limite monotone pour une suite d'événements.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que $P(\overline{B_{n+2}}) \leqslant q(2-q)P(\overline{B_n})$. Est-il possible de ne pas obtenir de doublet ?
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_{n+3} = p^2 q \left(1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k\right)$.
4. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre p_{n+3}, p_{n+2} et p_n.

   Dans la suite, on suppose $p \neq \dfrac{2}{3}$.
5. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p^2q \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de A.
6. Justifier l'existence de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ (sans expliciter leurs valeurs) tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \lambda_k^n.$$
   En déduire la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. ECG 2 - page 7
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_k l'événement "Succès à la k-ième épreuve" pour $k \in \mathbb{N}^*$.
   On remarque que $\overline{B_{n+2}} \subset \overline{B_n} \cap (\overline{S_{n+1}} \cup \overline{S_{n+2}})$. Par indépendance des épreuves, $P(\overline{B_{n+2}}) \leqslant P(\overline{B_n})(2q - q^2)$.
   Puis, on note B l'événement « Ne jamais obtenir de doublet ». Il s'agit de déterminer la probabilité de $B = \cap_{n \geqslant 1} \overline{B_n}$. La suite $(\overline{B_n})$ étant décroissante, le théorème de la limite monotone donne $P(B) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(\overline{B_n})$.
   Comme $q(2-q) \in]0,1[$, la suite $(P(\overline{B_n}))$ converge vers 0 donc $P(B) = 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec les notations précédentes :
   $$A_{n+3} = S_{n+3} \cap S_{n+2} \cap \overline{S_{n+1}} \cap \overline{B_n} :$$
   il faut un doublet au rang $n+3$, et il doit être précédé d'un echec, sinon un doublet serait apparu au rang $n+2$. Pour obtenir une égalité, il faut encore demander qu'aucun doublet ne soit apparu aux rangs 1 à n. Les quatre événements ci-dessus sont indépendants, grâce à l'indépendance mutuelle des S_k
   $$p_{n+3} = P(S_{n+3})P(S_{n+2})P(\overline{S_{n+1}})P(\overline{B_n}) = p^2 q \left(1 - P(B_n)\right).$$
   Puis, l'événement B_n est la réunion disjointe des A_k pour $k \in [\![1, n]\!]$. L'additivité de P justifie alors que
   $$P(B_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

Finalement : $p_{n+3} = p^2 q\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$ et cette relation reste vraie si $n = 0$, car elle s'écrit $p_3 = p^2 q$, qui se déduit de l'égalité $A_3 = S_3 \cap S_2 \cap \overline{S_1}$.

4. Soit $n \geqslant 2$. D'après la question précédente, on dispose des égalités $\dfrac{p_{n+3}}{p^2 q} = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k$ et $\dfrac{p_{n+2}}{p^2 q} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k$.
   En les soustrayant, on obtient $\dfrac{p_{n+3} - p_{n+2}}{p^2 q} = -p_n$, ou encore (relation encore vraie pour $n = 1$) :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+3} = p_{n+2} - (p^2 q) p_n.$$
5. Soit $\lambda \in Sp(A)$.
   $$A - \lambda I_3 \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 0 & -p^2 q \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda(1-\lambda) & -p^2 q \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
   $$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda(1-\lambda) & -p^2 q \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \lambda(1-\lambda)L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 - \lambda^3 - p^2 q \end{pmatrix}$$
   Les valeurs propres réelles de A sont donc les racines réelles de $\chi_A(X) = X^3 - X^2 + p^2 q$.
   On remarque que p est une racine évidente, il reste à factoriser un polynôme de degré 2.
   Si on ne le remarque pas, on détermine les variations de χ_A. Son polynôme dérivé est $\chi_A' = 3X^2 - 2X = X(3X - 2)$. Le tableau de variation de la fonction polynomiale associée est donc

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$\chi_A'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\chi_A(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$p^2 q$	$\searrow$	$-\frac{4}{27} + p^2 q$	$\nearrow$	$+\infty$

   On remarque que $f\colon p \in]0,1[\mapsto p^2 q = p^2 - p^3$ vérifie $f'(p) = -\chi_A'(p)$, donc le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

p	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	0		$\frac{4}{27}$		0

   Il en résulte que $\chi_A\left(\dfrac{2}{3}\right) < 0$, puisque $p \neq \dfrac{2}{3}$. Comme $\chi_A(0) = p^2 q > 0$, la matrice A possède trois valeurs propres réelles simples et non nulles, notées $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$: A est donc diagonalisable.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n le vecteur colonne ${}^t(p_{n+2} \ p_{n+1} \ p_n)$. La relation de récurrence établie à la question 3 s'écrit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = AU_n$. On en déduit par récurrence que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = A^{n-1} U_1,$$
   avec $U_1 =^t (p_3 \ p_2 \ p_1) =^t (p^2 q \ p^2 \ 0)$.

   Vu la question précédente, il existe une matrice inversible de taille 3 notée P et $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ telle que $A = PDP^{-1}$. La relation $U_n = A^{n-1} U_1$ peut se récrire $P^{-1} U_n = D^{n-1}(P^{-1} U_1)$,
   Par produit matriciel, on en déduit l'existence de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \lambda_k^n.$$
   Comme $\chi_A(-1) = -2 + p^2 q < -1$ et $\chi_A(1) = p^2 q > 0$, les trois valeurs propres de A vérifient
   $$-1 < \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \frac{2}{3} < \lambda_3 < 1,$$
   donc elles ont toutes une valeur absolue strictement plus petite que 1. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$.

Exercice sans préparation Maths Appliquées 4

La base de données GAMESTAT d'un jeu vidéo comporte deux tables : la table `joueurs` représente les joueurs et la tables `parties` représente les parties. Le schéma est le suivant :

- `joueurs(id,pseudo,credit,niveau)`
  avec
  `id` : identifiant d'un joueur, type entier
  `pseudo` : type chaîne de caractères (pseudonyme du joueur)
  `credit` : type entier (nombre de crédits)
  `niveau` : type entier (niveau atteint par le joueur)
- `parties(id,date,score)`
  avec
  `id` : identifiant d'un joueur, type entier
  `date` : type chaîne de caractères (date de la partie)
  `score` : type entier (score de la partie)

Voici un exemple d'enregistrements de ces deux tables :

table `joueurs`

`id`	`pseudo`	`credit`	niveau
49250	princesse	3800	4
49251	oiseau	4200	2
49252	lutin	3100	5
49253	canard	2900	1

table `parties`

`id`	`date`	`score`
49250	2023-05-11	30500
51210	2023-07-12	61200

1. Quel attribut de la table `joueurs` peut être la clé primaire ? Justifier.
2. Écrire la requête SQL donnant le niveau du joueur dont l'identifiant est 52725
3. Écrire la requête SQL donnant le pseudo et le niveau des joueurs dont le nombre de crédits est supérieur ou égal à 3000.
4. Écrire la requête SQL donnant le pseudo des joueurs ayant joué une partie le 1er juin 2024
5. Écrire la requête SQL donnant le pseudo et l'identifiant des joueurs ayant obtenu au moins une fois le score 50000
6. Modifier la table `parties` afin de doubler les scores de toutes les parties jouées le 28 mai 2023

Solution :

1. L'attribut `Id` de la table `joueurs` peut être une clé primaire, de même que l'attribut `pseudo` car chacun identifie un joueur de manière unique.
2.
```
SELECT niveau FROM joueurs WHERE id = 52725
```
3.
```
SELECT pseudo,niveau FROM joueurs WHERE credit >= 3000
```
4.
```
SELECT pseudo FROM joueurs
JOIN parties ON joueurs.id = parties.id
WHERE parties.date = '2024-06-01'
```

5.
```
SELECT pseudo,id FROM joueurs
WHERE id IN (SELECT id FROM parties WHERE score >=50000)
```

6.
```
UPDATE parties SET score = score*2 WHERE date = "2023-05-28"
```

<u>Question supplémentaire :</u>

La fonction d'agrégation `MAX` renvoie la valeur maximum des enregistrements d'une sélection.

Écrire la requête SQL donnant les identifiants et pseudo des joueurs (éventuellement ex-aequo) ayant obtenu le meilleur score.

<u>Corrigé de la question supplémentaire :</u>

```
SELECT j.id,j.pseudo
FROM joueurs as j
JOIN parties as p ON p.id = j.id
WHERE p.score = SELECT(MAX(p.score))
                       FROM parties as p)
```

SUJET Maths Appliquées 5

Exercice principal Maths Appliquées 5

Soit la relation de récurrence : $(\mathcal{R})$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - 4 + e^{u_n} \end{cases}$

1. **Cours.** Théorème de la limite monotone pour une suite.
2. Montrer que $(\mathcal{R})$ définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que cette suite est décroissante, et qu'elle tend vers $-\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad u_n = 1 - 4n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$.
   En déduire : $1 - 4n \leqslant u_n \leqslant e - 3n$.

   (b) Montrer que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$ est majorée par la constante $\dfrac{e^e}{1-e^{-3}}$.
4. (a) Déterminer une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général de la forme $w_n = c \cdot n^p$, avec $c\in\mathbb{R}^*$ et $p\in\mathbb{Z}$, telle que les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient équivalentes quand n tend vers $+\infty$.

   (b) Montrer que pour $n \geqslant 700$, $\left|\dfrac{u_n}{w_n} - 1\right| < 10^{-2}$.

   (c) Compléter le programme Python ci-dessous pour qu'il donne le plus petit entier naturel n tel que $\left|\dfrac{u_n}{w_n} - 1\right| < 10^{-2}$.

   Programme Python.

```python
from numpy import exp, abs

u=-3+exp(1)
n=1

while ......... >= .01 :
    u=........
    n+=1
print(n)
```

Solution :

1. **Cours.** Programme Math Appli 1ière année, 1ier semestre, IV. 3.

2. La relation $(\mathcal{R})$ s'écrit $\left| \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$ avec $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-4+e^x \end{array}$

   Comme f est définie sur $\mathbb{R}$ entier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie.

   f est strictement croissante (évident).
   $u_1 = -3 + e < 0$.
   Alors : . $u_1 < u_0$;
   . $u_{n+1} < u_n \implies f(u_{n+1}) < f(u_n)$, i.e. $u_{n+2} < u_{n+1}$.
   Donc par récurrence : pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} < u_n$, c'est-à-dire : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   Si elle était minorée, elle convergerait vers une limite l (théorème de la limite monotone) .
   Comme f est continue (évident), cette limite serait un point fixe de f : $l-4+e^l = l \iff l = \ln(4)$.

Mais u_n étant <0 à partir du rang 1 ne peut avoir qu'une limite négative.
Donc $(u_n)_{n\in N}$ n'est pas minorée : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3. (a) $u_{n+1} = u_n - 4 + e^{u_n} \iff u_{n+1} - u_n = -4 + e^{u_n}$. Donc :

$$\begin{aligned} u_n &= (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \cdots + (u_{k+1} - u_k) + \cdots + (u_1 - u_0) + u_0 \\ &= (-4+e^{u_{n-1}}) + (-4+e^{u_{n-2}}) + \cdots + (-4+e^{u_k}) + \cdots + (-4+e^{u_1}) + (-4+e^{u_0}) + u_0 \end{aligned}$$

d'où : $\quad u_n = 1 - 4n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} \qquad (*)$

Encadrement de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$:

. comme $e^{u_k} \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$ est minoré par 0 ;

. comme $u_0 = 1$ et $u_k \leqslant 0$ pour $k \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} = e^{u_0} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{u_k} \leqslant e + n - 1$.

Par conséquent : $\quad 0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} \leqslant e + n - 1$.

Encadrement de u_n :
On déduit alors de $(*)$: $\ 1 - 4n \leqslant u_n \leqslant 1 - 4n + e + n - 1$, soit :
$1 - 4n \leqslant u_n \leqslant e - 3n$.

(b) Il résulte de la majoration de u_n que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} e^{\,e-3k} = e^e \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{-3}\right)^k = e^e \cdot \frac{1-e^{-3n}}{1-e^{-3}} < e^e \cdot \frac{1}{1-e^{-3}} = \frac{e^e}{1-e^{-3}}.$$

Donc $\ 0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} \leqslant C \qquad$ avec $C = \dfrac{e^e}{1-e^{-3}}$.

4. (a) Donc $(*)$ donne la majoration : pour $n \geqslant 2 \quad u_n \leqslant 1 - 4n + C \qquad$ avec $C = \dfrac{e^e}{1-e^{-3}}$.

L'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1-4n < u_n \leqslant 1-4n+C$ implique : $-\dfrac{1}{4n} + 1 - \dfrac{C}{4n} \leqslant \dfrac{u_n}{-4n} < -\dfrac{1}{4n} + 1 \ \ (E)$
qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{-4n} = 1$.
Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $w_n = -4n$ est telle que $\dfrac{u_n}{w_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

(b) l'encadrement (E) donne : $-\dfrac{1}{4n}(1+C) < \dfrac{u_n}{-4n} - 1 \leqslant -\dfrac{1}{4n}$, d'où : $\left|\dfrac{u_n}{-4n} - 1\right| < \dfrac{1}{4n}\big(1+C\big)$ car $C > 0$

Pour montrer que $n \geqslant 700$ implique $\left|\dfrac{u_n}{-4n} - 1\right| < 10^{-2}$, il suffit de montrer que $\left|\dfrac{u_n}{-4n} - 1\right| < \dfrac{7}{n} = \dfrac{1+27}{4n}$.
Il suffit donc de montrer que $C \leqslant 27$. Or : $C = e^3 \dfrac{e^e}{e^3-1} < 3^3 \dfrac{e^e}{e^3-1} = 27 \dfrac{e^e}{e^3-1}$. Il suffit donc de montrer que $\dfrac{e^e}{e^3-1} < 1$ soit $1 < e^3 - e^e$. Or : $e^3 - e^e = \displaystyle\int_e^3 e^x \, \mathrm{d}x > (3-e)e^e > 4(3-e) > 1$ car $e < 2,72$.

(c) *Programme Python.*

```
import numpy as np

u=-3+np.exp(1)
n=1

while np.abs(u/(-4*n)-1) >= .01 :
    u=u-4+np.exp(u)
    n+=1
print(n)
```

Remarque : le programme donne $n = 113$.

Exercice sans préparation Maths Appliquées 5

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note B_k l'événement « au moins k événements parmi $A_1, \dots, A_n$ sont réalisés ». En considérant la variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k).$$

Solution :

Aide possible *: comment exprimer B_k en fonction de X ?*

La variable aléatoire X étant finie, elle admet une espérance, égale à :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Remarquons que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $B_k = [X \geqslant k]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{E}(X) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\left[\mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X \geqslant k) - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)\mathbb{P}(X \geqslant k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(B_k) - \sum_{k=1}^{n} (k-1)\mathbb{P}(B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k).
\end{aligned}$$

SUJET Maths Appliquées 6

Exercice principal Maths Appliquées 6

On se donne le jeu suivant, joué par 1 joueur aidé d'un croupier (c'est à dire d'un employé du casino qui effectue les tirages, mais n'est pas considéré comme un joueur). À chaque tour i :

1. le croupier lance secrètement N pièces ;
2. il déclare au joueur le nombre X_i de pièces tombées sur pile.

Au bout de K tours, le joueur tente de deviner le nombre de pièces N. Le joueur gagne s'il devine la valeur exacte.

1. **Cours :** Rappeler la loi faible des grands nombres.
2. Quelle loi suit le nombre X_i de piles au tour i ? Quelle est l'espérance et la variance de cette loi ?

Connaissant les résultats de chaque tour, on pose $\overline{X}_K = \dfrac{\sum_{i=1}^K X_i}{K}$ et $\hat{N}_K = 2\overline{X}_K$.

3. (a) On utilise $\hat{N}_K$ comme estimateur de N. Justifier ce choix.
   (b) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\hat{N}_K - N\right| > \epsilon\right) \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0$.
   (c) Soit $\delta > 0$. En déduire, une stratégie de jeu (que nous nommerons « stratégie 1 ») qui permet de deviner exactement N avec une probabilité plus grande que $(1-\delta)$ si le nombre de tours K est suffisamment important.

Un autre joueur a une autre stratégie (que nous nommerons « stratégie 2 ») : il séléctionne $\mathring{N}_K$ le nombre maximum qui a été déclaré par le croupier sur tous les tours.

4. Montrer que $\mathbb{P}\left(\mathring{N}_K \neq N\right) \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0$

On se demande laquelle de ces stratégies est la meilleure.

5. Écrire une fonction `simulation(n_parties, K)` simulant `n_parties` parties de longueur K, et renvoyant le pourcentage de parties gagnées par la stratégie 1, et par la stratégie 2. Le nombre N sera choisi au hasard entre 1 et 10. On pourra utiliser la commande `round(x)` qui prend en argument un flottant `x` et renvoie la valeur de l'entier le plus proche de `x`.
6. (a) Quelle est la probabilité de gagner avec la stratégie 2 ?
   (b) Notons $Z_K = \sqrt{K}(\hat{N}_K - N)$. Vers quelle loi $\mathcal{L}$ la variable Z_K converge-t-elle en loi quand $K \to +\infty$.
   (c) Pour K suffisament grand, nous faisons l'approximation que $Z_K \sim \mathcal{L}$. Exprimer alors la probabilité de gagner avec la stratégie 1. On pourra utiliser dans l'expression Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Solution :

1. La loi faible des grands nombres dit que si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables indépendantes de même espérance E et de même variance finie, et si $\overline{X}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$, alors pour tout $\epsilon > 0$ $\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - E\right| > \epsilon\right) \to_n 0$.
2. Le nombre de pile au tour i suit une loi $B(N, \dfrac{1}{2})$, d'espérance $\dfrac{N}{2}$ et de variance $\dfrac{N}{4}$
3. (a) $\overline{X}_K = \dfrac{\sum_{i=1}^K X_i}{K}$ est l'estimateur de la moyenne $\dfrac{N}{2}$. $\hat{N}_K = 2\overline{X}_K$ est donc un estimateur naturel de N.

(b) Notons que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\hat{N}_K - N\right| > \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|2\overline{X}_K - N\right| > \epsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_K - \frac{N}{2}\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &\to_K 0 \quad \text{(LFGN)}\end{aligned}$$

(c) En particulier, si on pose $\epsilon = 1$, $\mathbb{P}\left(\left|\hat{N}_K - N\right| > 1\right) \to_K 0$. Donc si on choisit comme stratégie de toujours déclarer N arrondi à l'entier le plus proche,

$$\mathbb{P}\,(\text{Perte}) = \mathbb{P}\left(\left|\hat{N}_K - N\right| > 1\right) \to_K 0$$

4. On sait $\mathring{N}_K = \max(X_1 \dots X_K)$. $\mathring{N}_K \leqslant N$ et $\mathring{N}_K < N$ ssi $\forall 1 \leqslant i \leqslant K, X_i < N$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathring{N} \neq N) &= \mathbb{P}(\forall 1 \leqslant i \leqslant K, X_i < N) \\ &= \prod_{i=1}^{K} \mathbb{P}(X_i < N) \\ &= \prod_{i=1}^{K} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)^K \\ &\to_K 0\end{aligned}$$

5.
```
import numpy.random as rd

def simulation(n_parties, K):
    resultats_1 = 0.
    resultats_2 = 0.

    for _ in range(n_parties):
        max = 0
        moy = 0
        N = rd.randint(1, 11) #11 pour que 10 soit inclus
        for _ in range(K):
            n_piles=0
            for _ in range(N):
                piece = rd.rand()>.5
                if piece:
                    n_piles += 1
            moy += n_piles
            if n_piles > max:
                max = n_piles

        moy = moy / K
        moy = round(moy)

        if moy == N:
            resultats_1 += 1
        if max == N:
            resultats_2 += 1

    return resultats_1 / n_parties * 100, resultats_2 / n_parties * 100
```

6. (a) D'après le calcul en question **??**, elle vaut $1 - \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)^K$

(b) Notons $\overline{X} = \frac{N}{2}$, $\sigma = \sqrt{\frac{N}{4}}$

$$
\begin{aligned}
Z_K &= \sqrt{K}(\hat{N}_K - N) \\
&= 2\sqrt{K}\left(\overline{X}_K - \overline{X}\right) \\
\frac{2 * Z_K}{\sqrt{\frac{N}{4}}} &= \sqrt{K}\frac{\overline{X}_K - \overline{X}}{\sigma} \to_{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{(TCL)} \\
\frac{Z_K}{\sqrt{N}} &\to_{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1) \\
Z_K &\to_{\text{loi}} \mathcal{N}(0,N)
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\text{Gagner}\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\hat{N}_K - N\right| < 1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sqrt{K}\left|\hat{N}_K - N\right| < \sqrt{K}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{|Z_K|}{\sqrt{N}} < \sqrt{\frac{K}{N}}\right) \\
&= \Phi\left(\sqrt{\frac{K}{N}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{K}{N}}\right)
\end{aligned}
$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 6

On note I la matrice identité d'ordre 2 et O la matrice nulle d'ordre 2.
Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ défini par $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (M+I)(M+2I) = O\}$.

Solution :

Soit M telle que $M \in \mathcal{A}$ alors $(M+I)(M+2I) = 0$ et donc le polynôme $(X+1)(X+2)$ est un polynôme annulateur de M. Les éventuelles valeurs propres de M sont donc -1 et -2. Étudions les différents cas :

— Si -1 et -2 sont valeurs propres de M alors $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes et donc M est diagonalisable et est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

— Si -1 n'est pas valeur propre alors $M+I$ est inversible et comme $(M+I)(M+2I) = 0$, on obtient $M+2I = 0$ soit $M = -2I$

— De manière analogue, si -2 n'est pas valeur propre alors $M = -I$

On remarque que dans tous les cas -1 ou -2 est valeur propre de M.
Réciproquement, si M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
alors ils existe P inversible telle que $M = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$ et
$(M+I)(M+2I) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = 0$ donc $M \in \mathcal{A}$
Par ailleurs si $M = -I$ ou $M = -2I$, on a $(M+I)(M+2I) = 0$ donc $M \in \mathcal{A}$
En conséquence : $M \in \mathcal{A}$ si, et seulement si, $M = -I$ ou $M = -2I$ ou M est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Question supplémentaire : dans le cas où M est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ si on note $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$, déterminer M en fonction de a, b, c et d.

Solution : comme P est inversible $P^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ad+2bc & -ab \\ dc & bc-2ad \end{pmatrix}$

SUJET Maths Appliquées 7

Exercice principal Maths Appliquées 7

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [\![0, N]\!]$. Un joueur arrive au casino avec une fortune de n euros et joue à la roulette. A chaque partie, la probabilité de gagner vaut p avec $p \in]0, 1[$. Le déroulement d'une partie est le suivant : le joueur mise un euro, s'il gagne on lui rend son euro avec un euro de plus, s'il perd on ne lui donne rien.

Le joueur a décidé de s'arrêter de jouer lorsqu'il aura tout l'argent disponible dans le casino, soit N euros, ou lorsqu'il n'aura plus d'argent. On note T_n la variable aléatoire représentant le temps de jeu du joueur.

On admet que la variable aléatoire T_n admet une espérance notée $\mathbb{E}(T_n)$.

1. Question de cours : Énoncer la formule des probabilités totales.
2. Écrire une fonction Python qui renvoie une simulation de la variable aléatoire T_n.
3. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette question que $n \in [\![1, N-1]\!]$.
   Montrer que $\mathbb{P}(T_n = j) = p\ \mathbb{P}(T_{n+1} = j-1) + (1-p)\ \mathbb{P}(T_{n-1} = j-1)$.
4. En déduire que, pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$,
$$\mathbb{E}(T_n) = p(1 + \mathbb{E}(T_{n+1})) + (1-p)(1 + \mathbb{E}(T_{n-1})).$$
5. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Déterminer une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de n, p et N. On pourra faire intervenir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \mathbb{E}(T_n) + n\alpha$ avec α un réel à déterminer.

Solution :

1. ECG 1 - page 17
2.
```
import numpy.random as rd
def SimulationT(n,N,p):
        f = n
        T = 0
        while f > 0 and f < N:
                f = f-1+2*rd.binomial(1,p)
                T = T+1
        return(T)
```
3. On pose $n \in [\![1, N-1]\!]$, $j \in \mathbb{N}^*$ et $q = 1 - p$.
   On étudie l'issue de la première partie : si le joueur gagne, on est ramené au problème avec un montant initial de $n+1$, s'il perd, avec un montant initial de $n-1$. On note donc G l'événement : « Le joueur gagne la première partie » et on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (G, $\overline{G}$).
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = j) &= \mathbb{P}(T_n = j|G)P(G) + \mathbb{P}(T_n = j|\overline{G})P(\overline{G}) \\ &= \mathbb{P}(T_{n+1} = j-1)p + \mathbb{P}(T_{n-1} = j-1)q.\end{aligned}$$
4. Comme $\mathbb{P}(T_n = 0) = 0$ puisque n est entre 1 et $N-1$ et que l'espérance de T_n existe, toutes les séries

ci-dessous convergent et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(T_n = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} j[\mathbb{P}(T_{n+1} = j-1)p + \mathbb{P}(T_{n-1} = j-1)q] \\ &= p\sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(T_{n+1} = j-1) + q\sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(T_{n-1} = j-1) \\ &= p\sum_{j=0}^{+\infty}(j+1)\mathbb{P}(T_{n+1} = j) + q\sum_{j=0}^{+\infty}(j+1)\mathbb{P}(T_{n-1} = j) \\ &= p\mathbb{E}(T_{n+1}+1) + q\mathbb{E}(T_{n-1}+1) = p(1+\mathbb{E}(T_{n+1})) + q(1+\mathbb{E}(T_{n-1}))\end{aligned}$$

d'après le théorème de transfert.

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in [\![0, N]\!]$, on pose $u_n = \mathbb{E}(T_n) + n\alpha$.
Si $1 \leqslant n \leqslant N-1$, on a

$$\begin{aligned}&pu_{n+1} + qu_{n-1} - u_n \\ &\quad = p\mathbb{E}(T_{n+1}) + p\alpha(n+1) + q\mathbb{E}(T_{n-1}) + q\alpha(n-1) - \mathbb{E}(T_n) - \alpha n \\ &\quad = p\alpha n + p\alpha + q\alpha n - q\alpha - 1 - \alpha n = p\alpha - q\alpha - 1\end{aligned}$$

On se place dans le cas où $p \neq \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $p \neq q$. On peut alors poser $\alpha = \frac{1}{p-q}$, de sorte que $pu_{n+1} + qu_{n-1} - u_n = 0$.
L'équation caractéristique associée est $px^2 - x + q = 0$, de discriminant

$$1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (1-2p)^2$$

(non nul car $p \neq q$). Les solutions de cette équation sont

$$\frac{1+(1-2p)}{2p} = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p} \quad \text{et} \quad \frac{1-(1-2p)}{2p} = 1.$$

On a donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$,

$$u_n = \lambda + \mu\left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

Comme $u_0 = \mathbb{E}(T_0) = 0$ et $u_N = \mathbb{E}(T_N) + \alpha N = \frac{N}{p-q}$, (λ, μ) est solution du système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 & (L_1) \\ \lambda + \mu\left(\frac{q}{p}\right)^N = \frac{N}{p-q} & (L_2) \end{cases}.$$

En effectuant $(L_2) - (L_1)$, on obtient $\mu\left(\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1\right) = \frac{N}{p-q}$ donc

$$\mu = \frac{N}{(p-q)\left(\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1\right)} \quad \text{et} \quad \lambda = -\mu = -\frac{N}{(p-q)\left(\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1\right)}.$$

Ainsi, pour $n \in [\![0, N]\!]$, il vient :

$$\mathbb{E}(T_n) = u_n - \alpha n = \frac{1}{p-q}\left(N\frac{-1+\left(\frac{q}{p}\right)^n}{-1+\left(\frac{q}{p}\right)^N} - n\right) = \frac{1}{q-p}\left(n - N\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\right).$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 7

On s'intéresse à la suite suivante :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{1+u_n}} \qquad\qquad u_0 > 0$$

1. Convergence de (u_n) (en fonction de u_0) ?

2. Etudier la convergence de :

$$v_{n+1} = \frac{v_n^\alpha}{\sqrt{1+v_n}} \qquad\qquad v_0 > 0$$

Solution :
CORRECTION

1. Monotonie :

   $u_0 > 0 \Rightarrow u_n > 0$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} \geqslant u_n &\Leftrightarrow \frac{u_n^2}{\sqrt{1+u_n}} \geqslant u_n \\
&\Leftrightarrow u_n \geqslant \sqrt{1+u_n} \\
&\Leftrightarrow u_n^2 \geqslant 1 + u_n \qquad \text{(positif)} \\
&\Leftrightarrow u_n^2 - u_n - 1 \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \left(u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(u_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant 0 \qquad \text{car } u_n > 0 \text{ et } \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \\
&\Leftrightarrow u_n \geqslant \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\alpha}
\end{aligned}$$

— Si $\underline{u_0 < \alpha}$: $a \geqslant u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \ldots$

  u décroissante.

— Si $\underline{u_0 = \alpha}$: u_n constante.

— Si $\underline{u_0 > \alpha}$: $a \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \ldots$

  u croissante.

Convergence :

- Si $u_0 \leqslant \alpha$, u converge (décroissante et bornée).
- Si $u_0 > \alpha$:
  Notons que $u_n \geqslant u_0 \geqslant \alpha$

  $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} \geqslant \underbrace{\frac{u_0}{\sqrt{1+u_0}}}_{c} > 1 \text{ donc } u_n \geqslant u_0 c^n \longrightarrow +\infty \text{ et enfin : } u_n \longrightarrow +\infty$$

2. Si $\alpha > \frac{3}{2}$ alors : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n^{\alpha-1}}{\sqrt{1+v_n}}$
   $\frac{v_{n+1}}{v_n} = f(v_n)$ où $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{1+x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
   Donc il existe x_0 tel que $\forall x \geqslant x_0,\ f(x) > 1+\delta$
   Dans ce cas, si $v_n \geqslant x_0$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant (1+\delta)$
   Or $v_{n+1} \geqslant v_n$, donc si $v_0 \geqslant x_0$:
   $v_0 \leqslant v_1 \leqslant \ldots \leqslant v_n$ et $\forall n \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant (1+\delta)$

   Donc $v_n \geqslant (1+\delta)^n v_0$ et v_n diverge.
3. Si $\alpha \leqslant \frac{3}{2}$ alors : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n^{\alpha-1}}{\sqrt{1+v_n}}$ où $v_n^{\alpha-1} \leqslant \sqrt{1+v_n}$

   Si $v_n \geqslant 1$, $v_n^{\alpha} \leqslant \sqrt{v_n} \leqslant \sqrt{1+v_n}$. Si $v_n \leqslant 1$, $v_n^{\alpha} \leqslant 1 \leqslant \sqrt{1+v_n}$)
   Donc (v_n) converge.

Question Supplémentaire : Donner un équivalent de u_n.

Question Supplémentaire : On pose $z_n = \ln u_n$

$$z_{n+1} = 2z_n - \frac{1}{2}\ln(1+u_n)$$

$$z_{n+1} = \frac{3}{2}z_n - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

Intuition $z_n \sim \left(\frac{3}{2}\right)^n$. Posons plutôt : $w_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{-n} z_n$

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} z_{n+1} \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1}\left(\frac{3}{2}z_n - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{-n} z_n - \left(\frac{3}{2}\right)^{-n}\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \\
w_{n+1} - w_n &= \left(\frac{3}{2}\right)^{-n}\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{-n}\frac{1}{2u_n} + o\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-n}\frac{1}{u_n}\right)
\end{aligned}$$

La série de tg $w_{n+1} - w_n$ converge, donc w_n converge. On pose $w = \lim w_n$.

$w_n = w + o\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-n}\right)$ majoré par le 1er terme reste des sommes géométriques.

$$\begin{aligned} z_n &= \left(\frac{3}{2}\right)^n w_n \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^n w + o(1) \\ u_n &= \mathrm{e}^{\left(\frac{3}{2}\right)^n w + o(1)} \\ u_n &= \mathrm{e}^{\left(\frac{3}{2}\right)^n w}\,(1 + o(1)) \end{aligned}$$

$$u_n = \mathrm{e}^{\left(\frac{3}{2}\right)^n w}$$

SUJET Maths Appliquées 8

Exercice principal Maths Appliquées 8

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}}.$$

1. Cours : développement limité de $\ln(1+x)$ pour x au voisinage de 0.
2. Montrer la convergence de l'intégrale J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et préciser son signe.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x$ converge et exprimer sa valeur en fonction de J_n.
4. En déduire la monotonie de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_{n+1} = \dfrac{3n+2}{3n+3} J_n$.
5. On admet que $J_0 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Écrire en Python une fonction prenant en argument un entier n et qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = n^{\frac{1}{3}} J_n$.
   (a) À l'aide de développements limités usuels, montrer que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{9n^2}$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} An^{-\frac{1}{3}}$.

Solution :

1. Cours : cf programme de deuxième année page 9.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une comparaison avec une intégrale de Riemann montre que l'intégrale J_n converge. Puisque l'intégrande est strictement positive sur $[0, +\infty[$, l'intégrale J_n est strictement positive.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $A > 0$. Les fonctions $(x \mapsto x)$ et $\left(x \mapsto -\dfrac{1}{(3n+3)(1+x^3)^{n+1}}\right)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$, donc par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^A x\frac{x^2}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{x}{(3n+3)(1+x^3)^{n+1}}\right]_0^A + \int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{(3n+3)(1+x^3)^{n+1}} \\ &= -\frac{A}{(3n+3)(1+A^3)^{n+1}} + \frac{1}{3n+3}\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3n+3}J_n.\end{aligned}$$

   On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3n+3}J_n.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (par linéarité de l'intégrale) :

$$\frac{1}{3n+3}J_n = \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^3)-1}{(1+x^3)^{n+2}}\,\mathrm{d}x = J_n - J_{n+1}.$$

   On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} = \dfrac{3n+2}{3n+3}J_n$. La suite étant positive, elle est strictement décroissante.

5. On fera particulièrement attention aux erreurs d'indices !

```
import numpy as np

def liste_J(n):
    J = [2*np.pi/(3**1.5)]
    for k in range(n):
        J.append((3*k+2)*J[k]/(3*k+3))
    return J

ou

def liste_J(n):
    J = [2*np.pi/(3**1.5)]
    for k in range(1,n+1):
        J.append((3*k-1)*J[k-1]/(3*k))
    return J
```

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = n^{\frac{1}{3}} J_n$.

   (a)

$$\begin{aligned}\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \ln\left((n+1)^{\frac{1}{3}} J_{n+1}\right) - \ln\left(n^{\frac{1}{3}} J_n\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right) + \ln\left(\frac{J_{n+1}}{J_n}\right) \\ &= \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n+3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + \left[-\frac{1}{3n+3} - \frac{1}{2(3n+3)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].\end{aligned}$$

   En multipliant par n^2 et en passant à la limite, on trouve que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{9n^2}$.

   (b) D'après la question précédente et le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ converge. On en déduit que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, vers un réel qu'on notera ℓ. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $A = e^{\ell}$. En particulier $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A$ donc $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} An^{-\frac{1}{3}}$.

Exercice sans préparation Maths Appliquées 8

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ avec $\lambda > 0$. On définit la matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $M = \begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & Y \end{pmatrix}$. Soit A l'événement « La matrice M est diagonalisable ».

1. Déterminer la probabilité p de l'événement A. On donnera le résultat sous forme d'une série numérique dépendant uniquement de λ.
2. À l'aide de simulations des variables aléatoires X et Y, proposer une fonction Python qui renvoie une valeur approchée de p.

Solution :

1. La matrice M étant triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont X et Y.
   - Si $X \neq Y$ alors on peut trouver une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres puisqu'une famille de vecteurs propres associée à des valeurs propres distinctes est libre. Dans ce cas, A est réalisé. On a donc $(X \neq Y) \subset A$.
   - Si $X = Y$ alors la matrice a une unique valeur propre. Elle est diagonalisable si, et seulement si elle est semblable à la matrice nulle, c'est-à-dire si, et seulement si $X = 0$.

   Ainsi :
   $$p = P(A \cap (X \neq Y)) + P(A \cap (X = Y)) = P(X \neq Y) + P((X = 0) \cap (X = Y)).$$
   Par indépendance de X et Y, on obtient :
   $$p = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)^2 + P(X = 0)P(Y = 0) = 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.$$
2. Pour obtenir une valeur approchée de cette série, on peut effectuer un grand nombre de simulations des variables aléatoires X et Y et compter le nombre de fois où $X = Y$ et $X \neq 0$. La valeur q obtenue correspond à $1 - p$.

```python
import numpy.random as rd
def Diagonalisable(l,N):
        compteur= 0
        for k in range(N):
                X=rd.poisson(l)
                Y=rd.poisson(l)
                if X == Y and X != 0:
                        compteur = compteur +1
        return 1-compteur/N
```