Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L, constituent un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2013.

1. SUJETS DE L'OPTION SCIENTIFIQUE

Exercice principal S46

1. Question de cours : Énoncer le théorème de la bijection.

2.a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{8}}\,dt$ et en donner la valeur.

b) Établir l'inégalité stricte : $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{8}}\,dt > 1$.

3. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'un unique réel u_n vérifiant $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{u_n} e^{-\frac{t^2}{8}}\,dt = \frac{1}{n}$.

4.a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les inégalités : $\left(u_n - \dfrac{1}{n}\right)e^{-\frac{u_n^2}{8}} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \left(u_n - \dfrac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{8n^2}}$.

b) En déduire que u_n est équivalent à $\dfrac{2}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

5. Trouver un équivalent de la différence $\left(u_n - \dfrac{2}{n}\right)$, quand n tend vers $+\infty$, de la forme $\dfrac{\alpha}{n^\beta}$ où α et β sont des réels, indépendants de n, à déterminer.

Exercice sans préparation S46

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, admettant une densité f et vérifiant la propriété suivante : la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ possède une espérance mathématique.

1. Établir l'inégalité : $E\left(X + \dfrac{1}{X}\right) \geqslant 2$.

2. Montrer que l'inégalité précédente n'est jamais une égalité, mais que $E\left(X + \dfrac{1}{X}\right)$ peut prendre des valeurs arbitrairement proches de 2.

Exercice principal S 46

(Q1) I est un intervalle non vide et non réduit à un point. f est une application continue et strictement monotone sur I. Alors :

1) $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2) f définit une bijection de I sur $f(I)$.

3) f^{-1} est une bijection de $f(I)$ sur I, continue et strictement monotone "de même sens" que f.

(Q2) a) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2} e^{-\frac{t^2}{2(2)^2}}$. f est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres 0 et $(2)^2$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ existe et vaut 1. Comme f est paire $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.

Alors $\frac{1}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2(2)^2}} dt$. Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2(2)^2}} dt$ existe et vaut $\sqrt{2\pi}$.

donc $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{8}} dt$ existe et vaut $\sqrt{2\pi}$

b) $\varphi : x \mapsto e^x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) = e^x > 0$.

Ainsi φ est convexe sur $\mathbb{R}$. Alors toutes les tangentes à la courbe représentative $\mathcal{C}_\varphi$ de φ sont en dessous de $\mathcal{C}_\varphi$. En particulier la tangente au point d'abscisse 0 est en dessous de $\mathcal{C}_\varphi$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant (x-0)e^0 + e^0 = x+1$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$.

Ainsi $\forall t \in [1,+\infty[$, $e^{-t^2/8} \geqslant -\frac{t^2}{8}+1$.

Alors $\forall A \in [1,+\infty[$, $\int_1^A e^{-t^2/8} dt \geqslant \int_1^A \left(-\frac{t^2}{8}+1\right) dt = \left[-\frac{t^3}{24}\right]_1^A + A - 1 = -\frac{A^3}{24} + \frac{1}{24} + A - 1$

$\forall A \in [1,+\infty[$, $\int_1^A e^{-t^2/8} dt \geqslant -\frac{A^3}{24} + A - \frac{23}{24}$.

Donc $\forall A \in [1,+\infty[$, $\int_1^{+\infty} e^{-t^2/8} dt \geqslant \int_1^A e^{-t^2/8} dt \geqslant -\frac{A^3}{24} + A - \frac{23}{24}$.

$\forall A \in [1,+\infty[$, $\int_1^{+\infty} e^{-t^2/8} dt \geqslant -\frac{A^3}{24} + A - \frac{23}{24}$.

Posons $\forall A \in [1,+\infty[$, $\ell(A) = -\frac{A^3}{24} + A - \frac{23}{24}$. ℓ est dérivable sur $[1,+\infty[$.

$\forall A \in [1,+\infty[$, $\int_1^{+\infty} e^{-t^2/8} dt \geqslant \ell(A)$.

$\forall A \in [1,+\infty[$, $\ell'(A) = -\frac{A^2}{8} + 1 = \frac{8-A^2}{8} = \frac{(2\sqrt{2}-A)(2\sqrt{2}+A)}{8}$

Ainsi $\forall A \in [1, 2\sqrt{2}[$, $\ell'(A) > 0$; $\ell'(2\sqrt{2}) = 0$; $\forall A \in]2\sqrt{2}, +\infty[$, $\ell'(A) < 0$.

Alors ℓ est strictement croissante sur $[1, 2\sqrt{2}]$ et strictement décroissante sur $[2\sqrt{2}, +\infty[$.

ℓ possède un maximum sur $[1,+\infty[$ atteint en le seul point $2\sqrt{2}$.

Ainsi $\int_1^{+\infty} e^{-t^2/8} dt \geqslant \ell(2\sqrt{2}) = -\frac{(2\sqrt{2})^3}{24} + 2\sqrt{2} - \frac{23}{24} = 2\sqrt{2} - \frac{31}{24}$.

Notons que $2\sqrt{2} \simeq 2{,}83$ et $\frac{31}{24} \simeq 1{,}29$. Il semble donc que $2\sqrt{2} - \frac{31}{24} > 1$.

Notons le. $2\sqrt{2} - \frac{31}{24} > 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} > \frac{31}{24} + 1 = \frac{55}{24} \Leftrightarrow 48\sqrt{2} > 55 \Leftrightarrow 2(48)^2 > (55)^2$

$2\sqrt{2} - \frac{31}{24} > 1 \Leftrightarrow 4608 > 3025$.

Ainsi $\int_1^{+\infty} e^{-t^2/8} dt \geqslant 2\sqrt{2} - \frac{31}{24} > 1$. $\underline{\underline{\int_1^{+\infty} e^{-t^2/8} dt > 1.}}$

(Q3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall x \in [\frac{1}{n}, +\infty[$, $g_n(x) = \int_{1/n}^{x} e^{-t^2/8} dt$.

g_n est dérivable sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$ et $\forall x \in [\frac{1}{n}, +\infty[$, $g_n'(x) = e^{-x^2/8} > 0$.

Notons que $\int_{1/n}^{+\infty} e^{-t^2/8} dt$ converge. Ainsi $\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = L_n$ avec $L_n = \int_{1/n}^{+\infty} e^{-t^2/8} dt$.

1) g_n est continue sur l'intervalle $[\frac{1}{n}, +\infty[$.

2) g_n est strictement croissante sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$

3) $g_n(\frac{1}{n}) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = L_n$.

Alors g_n définit une bijection de $[\frac{1}{n}, +\infty[$ sur $[0, L_n[$.

$L_n = \int_{1/n}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{8}} dt \geqslant \int_1^{+\infty} e^{-t^2/8} dt > 1$. Ainsi $L_n > 1$. Alors $\frac{1}{n} \in [0, L_n[$

$1 \geqslant \frac{1}{n}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2/8} \geqslant 0$

Par conséquent $\exists!\, u_n \in [\frac{1}{n}, +\infty[$, $g_n(u_n) = \frac{1}{n}$.

$\exists!\, u_n \in [\frac{1}{n}, +\infty[$, $\int_{1/n}^{u_n} e^{-t^2/8} dt = \frac{1}{n}$.

Notons que $\forall x \in]-\infty, \frac{1}{n}[$, $\int_{1/n}^{x} e^{-t^2/8} dt < 0$ car $t \mapsto e^{-t^2/8}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc $\forall x \in]-\infty, \frac{1}{n}[$, $\int_{1/n}^{x} e^{-t^2/8} dt \neq \frac{1}{n}$.

Finalement, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $\int_{1/n}^{u_n} e^{-t^2/8}\,dt = \frac{1}{n}$.

Remarque.. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [\frac{1}{n}, +\infty[$. Mieux $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]\frac{1}{n}, +\infty[$.

Q4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{1}{n} < u_n$ et $\forall t \in [\frac{1}{n}, u_n]$, $e^{-\frac{u_n^2}{8}} \leq e^{-\frac{t^2}{8}} \leq e^{-\frac{(1/n)^2}{8}}$.

En intégrant il vient : $\int_{1/n}^{u_n} e^{-u_n^2/8}\,du \leq \int_{1/n}^{u_n} e^{-t^2/8}\,dt \leq \int_{1/n}^{u_n} e^{-\frac{1}{8n^2}}\,dt$ car $\frac{1}{n} < u_n$.

Alors $(u_n - \frac{1}{n})\, e^{-\frac{u_n^2}{8}} \leq \frac{1}{n} \leq (u_n - \frac{1}{n})\, e^{-\frac{1}{8n^2}}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\int_{\frac{1}{n+1}}^{u_{n+1}} e^{-t^2/8}\,dt = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = \int_{\frac{1}{n}}^{u_n} e^{-t^2/8}\,dt \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{u_n} e^{-t^2/8}\,dt$.

$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2/8} \geq 0$

donc $\int_{\frac{1}{n+1}}^{u_{n+1}} e^{-t^2/8}\,dt \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{u_n} e^{-t^2/8}\,dt$.

Ainsi $0 \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{u_n} e^{-t^2/8}\,dt - \int_{\frac{1}{n+1}}^{u_{n+1}} e^{-t^2/8}\,dt = \int_{u_{n+1}}^{u_n} e^{-t^2/8}\,dt$.

Or si $u_{n+1} > u_n$: $\int_{u_{n+1}}^{u_n} e^{-t^2/8}\,dt < 0$. Donc $u_{n+1} \leq u_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq u_n$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0.

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Posons $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans les inégalités de 4 a) il vient :

$(L-0)\, e^{-\frac{L^2}{8}} \leq 0 \leq (L-0)\, e^{-0}$. Alors $L \leq 0$ et $L \geq 0$. $L = 0$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} e^{\frac{u_n^2}{8}}$ et $\frac{1}{n} e^{+\frac{1}{8n^2}} \leq u_n - \frac{1}{n}$ d'après Q4 a)

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} e^{\frac{1}{8n^2}} + \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n} e^{\frac{u_n^2}{8}} + \frac{1}{n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{\frac{1}{8n^2}} + 1 \leq n u_n \leq e^{\frac{u_n^2}{8}} + 1$. de plus $\lim_{n\to+\infty} (e^{\frac{1}{8n^2}} + 1) = \lim_{n\to+\infty} (e^{\frac{u_n^2}{8}} + 1) = 2$.

Par encadrement il vient $\lim_{n\to+\infty} (n u_n) = 2$. Alors $n u_n \underset{+\infty}{\sim} 2$ car $2 \neq 0$. Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

Q5 Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $F(x)=\int_0^x e^{-t^2/8}\,dt$. $F(0)=0$.

F est dérivable sur $[0,+\infty[$; $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $F'(x)=e^{-x^2/8}$ et $F'(0)=$.

F' est dérivable sur $[0,+\infty[$; $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $F''(x)=-\frac{x}{4}e^{-x^2/8}$ et $F''(0)=0$.

F'' est dérivable sur $[0,+\infty[$; $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $F'''(x)=-\frac{1}{4}e^{-x^2/8}+\left(-\frac{x}{4}\right)\left(-\frac{x}{4}\right)e^{-x^2/8}$ et $F'''(0)=-\frac{1}{4}$.

Alors F admet un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0.

$F(x)\underset{x\to0}{=}x-\frac{1}{4}\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$; $F(x)=x-\frac{1}{24}x^3+o(x^3)$

$F(u_n)\underset{n\to+\infty}{=}u_n-\frac{1}{24}u_n^3+o(u_n^3)$ et $F\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}-\frac{1}{24}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. $-F\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{-1}{n}+\frac{1}{24}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$!

Alors $\frac{1}{n}=\int_{1/n}^{u_n}e^{-t^2/8}\,dt=F(u_n)-F(1/n)\underset{n\to+\infty}{=}u_n-\frac{1}{24}u_n^3+o(u_n^3)-\frac{1}{n}+\frac{1}{24}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Ainsi $u_n-\frac{2}{n}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{24}\left(u_n^3-\frac{1}{n^3}\right)-o(u_n^3)-o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$n^3\left(u_n-\frac{2}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{24}\left(n^3u_n^3-1\right)-n^3o(u_n^3)-n^3\,o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

$n^3u_n^3\underset{n\to+\infty}{\sim}n^3\left(\frac{2}{n}\right)^3$; $\lim_{n\to+\infty}\left(n^3u_n^3\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(n^3\left(\frac{2}{n}\right)^3\right)=8$; $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{24}\left(n^3u_n^3-1\right)\right)=\frac{1}{24}(8-1)$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{24}\left(n^3u_n^3-1\right)\right)=\frac{7}{24}$. De plus $\lim_{n\to+\infty}\left(n^3o(u_n^3)\right)=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(n^3o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=0$

$u_n^3\sim\frac{8}{n^3}$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\left(n^3\left(u_n-\frac{2}{n}\right)\right)=\frac{7}{24}$ et $\frac{7}{24}\neq0$.

Alors $n^3\left(u_n-\frac{2}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{7}{24}$.

Donc $\underline{\underline{u_n-\frac{2}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{7}{24}\times\frac{1}{n^3}}}$. (notons que $\alpha=\frac{7}{24}$ et $\beta=3$ ...).

Si vous trouvez des erreurs importantes me le dire.

Exercice principal S51

1. Question de cours : Développement limité d'ordre 1 d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (2x-y)^2 e^{2x-y}$.

2.a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifier que : $\forall A \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$.

b) Montrer que f possède une infinité de points critiques. Trouver ceux en lesquels f admet un extremum local ou global.

3. Soit (α, β) un couple de réels différent de $(0,0)$ et g une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles vérifiant : $\forall A \in \mathbb{R}^2,\ \alpha\dfrac{\partial g}{\partial x}(A) + \beta\dfrac{\partial g}{\partial y}(A) = 0$.

Pour tout couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $h(u,v) = g(\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v)$.

a) Montrer que $h(u+\varepsilon, v) = h(u,v) + o(\varepsilon)$ (quand ε tend vers 0).

b) En déduire l'existence d'une fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ h(u,v) = \varphi(v)$.

4. Montrer que f est la seule fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall A \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(0,t) = t^2 e^{-t} \end{cases}$$

Exercice sans préparation S51

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On pose : $M = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $P(X = Y)$ et $P(XY > 0)$.
2. Trouver la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

Exercice principal S. S1

(Q1) Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ (on suppose que Ω n'est pas vide). A est un point de Ω.

f admet un développement limité d'ordre 1 en A ou au voisinage de A ... si l'une des propriétés suivantes est vérifiée

- Il existe une fonction polynôme de 2 variables P, de degré au plus 1 telle que :

$$f(A+H) \underset{H \to 0_{\mathbb{R}^2}}{=} P(H) + o(\|H\|). \qquad (1)$$

- Il existe une fonction polynôme de 2 variables P, de degré au plus 1 telle que :

$$f(X) \underset{X \to A}{=} P(X-A) + o(\|X-A\|) \qquad (2)$$

<u>Remarque</u>.. Si f admet un développement limité d'ordre 1 en A ou voisinage de A le polynôme P vérifiant (1) (resp. (2)) est unique. P s'appelle la partie régulière du développement limité d'ordre 1 de f à A ou au voisinage de A

(1) (resp. (2)) est le développement limité d'ordre 1 de f à A ou au voisinage de A

On suppose maintenant f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

1) f admet un développement limité d'ordre 1 à tout point de Ω.

2) A est un élément de Ω. Le développement limité de f en A est :

$$f(A+H) \underset{H \to 0_{\mathbb{R}^2}}{=} f(A) + \langle \nabla f(A), H \rangle + o(\|H\|) \quad \text{ou}$$

$$f(X) \underset{X \to A}{=} f(A) + \langle \nabla f(A), X-A \rangle + o(\|X-A\|)$$

(Q2) a) $(x,y) \mapsto 2x-y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme et $t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition $(x,y) \mapsto e^{2x-y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$(x,y) \mapsto (2x-y)^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme.

Alors par produit <u>f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.</u>

Soit $A=(a,b) \in \mathbb{R}^2$. $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 2\times 2\times(2a-b)e^{2a-b} + (2a-b)^2\, 2\, e^{2a-b}$.

<u>$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 2(2a-b)(2+2a-b)e^{2a-b}$.</u>

$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 2\times(-1)(2a-b)e^{2a-b} + (2a-b)^2(-1)e^{2a-b}$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = -(2a-b)(2+2a-b)e^{2a-b}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(A) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 2(2a-b)(2+2a-b)e^{2a-b} + 2\left(-(2a-b)(2+2a-b)e^{2a-b}\right) = 0$.

$\forall A\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(A) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$.

b) Soit $A=(a,b)$ un élément de $\mathbb{R}^2$.

A point critique de f

$\Updownarrow$

$\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$

$\Updownarrow$

$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$

$\Updownarrow \leftarrow \frac{\partial f}{\partial y}(A) = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ d'après a)

$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$

$\Updownarrow$ $2(2a-b)(2+2a-b)e^{2a-b} = 0$

$\Updownarrow$ $\begin{cases} 2a-b=0 \\ \text{ou} \\ 2+2a-b=0 \end{cases}$

$\Updownarrow$ $\begin{cases} b=2a \\ \text{ou} \\ b=2a+2 \end{cases}$

Ainsi 1) f admet une infinité de points critiques

2) L'ensemble des points critiques de f est $\{(a,2a);a\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,2a+2);a\in\mathbb{R}\}$.

Remarques.- 1.- $\mathbb{R}^2$ étant un ouvert et f étant de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est trop...) si f admet un extremum local en un point de $\mathbb{R}^2$, ce point est un point critique de f.

Ainsi, si f admet un extremum local en $A=(a,b)$: $b=2a$ ou $b=2a+2$.

2.- Notons que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit A un point critique de f.

Pour conclure à l'existence ou la non existence d'un extremum local en A pour f on aurait pu commencer par calculer $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\times\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)(A)$. Malheureusement cette quantité est nulle !! Facile à noter en dérivant par rapport aux 2 variables le résultat de Q 2 a)

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{\varphi}(t) = t^2 e^t$. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \hat{\varphi}(2x-y)$.

Etudions $\hat{\varphi}$. $\hat{\varphi}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{\varphi}'(t) = 2te^t + t^2e^t = t(t+2)e^t$.

$\hat{\varphi}'(-2) = \hat{\varphi}'(0) = 0$; $\forall t \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$, $\hat{\varphi}'(t) > 0$ et $\forall t \in]-2,0[$, $\hat{\varphi}'(t) < 0$.

Alors $\hat{\varphi}$ est strictement croissante sur $]-\infty,-2]$ et sur $[0,+\infty[$ et $\hat{\varphi}$ est strictement décroissante sur $[-2,0]$. Notons que $\lim\limits_{t \to -\infty} \hat{\varphi}(t) = 0$, $\hat{\varphi}(-2) = 4e^{-2}$, $\hat{\varphi}(0) = 0$ et

$\lim\limits_{t \to +\infty} \hat{\varphi}(t) = +\infty$

t	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\hat{\varphi}'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\hat{\varphi}(t)$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Alors $\hat{\varphi}$ admet un minimum global atteint en un seul point 0 et qui vaut 0.

$\hat{\varphi}$ admet un maximum local et un seul qui vaut $4e^{-2}$ atteint en -2.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}-\{0\}$, $\hat{\varphi}(t) > \hat{\varphi}(0) = 0$ et $\forall t \in]-\infty, 0]$, $\hat{\varphi}(t) \leq \hat{\varphi}(-2)$

Soit $A = (a,b)$ un point critique de f.

<u>1er cas..</u> $b = 2a$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \hat{\varphi}(x-y) \geqslant 0 = f(a,2a) = f(A)$.

Ainsi <u>f admet un minimum global en A qui vaut 0</u>.

<u>2ème cas..</u> $b = 2a+2$.

Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|X - A\| \leq \frac{1}{2}$ ... petite boule !!

$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq \frac{1}{2}$. Alors $\sqrt{(x-a)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq \frac{1}{2}$ donc

$|x-a| \leq \frac{1}{2}$. De même $|y-b| \leq \frac{1}{2}$ ou $|b-y| \leq \frac{1}{2}$

Alors $-\frac{1}{2} \leq x-a \leq \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} \leq b-y \leq \frac{1}{2}$

donc $\begin{cases} -1 \leq 2x-2a \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq b-y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$. Ainsi $-\frac{3}{2} \leq 2x-y-(2a-b) \leq \frac{3}{2}$. En particulier

$2x - y \leq \frac{3}{2} + 2a - b = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \leq 0$.

Comme $2x-y \leq 0$: $\hat{\varphi}(2x-y) \leq \hat{\varphi}(-2) = \hat{\varphi}(2a-b)$. Donc $f(x,y) \leq f(a,b)$ ou

$f(X) \leq f(A)$.

Finalement $\forall X \in \mathbb{R}^2$, $\|X - A\| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(X) \leq f(A)$.

Alors f admet en A un maximum local.

Remarque.- Ce maximum n'est pas global car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,0) = \lim\limits_{x \to +\infty} (4x^2 e^{2x}) = +\infty$.

Soit $A = (a,b)$ un point critique de f. $b = 2a$ ou $b = 2a + 2$.

Si $b = 2a$ f admet en A un minimum global qui vaut 0.

Si $b = 2a + 2$ f admet en A un maximum local qui vaut $4e^{-2}$.

(Q3) a) Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Posons $A=(\alpha u-\beta v,\ \beta u+\alpha v)$.

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc g admet un développement limité d'ordre 1 en A.

donné par $g(A+H)\underset{H\mapsto 0_{\mathbb{R}^2}}{=}g(A)+\langle\nabla g(A),H\rangle+o(\|H\|)$.

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\|(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta)\|=|\varepsilon|\,\|(\alpha,\beta)\|$. donc $\lim\limits_{\varepsilon\mapsto 0}\|(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta)\|=0$

Alors $\underline{g(A+(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta))}\underset{\varepsilon\mapsto 0}{=}\underline{g(A)+\langle\nabla g(A),(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta)\rangle+o(\|(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta)\|)}$.

Notons que $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}$, $A+(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta)=(\alpha u-\beta v,\beta u+\alpha v)+(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta)$.

Ainsi $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}$, $A+(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta)=(\alpha(u+\varepsilon)-\beta v,\ \beta(u+\varepsilon)+\alpha v)$.

donc $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\underline{g(A+(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta))}=g(\alpha(u+\varepsilon)-\beta v,\ \beta(u+\varepsilon)+\alpha v)=\underline{h(u+\varepsilon,v)}$.

On a également $\underline{g(A)}=g(\alpha u-\beta v,\beta u+\alpha v)=\underline{h(u,v)}$.

$\underline{\langle\nabla g(A),(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta)\rangle}=\varepsilon\langle\nabla g(A),(\alpha,\beta)\rangle=\varepsilon\left(\alpha\frac{\partial g}{\partial x}(A)+\beta\frac{\partial g}{\partial y}(A)\right)=\varepsilon\times 0=\underline{0}$.

Finalement $h(u+\varepsilon,v)\underset{\varepsilon\mapsto 0^+}{=}h(u,v)+o(\|(\varepsilon\alpha,\varepsilon\beta)\|)$.

$h(u+\varepsilon,v)\underset{\varepsilon\mapsto 0^+}{=}h(u,v)+o(|\varepsilon|\,\|(\alpha,\beta)\|)$

ou encore $\underline{\underline{h(u+\varepsilon,v)\underset{\varepsilon\mapsto 0}{=}h(u,v)+o(\varepsilon)}}$ A réditer

$\underline{\underline{\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ h(u+\varepsilon,v)\underset{\varepsilon\mapsto 0}{=}h(u,v)+o(\varepsilon)}}$

b) Fixons v dans $\mathbb{R}$ et posons $\forall u\in\mathbb{R}$, $\ell_v(u)=h(u,v)$.

d'après ce qui précède : $\forall u\in\mathbb{R}$, $\ell_v(u+\varepsilon)\underset{\varepsilon\mapsto 0^+}{=}\ell_v(u)+o(\varepsilon)$.

Ainsi $\forall u\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{\varepsilon\mapsto 0}\frac{\ell_v(u+\varepsilon)-\ell_v(u)}{\varepsilon}=0$

donc pour tout u dans $\mathbb{R}$, ℓ_v est dérivable en u et de dérivée nulle en u.

Ainsi ℓ_v est constante sur $\mathbb{R}$.

Alors $\exists!\ C_v\in\mathbb{R}$, $\forall u\in\mathbb{R}$, $\ell_v(u)=C_v$. Posons $\forall v\in\mathbb{R}$, $\varphi(v)=C_v$.

1) φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) $\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$, $h(u,v)=h_v(u)=c_v=\varphi(v)$. $\underline{\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ h(u,v)=\varphi(v).}$

Notons que $\forall v\in\mathbb{R}$, $\varphi(v)=h(0,v)=g(-\beta v,\alpha v)$.

$v\mapsto -\beta v$ et $v\mapsto \alpha v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, par composition, $\underline{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

$\underline{\text{Il existe une fonction } \varphi \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telle que : } \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ h(u,v)=\varphi(v).}$

(Q4) (*) Notons que f a "les bonnes qualités".

- $\underline{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$ d'après Q2 a).
- $\underline{\forall A\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(A)+2\frac{\partial f}{\partial y}(A)=0}$ toujours d'après Q2 a).
- $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(0,t)=(2\times 0-t)^2e^{2\times 0-t}=(-t)^2e^{-t}=t^2e^{-t}$. $\underline{\forall t\in\mathbb{R},\ f(0,t)=t^2e^{-t}.}$

(*) Soit ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant : $\begin{cases}\forall A\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(A)+2\frac{\partial \psi}{\partial x}(A)=0\\ \forall t\in\mathbb{R},\ \psi(0,t)=t^2e^{-t}.\end{cases}$

Montrons que $\psi=f$.

Q3 permet de dire qu'il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$, $\psi(u-2v,2u+v)=\varphi(v)$ (prendre $\alpha=1,\beta=2,\ g=\psi$ ...)

Soit $(x,y,u,v)\in\mathbb{R}^4$.

$\begin{cases}u-2v=x\\2u+v=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{5}(x+2y)\\v=\frac{1}{5}(y-2x)\end{cases}$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Posons $u=\frac{1}{5}(x+2y)$ et $v=\frac{1}{5}(y-2x)$. Alors $\begin{cases}u-2v=x\\2u+v=y\end{cases}$

$\psi(x,y)=\psi(u-2v,2u+v)=\varphi(v)=\varphi(\frac{1}{5}(y-2x))$

$\underline{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \psi(x,y)=\varphi(\frac{1}{5}(y-2x))}$ En particulier $\psi(0,t)=\varphi(\frac{1}{5}t)$

Or $\forall t\in\mathbb{R}$, $\psi(0,t)=t^2e^{-t}$. Ainsi : $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi(\frac{1}{5}t)=\psi(0,t)=t^2e^{-t}$.

Ainsi $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\psi(x,y)=\varphi(\frac{1}{5}(y-2x))=(y-2x)^2e^{-(y-2x)}=(2x-y)^2e^{2x-y}$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\psi(x,y)=f(x,y)$. $\underline{\psi=f.}$ Finalement :

$\underline{f \text{ est la seule fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ vérifiant}}$ $\begin{cases}\forall A\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(A)+2\frac{\partial f}{\partial y}(A)=0\\ \forall t\in\mathbb{R},\ f(0,t)=t^2e^{-t}\end{cases}$

Exercice principal S52

1. Question de cours : Inégalité des accroissements finis pour une fonction réelle d'une variable réelle.

Soit f une fonction définie et continue sur $]0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ soit convergente.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $u_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(t)\,dt$.

2.a) Proposer une interprétation de $\frac{u_n(f)}{n}$ en terme d'aires et indiquer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$, dans le cas où f admet un prolongement continu au segment $[0,1]$.

b) On suppose dans cette question que f est la fonction $t \mapsto t^2$.

Calculer $u_n(f)$ et vérifier que la suite $\left(u_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

3. Dans cette question, f est une fonction continue positive et croissante sur $]0,1]$.

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$.

b) Montrer que la suite $\left(u_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et majorée.

4. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que si f admet un prolongement de classe C^1 au segment $[0,1]$, alors la suite $\left(u_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

5. Pour tout réel α, on note f_α la fonction définie sur $]0,1]$ par $f_\alpha(t) = t^\alpha$.

Déterminer pour quelles valeurs de α l'intégrale $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$ est convergente et la suite $\left(u_n(f_\alpha)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornée.

Exercice sans préparation S52

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle\, , \rangle$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle .$$

1. Que peut-on dire de la matrice d'un élément $f \in \mathcal{A}(E)$ dans une base orthonormée de E ?

2. On note $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble des endomorphismes g de E qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{A}(E)$, c'est-à-dire qui vérifient :

$$\forall f \in \mathcal{A}(E),\ f \circ g = g \circ f .$$

a) Montrer que lorsque la dimension de E est égale à 2, $\mathcal{C}(E)$ est un plan vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $\mathcal{A}(E)$.

b) Trouver $\mathcal{C}(E)$ lorsque la dimension de E est strictement supérieure à 2.

Exercice principal S54

1. Question de cours : Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Que peut-on dire de sa matrice dans une base orthonormale ?

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ est muni du produit scalaire usuel, noté $\langle\, ,\rangle$, pour lequel la base canonique est orthonormale.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ dont M est la matrice dans la base canonique.

2.a) Montrer que la matrice M n'est pas inversible.

b) Montrer que l'endomorphisme $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ est symétrique.

3.a) Montrer que pour tout couple (x, y) de vecteurs de $\mathbb{R}^5$, on a : $\langle \varphi(x), y\rangle = -\langle x, \varphi(y)\rangle$.

b) Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme φ^2 sont négatives ou nulles.

c) En déduire que M n'est pas diagonalisable.

4.a) Montrer que le noyau de φ et l'image de φ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathbb{R}^5$.

b) Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de φ^2 et x un vecteur propre de φ^2 associé à λ, alors les deux vecteurs x et $\varphi(x)$ engendrent un plan de $\mathbb{R}^5$ qui est stable par l'endomorphisme φ.

c) Établir l'existence de deux réels non nuls α et β, et d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle la matrice de φ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice sans préparation S54

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]-1, +1[$.

1. Trouver toutes les fonctions ϕ définies, continues et strictement monotones sur $]-1, +1[$ telles que la variable aléatoire $Y = \phi(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

2. En déduire une fonction paire ψ définie sur $]-1, +1[$ telle que la variable aléatoire $\psi(X)$ suive aussi la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice principal S 60

(Q1) E est un espace vectoriel euclidien. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire sur E.
Un endomorphisme symétrique de E est un endomorphisme f de E tel que
$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle f(x),y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.
La matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale est symétrique.

(Q2) a) Notons C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 les colonnes de M... dans l'ordre.

$C_1+C_3+C_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = 0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}$. $1\times C_1 + 1\times C_3 + 1\times C_5 = 0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}$ et $(1,1,1)\neq(0,0,0)$.

Ainsi la famille (C_1, C_3, C_5) est liée. Il en est de même de la famille $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$.
Ainsi $\dim \mathrm{Vect}(C_1,C_2,C_3,C_4,C_5) < 5$. Donc $\mathrm{rg}\, M < 5$. Alors M n'est pas inversible.

b) Notons que M est antisymétrique. ${}^tM = -M$.
Alors ${}^t(M^2) = {}^tM\,{}^tM = (-M)(-M) = M^2$. ${}^t(M^2) = M^2$.
Donc M^2 est une matrice symétrique.
φ^2 est un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$, qui est orthonormale pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$, est symétrique.
Ainsi ceci montre que φ^2 est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^5$.

(Q3) a) Rappelons que M est la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$ qui est orthonormale pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^5\times\mathbb{R}^5$. Soit X (resp. Y) la matrice de x (resp. y) dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$. MX (resp. MY) est la matrice de $\varphi(x)$ (resp. $\varphi(y)$) dans cette base.
$\langle\varphi(x),y\rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX\,{}^tM\,Y = {}^tX(-M)Y = -{}^tXMY = -\langle x,\varphi(y)\rangle$.
Ainsi $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^5\times\mathbb{R}^5,\ \langle\varphi(x),y\rangle = -\langle x,\varphi(y)\rangle$. φ est antisymétrique.

b) Soit λ une valeur propre de φ^2 et x un vecteur propre associé. $x\neq 0_{\mathbb{R}^5}$ et $\varphi^2(x)=\lambda x$.
$\lambda\|x\|^2 = \lambda\langle x,x\rangle = \langle\lambda x,x\rangle = \langle\varphi^2(x),x\rangle = -\langle\varphi(x),\varphi(x)\rangle = -\|\varphi(x)\|^2$.
Alors $\lambda = -\dfrac{\|\varphi(x)\|^2}{\|x\|^2}$ car $\|x\|^2\neq 0$ puisque $x\neq 0_{\mathbb{R}^5}$. Ainsi $\lambda = -\left(\dfrac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}\right)^2 \leqslant 0$

<u>Les valeurs propres de l'endomorphisme φ^2 sont négatives ou nulles.</u>

c) Soit λ une valeur propre réelle de M. $\exists X \in M_{5,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}$ et $MX = \lambda X$.

Alors $M^2 X = \lambda^2 X$ et $X \neq 0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi λ est une valeur propre de M^2 donc de φ^2.

Alors $\lambda^2 \leq 0$. Donc $\lambda = 0$.

La seule valeur propre possible de M dans $\mathbb{R}$ est 0. Or M n'est pas inversible donc 0 est valeur propre de M.

Ainsi $Sp_{\mathbb{R}} M = \{0\}$. Supposons M diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Alors $M_{5,1}(\mathbb{R}) = SEP(M, 0)$. Donc $\forall X \in M_{5,1}(\mathbb{R})$, $MX = 0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}$. Alors $M = 0_{M_5(\mathbb{R})}$!!

Ainsi <u>M n'est pas diagonalisable dans $M_5(\mathbb{R})$.</u>

Q4 a) Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4), \varphi(e_5))$.

$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}(e_2, -e_1+e_3, -e_2+e_4, -e_3+e_5, -e_4) = \mathrm{Vect}(e_2, e_4, -e_1+e_3, -e_3+e_5)$.

$(e_2, e_4, -e_1+e_3, -e_3+e_5)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,\varphi$. Montrons que cette famille est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha e_2 + \beta e_4 + \gamma(-e_1+e_3) + \delta(-e_3+e_5) = 0_{\mathbb{R}^5}$.

Ainsi $-\gamma e_1 + \alpha e_2 + (\gamma - \delta) e_3 + \beta e_4 + \delta e_5 = 0_{\mathbb{R}^5}$.

La liberté de $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ donne : $-\gamma = \alpha = \gamma - \delta = \beta = \delta = 0$. Alors $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Ceci achève de montrer que <u>$\widetilde{\mathcal{B}}_2 = (e_2, e_4, -e_1+e_3, -e_3+e_5)$ est une base de $\mathrm{Im}\,\varphi$.</u>

$\varphi(e_1) + \varphi(e_3) + \varphi(e_5) = e_2 + (-e_2+e_4) + (-e_4) = 0_{\mathbb{R}^5}$; $\varphi(e_1+e_3+e_5) = 0_{\mathbb{R}^5}$.

Ainsi $e_1+e_3+e_5$ est un élément non nul de $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

$\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim \mathbb{R}^5 - \dim \mathrm{Im}\,\varphi = 5-4 = 1$. $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est une droite vectorielle.

Alors <u>$\widetilde{\mathcal{B}}_1 = (e_1+e_3+e_5)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$.</u>

$\langle e_2, e_1+e_3+e_5 \rangle = 0$; $\langle e_4, e_1+e_3+e_5 \rangle = 0$; $\langle -e_1+e_3, e_1+e_3+e_5 \rangle = -1+1 = 0$,

$\langle -e_3+e_5, e_1+e_3+e_5 \rangle = -1+1 = 0$.

Ainsi les éléments de $\widetilde{\mathcal{B}}_2$ sont orthogonaux à l'élément de $\widetilde{\mathcal{B}}_1$.

Alors $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\,\varphi$ sont orthogonaux. En particulier $\ker\varphi \cap \mathrm{Im}\,\varphi = \{0_{\mathbb{R}^5}\}$.

De plus $\dim \ker\varphi + \dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \mathbb{R}^5$ d'après le théorème du rang.

Ainsi <u>$\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\,\varphi$ sont deux sous-espaces de $\mathbb{R}^5$, supplémentaires et orthogonaux.</u>

<u>b)</u> Soit λ une valeur propre non nulle de φ^2. Soit x un vecteur propre de φ^2 associé à λ.

Supposons $(x, \varphi(x))$ liée. Comme x n'est pas nul : $\exists\, \delta \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \delta x$.

Alors $\lambda x = \varphi^2(x) = \delta^2 x$; $(\lambda - \delta^2)x = 0_{\mathbb{R}^5}$ et $x \neq 0_{\mathbb{R}^5}$. Ainsi $\lambda - \delta^2 = 0$.

Alors $\lambda = \delta^2$ et $\delta^2 \geqslant 0$. Donc $\lambda \geqslant 0$ et $\lambda \neq 0$. Alors $\lambda > 0$.

Ceci est impossible car les valeurs propres de φ^2 sont des réels négatifs ou nuls.

Finalement $(x, \varphi(x))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^5$.

Posons $F = \mathrm{Vect}(x, \varphi(x))$. F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^5$.

$\varphi(F) = \varphi(\mathrm{Vect}(x, \varphi(x))) = \mathrm{Vect}(\varphi(x), \varphi^2(x)) = \mathrm{Vect}(\varphi(x), \lambda^2 x) \overset{\lambda^2 \neq 0}{=} \mathrm{Vect}(\varphi(x), x) = \mathrm{Vect}(x, \varphi(x)) = F$.

Ceci suffit largement pour dire que F est stable par φ.

<u>Si λ est une valeur propre de non nulle de φ^2 et x un vecteur propre de φ^2 associé à λ alors les deux vecteurs x et $\varphi(x)$ engendrent un plan de $\mathbb{R}^5$ qui est stable par φ.</u>

<u>c)</u> Cherchons les valeurs propres et les sous-espaces propres de M^2 puis de φ^2.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

$$M^2 X = \lambda X \iff \begin{cases} -x + z = \lambda x \\ -2y + t = \lambda y \\ x - 2z + w = \lambda z \\ y - 2t = \lambda t \\ z - w = \lambda w \end{cases} \iff \begin{cases} z = (\lambda+1)x \\ t = (\lambda+1)y \\ y = (\lambda+2)t \\ z = (\lambda+1)w \\ x - (2+\lambda)z + w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = (\lambda+1)x = (\lambda+1)w \\ t = (\lambda+2)y \\ y = (\lambda+2)^2 y \\ x - (2+\lambda)z + w = 0 \end{cases}$$

<u>1er cas</u> – $\lambda + 1 \neq 0$ et $(\lambda+2)^2 \neq 1$ ce qui signifie $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq -3$

$$M^2 X = \lambda X \iff \begin{cases} x = w \\ y = 0 \\ t = 0 \\ z = (\lambda+1)x \\ 0 = x - (2+\lambda)z + w = x\big(1 - (2+\lambda)(\lambda+1) + 1\big) = -\lambda(\lambda+3)x \end{cases} \overset{\lambda \neq -3}{\iff} \begin{cases} y = 0 \\ t = 0 \\ w = x \\ z = (\lambda+1)x \\ -\lambda x = 0 \end{cases}$$

a) $\lambda \neq 0$.

$$M^2X=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ t=0 \\ w=x \\ z=(\lambda+1)x \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=t=w=0 \Leftrightarrow X=0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}.$$

Ainsi λ n'est pas valeur propre de M^2.

b) $\lambda=0$

$$M^2X=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ t=0 \\ w=x \\ z=x \end{cases}.$$ 0 est valeur propre de M^2 et $SEP(M^2,0)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

2ème cas.. $\lambda=-1$.

$$M^2X=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ t=y \\ x-z+w=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ t=y \\ w=-x \end{cases}$$

$$\{X\in M_{5,1}(\mathbb{R}) \mid M^2X=-X\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\\y\\-x\end{pmatrix} ; (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\neq\{0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}\}$$

Alors -1 est valeur propre et $SEP(M^2,-1)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Remarque.. On a clairement $\dim SEP(M^2,-1)=2$ car $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre nous le retrouverons plus bas.

3ème cas.. $\lambda=-3$

$$M^2X=\lambda X \Leftrightarrow M^2X=-3X \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x=-2w \\ t=-y \\ y=(-1)^2y \\ x+z+w=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=x \\ z=-2x \\ t=-y \\ 0=x-2x+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x \\ w=x \\ t=-y \end{cases},$$

$$\{X\in M_{5,1}(\mathbb{R}) \mid M^2X=-3X\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\-2x\\-y\\x\end{pmatrix} ; (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right)\neq\{0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}\}.$$

Ainsi -3 est valeur propre de M^2 et $SEP(M^2,-3)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$

Remarque.. $\dim SEP(M^2,-3)=2$ car la famille

$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $M_{5,1}(\mathbb{R})$. Nous le retrouverons plus bas.

Exercice.. Trouver une matrice orthogonale P de $M_5(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPM^2P=\mathrm{Diag}(0,-1,-1,-3,-3)$

▼ <u>Remarques</u>.. 1) $Sp\,\Pi^2 = \{0,-1,-3\}$, Π^2 est diagonalisable, $\dim SEP(\Pi^2;0)=1$,
$1 \le \dim SEP(\Pi^2;-1) \le 2$, $1 \le \dim SEP(\Pi^2;-3) \le 2$.

Alors $\dim SEP(\Pi^2;-1) = \dim SEP(\Pi^2;-3) = 2$ ... ce qui était attendu.

2) $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(\Pi^2;0)$. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base orthogonale de $SEP(\Pi^2;-1)$ et

$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base orthogonale de $SEP(\Pi^2;-3)$.

Ainsi $\left(\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormée de $SEP(\Pi^2;0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormée de

$SEP(\Pi^2;-1)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormée de $SEP(\Pi^2;-3)$.

3) $Sp\,\varphi^2 = Sp\,\Pi^2 = \{0,-1,-3\}$.

4) $\mathcal{B}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt3}(e_1+e_3+e_5)\right)$ est une base orthonormée de $SEP(\varphi^2,0)$.

$\mathcal{B}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt2}(e_1-e_5), \frac{1}{\sqrt2}(e_2+e_4)\right)$ est une base orthonormée de $SEP(\varphi^2;-1)$.

$\mathcal{B}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt2}(e_2-e_4), \frac{1}{\sqrt6}(e_1-2e_3+e_5)\right)$ est une base orthonormée de $SEP(\varphi^2;-3)$.

$SEP(\varphi^2,0)$, $SEP(\varphi^2;-1)$ et $SEP(\varphi^2;-3)$ sont deux à deux orthogonaux (φ^2 est symétrique)

et $\mathbb{R}^5 = SEP(\varphi^2,0) \oplus SEP(\varphi^2;-1) \oplus SEP(\varphi^2;-3)$ (φ^2 est diagonalisable).

Alors "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$" est une base orthonormée de $\mathbb{R}^5$ constituée de vecteurs propres de φ^2

associée aux valeurs propres $0,-1,-1,-3,-3$.

$M_{\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup\mathcal{B}_3}(\varphi^2) = \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-3&0\\0&0&0&0&-3\end{pmatrix}$. La matrice de passage de (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) à la

base $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup\mathcal{B}_3$ est la matrice orthogonale : $\begin{pmatrix}1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & 0 & 0 & 1/\sqrt6\\ 0 & 0 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 & 0\\ 1/\sqrt3 & 0 & 0 & 0 & -2/\sqrt6\\ 0 & 0 & 1/\sqrt2 & -1/\sqrt2 & 0\\ 1/\sqrt3 & -1/\sqrt2 & 0 & 0 & 1/\sqrt6\end{pmatrix}$. ▼

• Posons $u_1 = \frac{1}{\sqrt3}(e_1+e_3+e_5)$. u_1 appartient à $\operatorname{Ker}\varphi$ (voir p 2).

Donc $\mathcal{B}_1 = (u_1)$ est une base orthonormée de $\operatorname{Ker}\varphi$ ($\dim \operatorname{Ker}\varphi = 1$).

<u>$\varphi(u_1) = 0_{\mathbb{R}^5}$.</u>

- Posons $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_5)$. u_2 est un vecteur propre de φ^2 associé à la valeur propre -1.
  Alors $F_2 = \text{Vect}(u_2, \varphi(u_2))$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^5$ stable par φ.
  Notons que $\varphi(u_2) = \varphi(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_5)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_4)$. Posons $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_4)$; $u_3 \in F_2$

$(u_2, u_3) = \mathcal{B}_2$ est une base orthonormée de $SEP(\varphi^2, -1)$ (voir la remarque).
Ainsi $\mathcal{B}_2 = (u_2, u_3)$ est une famille orthonormée du plan vectoriel F_2.
Ainsi $\mathcal{B}_2 = (u_2, u_3)$ est une base orthonormée de F_2 et $F_2 = SEP(\varphi^2, -1)$.

$u_3 = \varphi(u_2)$ et $\varphi(u_3) = \varphi^2(u_2) = -u_2$. $\underline{\underline{\varphi(u_2) = u_3 \text{ et } \varphi(u_3) = -u_2}}$.

- Posons $u_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_4)$. u_4 est un vecteur propre de φ^2 associé à la valeur propre -3. Alors $F_3 = \text{Vect}(u_4, \varphi(u_4))$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^5$ stable par φ.

$\varphi(u_4) = \varphi(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_4)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + 2e_3 - e_5) = -\sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_3 + e_5)$.

Posons $u_5 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2e_1 - 2e_3 + e_5)$. $\varphi(u_4) = -\sqrt{3}\,u_5$.

$F_3 = \text{Vect}(u_4, \varphi(u_4)) = \text{Vect}(u_4, -\sqrt{3}\,u_5) = \text{Vect}(u_4, u_5) = SEP(\varphi^2, -3)$.

Ainsi $\mathcal{B}_3$ est une base orthonormée de F_3 et de $SEP(\varphi^2, -3)$.

$\varphi(u_4) = -\sqrt{3}\,u_5$. $\varphi(u_5) = \varphi(-\frac{1}{\sqrt{3}}\varphi(u_4)) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\varphi^2(u_4) \underset{\substack{\uparrow \\ u_4 \in SEP(\varphi^2, -3)}}{=} -\frac{1}{\sqrt{3}}(-3u_4) = \sqrt{3}\,u_4$.

$\underline{\underline{\varphi(u_4) = -\sqrt{3}\,u_5 \text{ et } \varphi(u_5) = \sqrt{3}\,u_4}}$.

Posons $\alpha = -1$ et $\beta = \sqrt{3}$.

1) Comme nous l'avons vu dans la remarque précédente $\widehat{\mathcal{B}} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ est base orthonormée de $\mathbb{R}^5$ car $\widehat{\mathcal{B}} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = $ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$".

2) $\varphi(u_1) = 0_{\mathbb{R}^5}$, $\varphi(u_2) = u_3 = -\alpha u_3$, $\varphi(u_3) = -u_2 = \alpha u_2$, $\varphi(u_4) = -\sqrt{3}\,u_5 = -\beta u_5$ et $\varphi(u_5) = \sqrt{3}\,u_4 = \beta u_4$.

Ainsi $$\underline{\underline{M_{\widehat{\mathcal{B}}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}}}.$$

Si vous trouvez des erreurs importantes me le dire

Exercice principal S60

1. Question de cours : Définition et propriétés des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.

2. Dans cette question, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ que l'on munit du produit scalaire usuel pour lequel la base canonique (e_1, e_2, e_3) est orthonormée.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, 2x_1 + 2x_3).$$

a) Trouver la matrice de u dans la base canonique et en déduire que u est symétrique.

b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$, puis montrer que $(u(e_1), u(e_2))$ est une base orthogonale de $\operatorname{Im} u$.

c) Déterminer la matrice du projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Dans la suite de l'exercice, $(E, \langle\,,\rangle)$ est un espace euclidien et on note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle\,,\rangle$.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E, x un vecteur de E et $y = p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F.
Montrer que pour tout $z \in F$, on a : $\|x - z\| \geqslant \|x - y\|$, avec égalité si et seulement si $z = y$.

4. Soit u un endomorphisme symétrique de $(E, \langle\,,\rangle)$. On note p le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires et orthogonaux.

b) Soit $x \in E$. Justifier l'existence d'un vecteur $y_0 \in E$ tel que $u(y_0) = p(x)$ et trouver parmi les vecteurs $y \in E$ vérifiant $u(y) = p(x)$, celui qui a la plus petite norme ; on le note $v(x)$.

c) Montrer que v est linéaire, puis calculer $u \circ v$ et $u \circ v \circ u$.

d) Calculer $p(x)$ et $v(x)$ pour $x = (1, 1, 1)$, lorsque u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de la question 2.

Exercice sans préparation S60

Soit X une variable aléatoire possédant une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}$ et nulle hors de l'intervalle $]-1, +1[$.

1. Montrer que X possède une variance, qui est strictement comprise entre 0 et 1.

2. Montrer que toute valeur de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ est effectivement possible pour la variance de X.

Exercice principal S 60

(Q1) E est un espace vectoriel euclidien. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est son produit scalaire.

- $f \in \mathcal{L}(E)$. f est symétrique si $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.
- $f \in \mathcal{L}(E)$. f est symétrique si et seulement si il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f)$ est symétrique.
- $f \in \mathcal{L}(E)$. f est symétrique si et seulement si pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique.
- L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- Si f est un automorphisme symétrique de E, f^{-1} est un automorphisme symétrique de E.
- Soit f un endomorphisme symétrique de E
  - → les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.
  - → si $(u_k)_{1 \leq k \leq p}$ est une famille de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes alors la famille $(u_k)_{1 \leq k \leq p}$ est une famille orthogonale de E.
  - → f est diagonalisable
  - → il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f.

(Q2) Nous notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire proposé et $\|\cdot\|$ la norme associée.

$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\forall (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, $\langle (x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2,y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

(*)

a) $u(e_1) = u((1,0,0)) = (1,1,2)$. $u(e_2) = u((0,1,0)) = (1,-1,0)$ et $u(e_3) = u((0,0,1)) = (2,0,2)$.

Ainsi $\underline{\underline{\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$. Nous noterons dans la suite de cette question A cette matrice.

${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$. A est symétrique. La matrice de u dans la base orthonormée (e_1,e_2,e_3) est symétrique. Ainsi $\underline{u \text{ est symétrique}}$.

(*) Notons que (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

b) Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ un élément de $E = \mathbb{R}^3$.

$x \in \ker u \iff u(x) = 0_E \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-y=0 \\ 2x+2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = -x \\ 0 = x + x - 2x \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = -x \end{cases}$

$\ker u = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E \mid y = x \text{ et } z = -x\} = \{xe_1 + xe_2 - xe_3 \ ; \ x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)$

Comme $e_1 + e_2 - e_3 \neq 0_E$: $\underline{e_1 + e_2 - e_3 \text{ est une base de } \ker u}$. $\underline{\dim \ker u = 1}$.

$u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont deux éléments de $\operatorname{Im} u$.

$\langle u(e_1), u(e_2)\rangle = \langle (1,1,2), (1,-1,0)\rangle = 1\times 1 + 1\times(-1) + 2\times 0 = 0$. De plus $u(e_1)$ et $u(e_2)$ ne sont pas nuls. Alors $(u(e_1), u(e_2))$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls de $\operatorname{Im} u$.

donc $(u(e_1), u(e_2))$ est une famille libre et orthogonale de deux éléments de $\operatorname{Im} u$

et $\dim \operatorname{Im} u = \dim E - \dim \ker u = 3 - 1 = 2$. Alors $\underline{\underline{(u(e_1), u(e_2)) \text{ est une base orthogonale de } \operatorname{Im} u}}$.

c) Soit p le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u$.

$p(u(e_1)) = u(e_1)$ et $p(u(e_2)) = u(e_2)$; $p(e_1 + e_2 + 2e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3$ et $p(e_1 - e_2) = e_1 - e_2$.

donc $\begin{cases} p(e_1) + p(e_2) + 2p(e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3. \\ p(e_1) - p(e_2) = e_1 - e_2 \end{cases}$

$\langle e_1 + e_2 - e_3, u(e_1)\rangle = \langle e_1 + e_2 - e_3, e_1 + e_2 + 2e_3\rangle = 1\times 1 + 1\times 1 + (-1)\times 2 = 0$.

$\langle e_1 + e_2 - e_3, u(e_2)\rangle = \langle e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2\rangle = 1\times 1 + 1\times(-1) + (-1)\times 0 = 0$.

$e_1 + e_2 - e_3$ est orthogonal à $u(e_1)$ et $u(e_2)$. Or $\operatorname{Im} u = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2))$.

Ainsi $e_1 + e_2 - e_3 \in (\operatorname{Im}(u))^\perp$. Alors $p(e_1) + p(e_2) - p(e_3) = p(e_1 + e_2 - e_3) = 0_E$.

Finalement $\begin{cases} p(e_1) + p(e_2) + 2p(e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3 & (1) \\ p(e_1) - p(e_2) = e_1 - e_2 & (2) \\ p(e_1) + p(e_2) - p(e_3) = 0_E & (3) \end{cases}$

(1)-(3) donne $3p(e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3$; $p(e_3) = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + 2e_3)$.

$\begin{cases} p(e_1) - p(e_2) = e_1 - e_2 & (2) \\ p(e_1) + p(e_2) = p(e_3) = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + 2e_3) & (4) \end{cases}$

(2)+(4) donne $2p(e_1) = e_1 - e_2 + \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + 2e_3)$; $p(e_1) = \frac{1}{6}\left(4e_1 - 2e_2 + 2e_3\right) = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + e_3)$

(4)-(2) donne $2p(e_2) = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + 2e_3) - e_1 + e_2$; donc $p(e_2) = \frac{1}{6}\left(-2e_1 + 4e_2 + 2e_3\right) = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + e_3)$

Alors la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}\,u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1 : notons que p est la projection sur $\mathrm{Im}\,u$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,u$ car $\mathrm{Ker}\,u = (\mathrm{Im}\,u)^{\perp}$.

Remarque 2 : notons que cette matrice est symétrique car c'est la matrice dans une base orthonormée d'une projection orthogonale donc d'un endomorphisme symétrique.

(Q3) C'est du cours !

Soit $z \in F$. $\|x-z\|^2 = \|\underbrace{(x-y)}_{\in F^{\perp}} + \underbrace{(y-z)}_{\in F}\|^2 \overset{\text{Pythagore}}{=} \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2$

donc $\forall z \in F-\{y\}$, $\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \underset{\neq y}{>} \|x-y\|^2$.

Comme $\|x-z\| \geq 0$ et $\|x-y\| \geq 0$: $\forall z \in F-\{y\}, \|x-z\| > \|x-y\|$.

Notons que si $z = y$: $z \in F$ et $\|x-z\| = \|x-y\|$.

Ainsi pour tout $z \in F$, on a : $\|x-z\| \geq \|x-y\|$, avec égalité si et seulement $z = y$.

(Q4) a) Soit $x \in \mathrm{Ker}\,u$ et soit $z \in \mathrm{Im}\,u$. $\exists t \in E$, $z = u(t)$.

$\langle x, z\rangle = \langle x, u(t)\rangle = \langle u(x), t\rangle = \langle 0_E, t\rangle = 0$.

$\forall x \in \mathrm{Ker}\,u, \forall z \in \mathrm{Im}\,u, \langle x, z\rangle = 0$. $\mathrm{Ker}\,u$ et $\mathrm{Im}\,u$ sont orthogonaux.

En particulier $\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Im}\,u = \{0_E\}$.

$\dim \mathrm{Ker}\,u + \dim \mathrm{Im}\,u = \dim E < +\infty$ (d'après le théorème du rang

E est un espace vectoriel euclidien.

Les trois points précédents montrent que $\mathrm{Ker}\,u$ et $\mathrm{Im}\,u$ sont supplémentaires et orthogonaux dans E.

b) Soit $x \in E$. $p(x) \in \mathrm{Im}\,u$ donc il existe un vecteur y_0 de E tel que $u(y_0) = p(x)$.

$\exists ! (y_1, y_2) \in \mathrm{Ker}\,u \times \mathrm{Im}\,u$, $y_0 = y_1 + y_2$. Notons que $y_2 = p(y_0)$.

Alors $p(x) = u(y_0) = u(y_1+y_2) = u(y_1) + u(y_2) = u(y_2)$

$y_2 \in \mathrm{Im}\,u$ et $u(y_2) = p(x)$.

Soit $y \in E$. $u(y)=p(x) \Leftrightarrow u(y)=u(y_2) \Leftrightarrow u(y-y_2)=0 \Leftrightarrow \exists t\in \operatorname{Ker} u,\ y-y_2=t$.

Ainsi $\{y\in E \mid u(y)=p(x)\} = \{y_2+t\ ;\ t\in\operatorname{Ker}u\}$.

$\forall t\in \operatorname{Ker} u$, $\|y_2+t\|^2 = \|y_2\|^2+\|t\|^2$.

$y_2\in \operatorname{Im} u$ et $t\in\operatorname{Ker}(u)$ | $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont orthogonaux

$\forall t\in \operatorname{Ker}u-\{0_E\}$, $\|y_2+t\|^2>\|y_2\|^2$; $\forall t \in \operatorname{Ker}u-\{0_E\}$, $\|y_2+t\|>\|y_2\|$.

Ainsi y_2 est le vecteur de $\{y_2+t\ ;\ t\in \operatorname{Ker}u\}$ de plus petite norme.

Alors y_2 est le vecteur de $\{y\in E \mid u(y)=p(x)\}$ de plus petite norme.

Donc $p(y_0)$ est le vecteur de $\{y\in E \mid u(y)=p(x)\}$ de plus petite norme sachant que y_0 est un élément de E tel que $u(y_0)=p(x)$.

Remarque : $v(x)$ est l'unique élément de $\operatorname{Im} u \cap \{y\in E \mid u(y)=p(x)\}$ ou de $\operatorname{Im} p \cap \{y\in E \mid u(y)=p(x)\}$

c) • v est une application de E dans E.

• $u(\lambda v(x)+v(y)) = \lambda u(v(x))+u(v(y)) = \lambda p(x)+p(y) = p(\lambda x+y)$.

Ainsi $\lambda v(x)+v(y) \in \{y\in E \mid u(y)=p(\lambda x+y)\}$.

! !

$\lambda v(x)+v(y)$ vérifie $u(\lambda v(x)+v(y))=p(\lambda x+y)$.

Ainsi $v(\lambda x+y)= p(\lambda v(x)+v(y))$ d'après ce que nous avons vu dans b) car $v(x)$ (resp. $v(y)$) est l'image par p d'un élément de E (b) !).

Ainsi $v(x)\in \operatorname{Im}p$ et $v(y)\in\operatorname{Im}p$. Alors $\lambda v(x)+v(y)\in \operatorname{Im} p$.

Donc $v(\lambda x+y)=p(\lambda v(x)+v(y)) = \lambda v(x)+v(y)$.

Finalement $\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $\forall (x,y)\in E^2$, $v(\lambda x+y)=\lambda v(x)+v(y)$. v est linéaire.

Ainsi v est un endomorphisme de E.

Soit $x\in E$. $u(v(x))=p(x)$ car $v(x)$ est un vecteur de $\{y\in E \mid u(y)=p(x)\}$.

$\forall x\in E$, $u(v(x))=p(x)$. $u\circ v = p$.

$u \circ v \circ u = p \circ u = u$ car $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ke}(p - \mathrm{Id}_E)$ ... donc $\forall x \in E, p(u(x)) = u(x)$.

$\underline{u \circ v \circ u = u}$.

d) Conseil $\bar{c}$ Q1. $\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(p)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Ainsi $p(e_1+e_2+e_3) = \frac{2}{3}(e_1+e_2+2e_3) = \frac{2}{3}u(e_1) = u(\frac{2}{3}e_1)$.

$\frac{2}{3}e_1 \in \{y \in E \mid u(y) = p(e_1+e_2+e_3)\}$

donc $v(e_1+e_2+e_3)$ est la projection orthogonale de $\frac{2}{3}e_1$ sur $\mathrm{Im}\, p$.

$v(e_1+e_2+e_3) = p(\frac{2}{3}e_1) \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{9}[2e_1 - e_2 + e_3]$.

via $\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(p)$

$\underline{v(e_1+e_2+e_3) = \frac{2}{9}(2e_1 - e_2 + e_3)}$ ou $\underline{v((1,1,1)) = (\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{9})}$.

__Exercice.__ $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ est un élément quelconque de E.

calculer $p(x)$ et $v(x)$.

__Réponses__ $\underline{p(x) = \frac{1}{3}\left[(2x_1 - x_2 + x_3)e_1 + (-x_1 + 2x_2 + x_3)e_2 + (x_1 + x_2 + 2x_3)e_3\right]}$.

$\underline{v(x) = \frac{1}{18}\left[(-x_1 + 5x_2 + 4x_3)e_1 + (5x_1 - 7x_2 - 2x_3)e_2 + (4x_1 - 2x_2 + 2x_3)e_2\right]}$.

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(v) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 5 & -7 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

__si vous trouvez des erreurs importantes me le dire.__

Exercice principal S62

1. Question de cours : Définition de la limite d'une suite de nombres réels.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sup(u_k,\ k \geqslant n)$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

b) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{p}\right| > \varepsilon\right)$.

4.a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant n$, on a : $P(S_n = k) = \dbinom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.

b) Que vaut $P(S_n = k)$ lorsque $k < n$?

5. Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, bornée et de dérivée bornée sur $[1, +\infty[$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} f\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)\dbinom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$ est convergente.

On pose alors pour tout $x \in]0,1]$: $K_n(x) = x^n \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\dbinom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$

b) Établir l'existence de $E\left(f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right)$ et exprimer $E\left(f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right)$ en fonction de $K_n(p)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leqslant A\,\varepsilon + B\,P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right).$$

d) Soit $t \in [1, +\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left|K_n\left(\dfrac{1}{t}\right) - f(t)\right|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice sans préparation S62

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
On pose : $F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$
et $H = \{P \in E,\ P(X) = P(-X)\}$.

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice pricipal S 62

(Q1) $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels et ℓ est un élément de $\mathbb{R}$.

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers ℓ si : $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists p\in [\![n_0,+\infty [\![, \forall n\in [\![n_0,+\infty[\![, n\geqslant p \Rightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon$.

Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers ℓ, ℓ est l'unique réel qui vérifie :

$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists p\in [\![n_0,+\infty[\![, \forall n\in [\![n_0,+\infty[\![, n\geqslant p\Rightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon$; ℓ est la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et on la note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(Q2) a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\{u_k ; k\geqslant n+1\}\subset\{u_k ; k\geqslant n\}$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\operatorname{Sup}\{u_k ; k\geqslant n+1\}\leqslant \operatorname{Sup}\{u_k ; k\geqslant n\}$.

donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_{n+1}\leqslant v_n$. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. En particulier $\exists m\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}^*, m\leqslant u_n$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $m\leqslant u_n\leqslant \operatorname{Sup}\{u_k ; k\geqslant n\}=v_n$. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par m.

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée donc <u>$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.</u>

<u>b)</u> $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant u_n\leqslant \operatorname{Sup}\{u_k ; k\geqslant n\}=v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$. Alors par encadrement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

<u>Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.</u>

(Q3) • $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$

• Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possèdent une espérance commune égale à $\frac{1}{p}$ et une variance commune égale à $\frac{q}{p^2}$

La loi faible des grands nombres montre que la suite $\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{p}$.

Alors $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\geqslant\varepsilon\right)=0$.

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\geqslant\varepsilon\right)=0$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant P\left(\left\{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right\}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par croissance}}}{\leqslant} P\left(\left\{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\geqslant\varepsilon\right\}\right)$. Alors par encadrement il vient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right)=0.$

Q4 a) Montrons par récurrence sur n que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\begin{cases} S_n(\Omega)=[\![n,+\infty[\![\\ \text{et} \\ \forall k\in[\![n,+\infty[\![,\ P(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}\end{cases}$

- $S_1=X_1$. $S_1(\Omega)=X_1(\Omega)=[\![1,+\infty[\![$.

  $\forall k\in[\![1,+\infty[\![,\ P(S_1=k)=P(X_1=k)=p\,(1-p)^{k-1}=\binom{k-1}{1-1}p^1(1-p)^{k-1}.$

  Ainsi la propriété est vraie pour $n=1$.

- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

  $S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$. $S_n(\Omega)=[\![n,+\infty[\![$ et $X_{n+1}(\Omega)=[\![1,+\infty[\![$.

  Alors $S_{n+1}(\Omega)\overset{(*)}{=}[\![n+1,+\infty[\![$, non ?! Soit $k\in[\![n+1,+\infty[\![$. $(\{X_{n+1}=i\})_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.

  Ainsi $P(S_{n+1}=k)=\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}P(\{S_{n+1}=k\}\cap\{X_{n+1}=i\})=\sum_{i=1}^{+\infty}P(\{S_n=k-i\}\cap\{X_{n+1}=i\})$.

  $P(S_{n+1}=k)=\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}P(S_n=k-i)\,P(X_{n+1}=i)$ car $X_1,X_2,\dots,X_n$ sont indépendantes donc

  $S_n=X_1+X_2+\dots+X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes

  $P(S_{n+1}=k)=\displaystyle\sum_{i=1}^{k-n}P(S_n=k-i)P(X_{n+1}=i)$ car $S_n(\Omega)=[\![n,+\infty[\![$

  $P(S_{n+1}=k)\underset{\substack{\uparrow \\ \text{hypothèse de récurrence}}}{=}\displaystyle\sum_{i=1}^{k-n}\binom{k-i-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-i-n}\,p\,(1-p)^{i-1}=p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}\sum_{i=1}^{k-n}\binom{k-i-1}{n-1}.$

  $P(S_{n+1}=k)=p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}\Big[\underbrace{\binom{k-2}{n-1}+\binom{k-3}{n-1}+\dots+\binom{n-1}{n-1}}_{\binom{k-1}{n}\ \text{... ai connu !}}\Big]=\binom{k-1}{(n+1)-1}p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}.$

  $\forall k\in[\![n+1,+\infty[\![,\ P(S_{n+1}=k)=\binom{k-1}{(n+1)-1}p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n(\Omega)=[\![n,+\infty[\![$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall k\in[\![n,+\infty[\![,\ P(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$.

Remarques. 1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, S_n suit la loi de Pascal de paramètres n et p.

2. Au niveau de $(*)$ on pouvait se contenter de $S_{n+1}(\Omega)\subset[\![n+1,+\infty[\![$ et remarquer à la fin que $\forall k\in[\![n+1,+\infty[\![$, $P(S_{n+1}=k)\neq 0$. Donc $S_{n+1}(\Omega)=[\![n+1,+\infty[\![$.

b) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n(\Omega) = [\![n,+\infty[\![$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0,n-1]\!], P(S_n=k)=0$

(Q5) a) f est bornée sur $[1,+\infty[$. Alors $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in [1,+\infty[, |f(y)| \leq M$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f(1+\frac{k}{n})| \leq M$. Soit $x \in]0,1]$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k^2 \left|f(1+\frac{k}{n})\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k\right| = k^2 |f(1+\frac{k}{n})| \binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k^2 \left|f(1+\frac{k}{n})\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k\right| \leq k^2 M \binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$. (*)

Or $\binom{k+n-1}{n-1} = \frac{(k+n-1)(k+n-2)\cdots(k+1)}{(n-1)!} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^{n-1}}{(n-1)!}$

Ainsi $k^2 M \binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k \underset{k\to+\infty}{\sim} M \frac{1}{(n-1)!} k^{n+1}(1-x)^k$.

$1-x \in [0,1[$ donc par croissance comparée : $\lim\limits_{k\to+\infty}(k^{n+1}(1-x)^k) = 0$.

Alors $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(k^2 M \binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k\right) = 0$.

Par encadrement (*) donne : $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(k^2 \left|f(1+\frac{k}{n})\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k\right|\right) = 0$.

Ainsi
- $\left|f(1+\frac{k}{n})\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k\right| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^2} \geq 0$ (et, mais ce n'est pas utile, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \left|f(1+\frac{k}{n})\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k\right| \geq 0$)
- La série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\left|f(1+\frac{k}{n})\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k\right|$ converge.

Alors pour tout $x \in]0,1]$ la série de terme général $f(1+\frac{k}{n})\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$ est absolument convergente donc convergente.

b) $g : t \mapsto f(\frac{t}{n})$ est une fonction de la variable réelle dont le domaine de définition contient $S_n(\Omega) = [\![n,+\infty[\![$ car f est définie sur $[1,+\infty[$.

Alors $g_n(S_n)$ possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant n} g_n(k)\,P(S_n=k)$ est absolument convergente (théorème du transfert).

$f(\frac{S_n}{n})$ possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant n} f(\frac{k}{n})\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$ est absolument convergente.

$f(\frac{S_n}{n})$ possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0} f(\frac{k+n}{n})\binom{k+n-1}{n-1}p^n(1-p)^k$ est absolument convergente.

$\forall k\in\mathbb{N},\quad f(\frac{k+n}{n})\binom{k+n-1}{n-1}p^n(1-p)^k = p^n f(1+\frac{k}{n})\binom{k+n-1}{n-1}(1-p)^k.$

$p\in]0,1[$. Donc d'après a) la série de terme général $f(1+\frac{k}{n})\binom{k+n-1}{n-1}(1-p)^k$ est absolument convergente. Il en est de même pour la série $p^n f(1+\frac{k}{n})\binom{k+n-1}{n-1}(1-p)^k$ et pour la série $f(\frac{k+n}{n})\binom{k+n-1}{n-1}p^n(1-p)^k$! Alors $\underline{\underline{f(\frac{S_n}{n}) \text{ possède une espérance}}}$.

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=n}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n} \quad \text{(théorème de transfert)}$$

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = p^n\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k+n}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-p)^k = p^n\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-p)^k$$

Ainsi $\underline{\underline{E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = p^n\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-p)^k = K_n(p).}}$

c) Comme nous l'avons vu plus haut f est bornée sur $[1,+\infty[$ donc $\exists M\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall y\in[1,+\infty[,\ |f(y)|\leqslant M$.

f' est également bornée sur $[1,+\infty[$. $\exists \hat{M}\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall y\in[1,+\infty[,\ |f'(y)|\leqslant \hat{M}$.

f est C^1 sur $[1,+\infty[$. L'inégalité des accroissements finis et ce qui précède donne :

$\forall (a,b)\in[1,+\infty[^2,\quad |f(a)-f(b)|\leqslant \hat{M}\,|a-b|.$

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $A_n=\{\omega\in\Omega \mid |\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}|<\varepsilon\}$.

Soit $\omega\in\Omega$.

1) $\omega\in A_n$. $\left|f\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \underset{\uparrow}{\leqslant} \hat{M}\left|\frac{S_n(\omega)}{n}-f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leqslant \hat{M}\varepsilon = \hat{M}\varepsilon\,\mathbb{1}_{A_n}(\omega)$.

$\frac{S_n(\omega)}{n}\in[1,+\infty[$ et $\frac{1}{p}\in[1,+\infty[$

2) $\omega\notin A_n$. $\left|f\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leqslant \left|f\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right)\right|+\left|f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leqslant 2M = 2M\,\mathbb{1}_{\bar{A}_n}$

car $\frac{S_n(\omega)}{n}\in[1,+\infty[$ et $\frac{1}{p}\in[1,+\infty[$.

Car $\forall \omega \in A_n$, $\left|f\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq \hat{n}\,\varepsilon\, 1\!\!1_{A_n}(\omega) = \hat{n}\,\varepsilon\, 1\!\!1_{A_n}(\omega) + 0 = \hat{n}\,\varepsilon\, 1\!\!1_{A_n}(\omega) + 2M\, 1\!\!1_{\bar{A}_n}(\omega)$.

$\forall \omega \in \bar{A}_n$, $\left|f\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq 2M\, 1\!\!1_{\bar{A}_n}(\omega) = 0 + 2M\, 1\!\!1_{\bar{A}_n}(\omega) = \hat{n}\,\varepsilon\, 1\!\!1_{A_n}(\omega) + 2M\, 1\!\!1_{\bar{A}_n}(\omega)$.

Ainsi $\forall \omega \in \Omega$, $\left|f\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq \hat{n}\,\varepsilon\, 1\!\!1_{A_n}(\omega) + 2M\, 1\!\!1_{\bar{A}_n}(\omega)$.

Donc $\underline{\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq \hat{n}\,\varepsilon\, 1\!\!1_{A_n} + 2M\, 1\!\!1_{\bar{A}_n}}$.

Alors $-(\hat{n}\,\varepsilon\, 1\!\!1_{A_n} + 2M\, 1\!\!1_{\bar{A}_n}) \leq f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \hat{n}\,\varepsilon\, 1\!\!1_{A_n} + 2M\, 1\!\!1_{\bar{A}_n}$. $(**)$

$1\!\!1_{A_n}$ (resp. $1\!\!1_{\bar{A}_n}$) possède une espérance qui vaut $P(A_n)$ (resp. $P(\bar{A}_n)$).

Par combinaison linéaire $\hat{n}\,\varepsilon\, 1\!\!1_{A_n} + 2M\, 1\!\!1_{\bar{A}_n}$ possède une espérance qui vaut $\hat{n}\,\varepsilon\, P(A_n) + 2M\, P(\bar{A}_n)$. De même $-(\hat{n}\,\varepsilon\, 1\!\!1_{A_n} + 2M\, 1\!\!1_{\bar{A}_n})$ possède une espérance qui vaut $-(\hat{n}\,\varepsilon\, P(A_n) + 2M\, P(\bar{A}_n))$

$f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ possède une espérance d'après b) et la variable constante $\frac{1}{p}$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{p}$.

Alors $f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)$ possède une espérance qui vaut $E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)$. Alors en utilisant $(**)$ et la croissance de l'espérance il vient :

$-(\hat{n}\,\varepsilon\, P(A_n) + 2M\, P(\bar{A}_n)) \leq E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \hat{n}\,\varepsilon\, P(A_n) + 2M\, P(\bar{A}_n)$.

Ainsi $\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq \hat{n}\,\varepsilon\, P(A_n) + 2M\, P(\bar{A}_n) \underset{P(A_n) \leq 1}{\leq} \hat{n}\,\varepsilon + 2M\, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right)$.

Posons $A = \hat{n}$ et $B = 2M$. A et B sont indépendants de n et $\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq A\varepsilon + B\, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right)$

$\underline{\text{si } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \text{ il existe deux réels positifs ou nuls tels que } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq A\varepsilon + B\, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right).}$

$\underline{d)}$ Soit $t \in]1, +\infty[$. Posons $p = \frac{1}{t}$. $p \in]0,1[$.

Notons en utilisant la définition que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| = 0$ ce qui donnera

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left|K_n(p) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| = 0$ soit encore $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|K_n\left(\frac{1}{t}\right) - f(t)\right| = 0$.

Notons que $\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*, \exists r \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq r \Rightarrow \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2(\hat{n}+1)}$. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |E(f(\frac{S_n}{n}))-f(\frac{1}{p})|\leq A\varepsilon+B\,P(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}|>\varepsilon) \underset{q}{<} \frac{\varepsilon'}{2}+B\,P(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}|>\varepsilon)$

$\left| \begin{array}{l} A=\hat{n} \\ A\varepsilon=\varepsilon\hat{n}=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon(\hat{n}+1)}\hat{n}<\frac{\varepsilon'}{2} \end{array}\right.$

Dans Q3 nous avons vu que $\lim_{n\to+\infty} P(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}|>\varepsilon)=0$. Alors $\lim_{n\to+\infty}(B\,P(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}|>\varepsilon))=0$.

Donc $\exists r\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq r\Rightarrow B\,P(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}|>\varepsilon)=|B\,P(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}|>\varepsilon)|<\frac{\varepsilon'}{2}$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq r\Rightarrow |E(f(\frac{S_n}{n}))-f(\frac{1}{p})|<\frac{\varepsilon'}{2}+\frac{\varepsilon'}{2}=\varepsilon'$.

Finalement $\forall\varepsilon'\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists r\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq r\Rightarrow |E(f(\frac{S_n}{n}))-f(\frac{1}{p})|<\varepsilon'$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}|E(f(\frac{S_n}{n}))-f(\frac{1}{p})|=0$. $\lim_{n\to+\infty}|K_n(p)-f(\frac{1}{p})|=0$ et ceci pour tout $p\in]0,1[$

Donc $\lim_{n\to+\infty}|K_n(\frac{1}{t})-f(t)|=0$ et ceci pour tout $t\in]1,+\infty[$.

Rappelons que $\forall x\in]0,1],\ K_n(x)=x^n\sum_{\ell=0}^{+\infty}f(1+\frac{\ell}{n})\binom{\ell+n-1}{n-1}(1-x)^\ell$.

$\forall t\in[1,+\infty[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ K_n(\frac{1}{t})=(\frac{1}{t})^n\sum_{\ell=0}^{+\infty}f(1+\frac{\ell}{n})\binom{\ell+n-1}{n-1}(1-\frac{1}{t})^\ell$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ K_n(\frac{1}{1})=(\frac{1}{1})^n f(1+\frac{0}{n})\binom{0+n-1}{n-1}\times 1=f(1)$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ K_n(\frac{1}{1})-f(1)=0$. Alors $\lim_{n\to+\infty}|K_n(\frac{1}{1})-f(1)|=0$

Finalement $\forall t\in[1,+\infty[,\ \lim_{n\to+\infty}|K_n(\frac{1}{t})-f(t)|=0$. $\forall t\in[1,+\infty[,\ \lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

$\forall t\in[1,+\infty[,\ \lim_{n\to+\infty}K_n(\frac{1}{t})=f(t)$. $\forall x\in]0,1],\ \lim_{n\to+\infty}K_n(x)=f(\frac{1}{x})$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}(E(f(\frac{S_n}{n})))=f(\frac{1}{p})$.

si vous trouvez des erreurs importantes me le dire ...

Exercice principal S63

1. Question de cours : Théorème de transfert.

Soit p un réel vérifiant $\frac{1}{2} < p < 1$. On pose $q = 1 - p$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X_0 est la variable certaine de valeur 0 et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout t réel, on pose : $Y_n = 2X_n - n$ et $g_n(t) = E\big(e^{-tY_n}\big)$, où E désigne l'espérance.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a : $g_n(t) = \big(p\,e^{-t} + q\,e^{t}\big)^n$.

3.a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité : $P(Y_n \leqslant 0) \leqslant g_n(t)$.

b) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ (indépendant de n) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P(Y_n \leqslant 0) \leqslant \alpha^n$.

4. Dans cette question, soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On pose $Z_0 = 0$ et $Z_n = \min(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$.

a) Déterminer $Z_n(\Omega)$. Calculer $P(Z_n = -n)$.

b) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose : $A_k = \bigcup_{j=k+1}^{n} [Y_j \leqslant 0]$. Montrer que l'on a : $P(A_k) \leqslant \dfrac{\alpha^{k+1}}{1-\alpha}$.

c) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $r \in [\![-n, 0]\!]$. Établir les inégalités :

$$P(Z_n = r) \leqslant P\big(A_k \cap (Z_n = r)\big) + P(Z_k = r) \quad \text{et} \quad E(Z_n) \geqslant \underline{-n\alpha^n} + E(Z_{n-1}).$$

$1-\alpha$

$E(Z_n) \geqslant -\dfrac{n\alpha^n}{1-\alpha} + E(Z_{n-1}).$

5. Montrer que la suite $\big(E(Z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice sans préparation S63

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On suppose que f n'est pas diagonalisable et qu'il vérifie : $(f - \mathrm{id}) \circ (f^2 + \mathrm{id}) = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$ sont supplémentaires.

2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE PRINCIPAL 563

(Q1) • Soit X une variable aléatoire réelle et finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

On pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ où $i \mapsto x_i$ est une bijection de $[\![1, r]\!]$ sur $X(\Omega)$.

g est une fonction numérique de la variable réelle telle que $X(\Omega) \subset D_g$

→ $E(g(X))$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{r} g(x_k) P(X = x_k)$.

• Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

$X(\Omega) = \{x_k \,;\, k \in [\![n_0, +\infty[\![\}$ et $k \mapsto x_k$ est une bijection de $[\![n_0, +\infty[\![$ sur $X(\Omega)$.

g est une fonction numérique de la variable réelle telle que $X(\Omega) \subset D_g$.

→ $E(g(X))$ existe si et seulement si la série de terme $g(x_k) P(X = x_k)$ est absolument convergente.

→ En cas d'existence $E(g(X)) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} g(x_k) P(X = x_k)$.

• Soit X une variable aléatoire à densité. On suppose que X possède une densité f_X nulle en dehors d'un intervalle $]a, b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$.

g est une fonction numérique de la variable réelle continue sur $]a, b[$ privé d'un nombre fini de points.

→ $E(g(X))$ existe si et seulement $\int_a^b g(t) f_X(t)\, dt$ est absolument convergente.

→ En cas d'existence $E(g(X)) = \int_a^b g(t) f_X(t)\, dt$.

(Q2) <u>1er cas</u>.- $n = 0$. Alors X_0 et Y_0 sont des variables certaines égales à 0.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, e^{-tY_0} est la variable certaine égale à 1.

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $E(e^{-tY_0}) = 1$ et $1 = (pe^{-t} + qe^{+t})^0$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $E(e^{-tY_0}) = (pe^{-t} + qe^{+t})^0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \; g_0(t) = (pe^{-t} + qe^{+t})^0.$$

<u>2ème cas</u>.- $n \geq 1$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. X_n est une variable aléatoire finie et $x \to e^{-t(2x-n)}$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Alors $E(e^{-t(2X_n - n)})$ existe et vaut $\sum_{k=0}^{n} e^{-t(2k-n)} P(X_n = k)$.

Donc $E(e^{-tY_n})$ existe et vaut $\sum_{k=0}^{n} e^{-t(2k-n)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Notons que $2k - n = k - (n-k)$

$E(e^{-tY_n}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{-t}p)^k (e^{t} q)^{n-k} = (e^{-t}p + e^{t}q)^n = (p e^{-t}+q e^{t})^n$

$2k-n = k-(n-k)$ ↑ formule du binôme.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g_n(t) = E(e^{-tY_n}) = (pe^{-t}+qe^{t})^n$.

Finalement $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \ g_n(t) = E(e^{-tY_n}) = (pe^{-t}+qe^{t})^n.}}$

(Q3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $n=0$: $P(Y_n \leq 0) \leq 1 = (pe^{-t}+qe^{t})^0 = (pe^{-t}+qe^{t})^n = g_n(t)$.

Supposons $n \geq 1$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

Si $t=0$: $P(Y_n \leq 0) \leq 1 = (p+q)^n = (pe^{-0}+qe^{0})^n = (pe^{-t}+qe^{t})^n = g_n(t)$.

Supposons $t>0$. $P(Y_n \leq 0) = P(-tY_n \geq 0) = P(e^{-tY_n} \geq 1)$.

e^{-tY_n} est une variable aléatoire réelle prenant des valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et possède une espérance.

L'inégalité de Markov montre alors que $P(Y_n \leq 0) = P(e^{-tY_n} \geq 1) \leq \dfrac{E(e^{-tY_n})}{1} = g_n(t)$.

Finalement $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \ P(Y_n \leq 0) \leq g_n(t).}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $n \geq 1$.

g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g_n'(t) = n(-pe^{-t}+qe^{t})(pe^{-t}+qe^{t})^{n-1}$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g_n'(t) > 0 \Leftrightarrow -pe^{-t}+qe^{t} > 0 \Leftrightarrow qe^{t} > pe^{-t} \Leftrightarrow e^{2t} > \frac{p}{q}$.

Notons que $\ln \frac{p}{q} > 0$ car $\frac{p}{q} > 1$ car $\frac{1}{2} < p < 1$ et $q = 1-p$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g_n'(t) > 0 \Leftrightarrow t > \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

De même : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g_n'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$ et $g_n'(t) < 0 \Leftrightarrow t < \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

Donc g_n est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}\ln \frac{p}{q}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}]$. Alors g_n possède un minimum sur $\mathbb{R}_+$ atteint en le seul point

$t_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $P(Y_n \leq 0) \leq g_n(t)$. En particulier $P(Y_n \leq 0) \leq g_n(t_0)$.

$g_n(t_0) = (pe^{-t_0}+q e^{t_0})^n = (pe^{-\frac{1}{2}\ln \frac{p}{q}} + qe^{\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}})^n = (p\sqrt{\tfrac{q}{p}} + q\sqrt{\tfrac{p}{q}})^n$.

$g_n(t_0) = (2\sqrt{pq})^n$. Posons $\alpha = 2\sqrt{pq}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n \leq 0) \leq \alpha^n$. De plus $P(Y_0 \leq 0) \leq 1 = \alpha^0$.

Ainsi si $\alpha = 2\sqrt{pq}$: $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y_n \leq 0) \leq \alpha^n.}$

Notons que $\alpha \in]0,1[$. Clairement $\alpha > 0$.

$\alpha < 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{pq} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{pq} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow pq < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{4} - pq = \frac{1}{4} - p(1-p) = \frac{1}{4} - p + p^2 = (p - \frac{1}{2})^2$

Or $p \in]\frac{1}{2}, 1[$ donc $(p - \frac{1}{2})^2 > 0$ et ainsi $\alpha < 1$.

Finalement si $\alpha = 2\sqrt{pq}$:

1) $\alpha \in]0,1[$
2) α ne dépend pas de n
3) $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y_n \leq 0) \leq \alpha^n$.

(Q4) Notons que $\forall n \in \mathbb{N},\ Z_n = \min(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$!

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(Z_n = -n) = P(\min(Y_0, Y_1, \dots, Y_n) = -n)$. Notons que $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}$ prennent des valeurs supérieures ou égales à $-(n-1)$.

Ainsi $P(Z_n = -n) = P(Y_n = -n) = P(2X_n - n = -n) = P(X_n = 0) = \binom{n}{0} p^0 q^{n-0} = q^n$.

$\underline{\underline{P(Z_n = -n) = q^n.}}$ Ceci vaut encore pour $n = 0$ car Z_0 est la variable certaine égale à 0.

b) Rappel : Si $r \in \mathbb{N}^*$ et si $B_1, B_2, \dots, B_r$ sont r événements de $(\Omega, \mathcal{B}, P)$:

$P(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r) \leq \sum_{k=1}^{r} P(B_k)$. Ceci se montre de manière évidente par récurrence.

Alors $P(\{Y_{k+1} \leq 0\} \cup \{Y_{k+2} \leq 0\} \cup \dots \cup \{Y_n \leq 0\}) \leq \sum_{j=k+1}^{n} P(Y_j \leq 0)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P(A_k) \leq \sum_{j=k+1}^{n} P(Y_j \leq 0) \leq \sum_{j=k+1}^{n} \alpha^j = \alpha^{k+1} \times \frac{1 - \alpha^{n-k}}{1-\alpha} \leq \frac{\alpha^{k+1}}{1-\alpha}$.

$$\left\{\begin{array}{l} 1 - \alpha^{n-k} \leq 1 \\ 1 - \alpha > 0 \\ \alpha^{k+1} > 0 \end{array}\right.$$

$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P(A_k) \leq \frac{\alpha^{k+1}}{1-\alpha}.}}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et soit $r \in [\![-n, 0]\!]$.

$(A_k, \overline{A_k})$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne $P(Z_n = r) = P(A_k \cap \{Z_n = r\}) + P(\overline{A_k} \cap \{Z_n = r\})$.

$P(\overline{A_k} \cap \{Z_n = r\}) = P(\{Y_{k+1} > 0\} \cap \{Y_{k+2} > 0\} \cap \dots \cap \{Y_n > 0\} \cap \{Z_n = r\})$.

$P(\overline{A_k} \cap \{Z_n = r\}) = P(\{Y_{k+1} > 0\} \cap \{Y_{k+2} > 0\} \cap \dots \cap \{Y_n > 0\} \cap \{\min(Y_0, Y_1, \dots Y_n) = r\})$.

Alors $P(\overline{A_\ell} \cap \{Z_n=r\}) \underset{r\in[\![-n,0]\!]}{=} P(\{Y_{\ell+1}>0\}\cap\{Y_{\ell+2}>0\}\cap\dots\cap\{Y_n>0\}\cap\{\min(Y_0,Y_1,\dots,Y_\ell)=r\})$

Par croissance $P(\overline{A_\ell}\cap\{Z_n=r\}) \leq P(\min(Y_0,Y_1,\dots,Y_\ell)=r) = P(Z_\ell=r)$.

Finalement $P(Z_n=r)=P(A_\ell\cap\{Z_n=r\})+P(\overline{A_\ell}\cap\{Z_n=r\}) \leq P(A_\ell\cap\{Z_n=r\})+P(Z_\ell=r)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall \ell\in[\![0,n-1]\!], \forall r\in[\![-n,0]\!], \; P(Z_n=r)\leq P(A_\ell\cap\{Z_n=r\})+P(Z_\ell=r)$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. d'après ce que précède appliqué à $\ell=n-1$ on obtient

$\forall r\in[\![-n,0]\!], \; P(Z_n=r)\leq P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})+P(Z_{n-1}=r)$.

donc $\forall r\in[\![-n,0]\!], \; r\,P(Z_n=r) \underset{=}{\geq} r\,P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})+r\,P(Z_{n-1}=r)$.

Rappelons que $Z_n=\min(Y_0,Y_1,\dots,Y_n)$ prend ses valeurs dans $[\![-n,0]\!]$ car Y_0 est la variable constante égale à Y_0 et les variables $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ prenant comme plus petites valeurs $-1,-2,\dots,-n$. de même Z_0 prend ses valeurs dans $[\![-0,0]\!]$. cela permet de dire que Z_{n-1} prend ses valeurs dans $[\![-(n-1),0]\!]$...

Alors $E(Z_n)=\sum_{r=-n}^{0} r\,P(Z_n=r) \geq \sum_{r=-n}^{0} r\,P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\}) + \underbrace{\sum_{r=-n}^{0} r\,P(Z_{n-1}=r)}_{\text{car } r=-(n-1)}$.

donc $E(Z_n)\geq \sum_{r=-n}^{0} r\,P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})+E(Z_{n-1})$.

$\forall r\in[\![-n,0]\!], \quad r\geq -n$ et $P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})\geq 0$.

donc $\sum_{r=-n}^{0} r\,P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\}) \geq \sum_{r=-n}^{0}(-n)\,P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\}) = -n\sum_{r=-n}^{0} P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})$.

Or $(\{Z_n=r\})_{r\in[\![-n,0]\!]}$ est un système complet d'événements donc $\sum_{r=-n}^{0} P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\}) = P(A_{n-1})$.

Ainsi $\sum_{r=-n}^{0} r\,P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\}) \geq -n\,P(A_{n-1}) \geq -n\,\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$.

$P(A_{n-1})\leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$ et $-n\leq 0$

Alors $E(Z_n)\geq \sum_{r=-n}^{0} r\,P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})+E(Z_{n-1}) \geq -\dfrac{n\alpha^n}{1-\alpha}+E(Z_{n-1})$.

$E(Z_n)\geq \dfrac{-n\alpha^n}{1-\alpha}+E(Z_{n-1})$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Q5 $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*, \quad Z_n=\min(Y_0,Y_1,\dots,Y_n)\leq \min(Y_0,Y_1,\dots,Y_{n-1})=Z_{n-1}$

Par croissance de l'espérance il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(Z_n) \leqslant E(Z_{n-1})$. Alors

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant E(Z_{n-1}) - E(Z_n) \leqslant \dfrac{n\alpha^n}{1-\alpha}$ (1)

$\uparrow$ $E(Z_n) \geqslant \dfrac{-n\alpha^n}{1+\alpha} + E(Z_{n-1})$

$\alpha \in]0,1[$ donc la série de terme général $\dfrac{n\alpha^n}{1-\alpha}$ est convergente. Alors (1) et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $E(Z_{n-1}) - E(Z_n)$ converge. Posons $C = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(E(Z_{k-1}) - E(Z_k)\big)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \big(E(Z_k) - E(Z_{k-1})\big) + E(Z_0) \underset{\uparrow}{=} -\sum_{k=1}^{n} \big(E(Z_{k-1}) - E(Z_k)\big)$.

$E(Z_0) = 0$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} E(Z_n) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \big(E(Z_{k-1}) - E(Z_k)\big) = -C$.

Alors <u>la suite de terme général $E(Z_n)$ converge.</u>

$$\lim_{n \to +\infty} E(Z_n) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \big(E(Z_{k-1}) - E(Z_k)\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(E(Z_k) - E(Z_{k-1})\big).$$

<u>Remarque</u>.. Ce thème est contenu dans Oral ESCP 1997 3.4.

<u>Si vous trouvez des erreurs importantes me le dire.</u>

Exercice principal S74

1. Question de cours : Définition des valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires de E.
2. Déterminer la dimension de E^*.

3. Dans cette question uniquement, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p ($p \in \mathbb{N}$).

Soit f et g deux éléments de E^* définis par : pour tout $P \in E$, $f(P) = P(0)$ et $g(P) = \displaystyle\int_0^3 P(t)dt$.
Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(g)$. Les formes linéaires f et g sont-elles proportionnelles ?

4. Soit f et g deux éléments non nuls de E^* tels que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

b) Soit $x_0 \notin \mathrm{Ker}(f)$. On pose : $h = g(x_0)f - f(x_0)g$. Montrer que $h = 0$. Conclusion.

5. Dans cette question, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On identifie A et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ est dit *stable* par A lorsque pour tout $X \in F$ on a $AX \in F$.

a) Soit $X \in F$ avec $X \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Vect}(X)$ est stable par A si et seulement si X est vecteur propre de A.

b) Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et L la forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par $L(x, y, z) = ax + by + cz$.
Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par A si et seulement si $\mathrm{Ker}(L) \subset \mathrm{Ker}(LA)$.

En déduire que $\mathcal{P}$ est stable par A si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$ (transposée de A).

Exercice sans préparation S74

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi normale d'espérance m et de variance égale à 1. Soit b un réel strictement positif fixé.

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, l'application $a \mapsto P(a < X < a + b)$ admet un maximum atteint en un point a_0 que l'on déterminera.

2. Exprimer la valeur de ce maximum à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

3. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice principal S 74

(Q1) $\hat{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n non nul. $\hat{f}$ est un endomorphisme de $\hat{E}$.

- $\lambda \in \mathbb{K}$.
  λ est valeur propre de $\hat{f}$ si il existe x appartenant à $\hat{E}$ vérifiant :

  $x \neq 0_{\hat{E}}$ et $\hat{f}(x) = \lambda x$.
- Soit $x \in \hat{E}$.
  x est un vecteur propre de $\hat{f}$ si il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que

$\hat{f}(x) = \lambda x$ et si x n'est pas nul.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $x \in \hat{E}$. x est un vecteur propre de $\hat{f}$ associé à la valeur propre λ si $x \neq 0_{\hat{E}}$ et si $\hat{f}(x) = \lambda x$.

(Q2) $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \dim E \times \dim \mathbb{R} = n \times 1 = n = \dim E$.

$\underline{\dim E^* = \dim E}$.

(Q3) Soit $P \in E$. $P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow P(0) = 0 \Leftrightarrow X$ divise $P \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ P = XQ$. Supposons $p \neq 0$.

Mieux $P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X],\ P = XQ \Leftrightarrow \exists (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p,\ P = X\left(\sum_{\ell=0}^{p-1} a_\ell X^\ell\right)$

$P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \exists (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p,\ P = \sum_{\ell=0}^{p-1} a_\ell X^{\ell+1} \Leftrightarrow P \in \operatorname{Vect}(X, X^2, \dots, X^p)$

Ainsi $\underline{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X, X^2, \dots, X^p) \text{ si } p \geq 1}$. $\underline{(X, X^2, \dots, X^p) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} f}$ (cette famille est libre...)

Supposons $p = 0$. Soit $P \in E$. $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ P = \lambda$.
$P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow P(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow P = 0_E$.

$\underline{\operatorname{Ker} f = \{0_E\} \text{ si } p = 0}$. Difficile de trouver une base !

Supposons $p \geq 1$. Soit $P = \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell X^\ell \in E$.

$g(P) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 P(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow 0 = \int_0^1 \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell t^\ell\,dt = \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell \int_0^1 t^\ell = \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell \frac{1}{\ell+1} \Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{p} \frac{1}{\ell+1} a_\ell = 0$.

Ainsi $\operatorname{Ker} g$ est l'hyperplan d'équation $\sum_{\ell=0}^{p} \frac{1}{\ell+1} a_\ell = 0$ dans la base canonique de E.

$\dim \operatorname{Ker} g = (p+1) - 1 = p$. $\underline{\operatorname{Ker} g = p}$.

$\operatorname{Ker} g = \left\{ \sum_{\ell=0}^{p-1} a_\ell X^\ell - \left((p+1) \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{a_\ell}{\ell+1}\right) X^p ;\ (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p \right\}$.

$\operatorname{Ker} g = \left\{ \sum_{\ell=0}^{p-1} a_\ell \left(X^\ell - \frac{p+1}{\ell+1} X^p\right) ;\ (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p \right\}$.

$\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Vect}\left((X^0 - (p+1)X^p), (X^1 - \frac{p+1}{2} X^p), \dots, (X^{p-1} - \frac{p+1}{p} X^p)\right)$.

Ainsi $(X^0 - (p+1)X^p, (X^1 - \frac{p+1}{2} X^p), \dots, (X^{p-1} - \frac{p+1}{p} X^p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}\, g$, de cardinal p égal à la dimension de $\mathrm{Ker}\, g$.

Ainsi $\underline{(X^0 - (p+1)X^p, X^1 - \frac{p+1}{2} X^p, \dots, X^{p-1} - \frac{p+1}{p} X^p)}$ est une base de $\mathrm{Ker}\, g$ ... lorsque $p \geqslant 1$.

Supposons que $p=0$. Soit $P \in E$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P = \lambda$.

$P \in \mathrm{Ker}\, g \Leftrightarrow 0 = \int_0^1 P(t)\,dt = \int_0^1 \lambda\, dt = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow P = 0_E$.

Ainsi $\underline{\mathrm{Ker}\, g = \{0_E\}}$ si $p = 0$. Difficile encore ici de trouver une base !

1er cas.. $p=0$. Soit $P \in E$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P = \lambda$.

$f(P) = P(0) = \lambda$ et $g(P) = \int_0^1 P(t)\,dt = \lambda$.

$\forall P \in E$, $f(P) = g(P)$. $f = g$. f et g sont proportionnelles.

2ème cas.. $p \geqslant 1$. Supposons f et g proportionnelles. Comme $f \neq 0_{E^*}$: $\exists \delta \in \mathbb{R}$, $g = \delta f$.

$g(1) = \int_0^1 1\,dt = 1$. Donc $1 = g(1) = \delta f(1) = \delta \times 1 = \delta$. $\delta = 1$. $g = f$.

$g(X) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$ et $f(X) = 0$. Alors $\frac{1}{2} = 0$!

Ainsi f et g ne sont pas proportionnelles.

$\underline{f \text{ et } g \text{ sont proportionnelles si et seulement si } p = 0.}$

(Q4) a) $f \neq 0_{E^*}$ et $g \neq 0_{E^*}$.

$\mathrm{Im}\, f \subset \mathbb{R}$, $\dim \mathbb{R} = 1$ et $\mathrm{Im}\, f \neq \{0_{\mathbb{R}}\}$. Alors $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$.

Le théorème du rang donne : $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim E - \dim \mathrm{Im}\, f = \dim E - 1 = n-1$

de même $\dim \mathrm{Ker}\, g = n-1$

Ainsi $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, g < +\infty$. Alors $\underline{\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g}$.

b) (*) Posons $F = \mathrm{Vect}(x_0)$. $x_0 \notin \mathrm{Ker}\, f$ donc $x_0 \neq 0_E$. F est donc la droite vectorielle engendrée par x_0. Comme $x_0 \notin \mathrm{Ker}\, f$: $\mathrm{Ker}\, f \cap F = \{0_E\}$

$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim F = n-1+1 = \dim E$. Ceci achève de montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et F sont supplémentaires.

(*) x_0 existe car $f \neq 0_{E^*}$

Soit $x \in E$. $\exists ! (x', x'') \in \mathrm{Ker} f \times F$, $x = x' + x''$.

$x'' \in F$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $x'' = \lambda x_0$. Rappelons que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker}\, g$ et que h est une forme linéaire sur E comme combinaison linéaire de deux formes linéaires sur E.

$$h(x) = h(x') + h(x'') = g(x_0)\underbrace{f(x')}_{=0_{\mathbb{R}}} - f(x_0)\underbrace{g(x')}_{=0_{\mathbb{R}}} + g(x_0) f(x'') - f(x_0) g(x'').$$

$$h(x) = g(x_0) f(\lambda x_0) - f(x_0) g(\lambda x_0) = \lambda\,[g(x_0) f(x_0) - f(x_0) g(x_0)] = 0_{\mathbb{R}}.$$

$\forall x \in E$, $h(x) = 0_{\mathbb{R}}$. $\underline{\underline{h = 0_{E^*}}}$. Alors $g(x_0) f = f(x_0) g$ et $f(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}}$ car $x_0 \notin \mathrm{Ker} f$.

Ainsi $g = \dfrac{g(x_0)}{f(x_0)} f$. $\underline{\underline{f \text{ et } g \text{ sont proportionnelles.}}}$

Q5) a) Nous partirons de $X \in \mathbb{R}^3$ (et pas F) et $X \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

* Supposons que X soit un vecteur propre de A. $\exists \mu \in \mathbb{R}$, $AX = \mu X$.

$$A(\mathrm{Vect}(X)) = \mathrm{Vect}(AX) = \mathrm{Vect}(\mu X) \subset \mathrm{Vect}(X)$$
avec égalité si $\mu \neq 0$.

Ainsi $\mathrm{Vect}(X)$ est stable par A.

* Réciproquement supposons que $\mathrm{Vect}(X)$ soit stable par A.
Alors $AX \in \mathrm{Vect}(X)$ car $X \in \mathrm{Vect}(X)$. Donc $\exists \mu' \in \mathbb{R}$, $AX = \mu' X$.
Comme $X \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, X est un vecteur propre de A.

<u>Si $X \in \mathbb{R}^3$ et si $X \neq 0_{\mathbb{R}^3}$: $\mathrm{Vect}(X)$ est stable par A si et seulement si X est un vecteur propre de A.</u>

<u>Remarque</u>.- Les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par A sont les droites vectorielles engendrées par les vecteurs propres de A.

b) Notons que $ax + by + cz = 0$ est une équation de $\mathcal{P}$ <u>dans la base canonique</u> $(e_1, e_2, e_3) = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$.

Pour éviter les confusions nous noterons f_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A.

Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{P}$ est stable par f_A si et seulement si

$\mathrm{Ker}(L) \subset \mathrm{Ker}(L \circ f_A)$. Notons que $\mathcal{P} = \mathrm{Ker}(L)$.

$\mathrm{Ker}\, L \subset \mathrm{Ker}\,(L\circ f_A)$.

$\Updownarrow$ $\forall X\in\mathbb{R}^3,\ X\in \mathrm{Ker}\, L \Rightarrow X\in \mathrm{Ker}\,(L\circ f_A)$.

$\Updownarrow$ $\forall X\in\mathbb{R}^3,\quad X\in \mathrm{Ker}\, L \Rightarrow L(f_A(X))=0$.

$\Updownarrow$ $\forall X\in\mathbb{R}^3,\ X\in \mathrm{Ker}\, L \Rightarrow f_A(X)\in \mathrm{Ker}\, L$.

$\Updownarrow$ $\forall X\in\mathbb{R}^3,\ X\in \mathcal{P} \Rightarrow f_A(X)\in \mathcal{P}$.

$\Updownarrow$ $\mathcal{P}$ est stable par f_A.

<u>$\mathcal{P}$ est stable par f_A si et seulement si $\mathrm{Ker}\, L \subset \mathrm{Ker}\,(L\circ f_A)$.</u>

- Supposons que $H=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

  $H\neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ et $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ {}^tAH=\lambda H$; ${}^tHA=\lambda\, {}^tH$.

  Notons que ${}^tH$ est la matrice de L relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et à la base canonique de $\mathbb{R}$.

  ${}^tHA$ est la matrice de $L\circ f$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et à la base canonique de $\mathbb{R}$.

  ${}^tHA=\lambda\, {}^tH$ donne alors $L\circ f_A=\lambda L$.

  $\forall X\in\mathbb{R}^3,\ X\in \mathrm{Ker}\, L \Rightarrow L(X)=0_{\mathbb{R}} \Rightarrow \lambda L(X)=0_{\mathbb{R}} \Rightarrow (L\circ f_A)(X)=0_{\mathbb{R}} \Rightarrow X\in \mathrm{Ker}\,(L\circ f_A)$.

  Ainsi $\mathrm{Ker}\, L\subset \mathrm{Ker}(L\circ f_A)$. Alors $\mathcal{P}$ est stable par f_A.

- Réciproquement supposons $\mathcal{P}$ stable par f_A. Alors $\mathrm{Ker}\, L \subset \mathrm{Ker}\,(L\circ f_A)$.

  L est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^3$. $\dim \mathrm{Ker}\, L=2$.

  Alors $2=\dim \mathrm{Ker}\, L\subset \dim \mathrm{Ker}\,(L\circ f_A)\leqslant 3$. $\dim \mathrm{Ker}\,(L\circ f_A)=2$ ou 3.

  <u>1er cas.</u> $\dim \mathrm{Ker}\,(L\circ f_A)=2$. Ainsi $\dim \mathrm{Ker}\, L=\dim \mathrm{Ker}\,(L\circ f_A)=2$.

  Alors $\mathrm{Ker}\, L \subset \mathrm{Ker}(L\circ f_A)$, $L\circ f_A$ et L sont deux formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^3$. Alors d'après Q4 : $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ L\circ f_A=\lambda L$.

  Donc $(a\ b\ c)A=\lambda(a\ b\ c)$. En transposant il vient :

  ${}^tA\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Comme $(a,b,c)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

  Ainsi $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$ (associé à λ).

<u>2ème Cas.</u> dim Ker $(L\circ f_A) = 3$.

Alors $L\circ f_A = 0_{E^*}$. Donc $(a\ b\ c)A = 0_{M_{1,3}(\mathbb{R})}$.

En transposant, il vient ${}^tA \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. Comme $(a,b,c) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} \neq 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à 0.

Ainsi $\mathcal{P}$ est stable par f_A (ou par A) si et seulement $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

<u>Remarque</u>.. Ces résultats se généralisent de la manière suivante.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n non nulle.

$\mathcal{B}$ est une base de E et A est la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

1) une droite vectorielle de E est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

2) Un hyperplan H de E d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

<u>si vous trouvez des erreurs importantes me le dire.</u>

Exercice principal S79

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle\,,\rangle$ et de la norme euclidienne associée notée $\|\cdot\|$.

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles. On pose :

$$\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R};\, \forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(-x) = f(x)\} \text{ et } \mathcal{I} = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R};\, \forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(-x) = -f(x)\}.$$

Enfin, on note $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^n$ et telles que, pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle u\,,v\rangle = 0$, on a : $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

1. Question de cours : Théorème de Pythagore.

2. Établir les relations : $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ et $\mathcal{H} = (\mathcal{H} \cap \mathcal{P}) \oplus (\mathcal{H} \cap \mathcal{I})$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor n\lambda \rfloor}{n}$, où $\lfloor n\lambda \rfloor$ désigne la partie entière du réel $n\lambda$.

4. Soit $g \in \mathcal{H} \cap \mathcal{I}$.

a) En exploitant l'hypothèse $n \geqslant 2$, montrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $g(2x) = 2g(x)$.

b) Montrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a : $g(rx) = rg(x)$.
En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $g(\lambda x) = \lambda g(x)$.

c) Montrer que la fonction g est linéaire.

5. Soit $h \in \mathcal{H} \cap \mathcal{P}$.

a) Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\|x\| = \|y\|$. Calculer $\langle x-y\,, x+y\rangle$ et en déduire que $h(x) = h(y)$.

b) Justifier l'existence d'une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $h(x) = \varphi(\|x\|^2)$.

c) On admet que φ est continue. Montrer que pour tous réels positifs s et t, on a : $\varphi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t)$.

d) Établir alors l'existence d'une constante c telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $h(x) = c\|x\|^2$.

6. En déduire la forme générale de toute fonction $f \in \mathcal{H}$.

Exercice sans préparation S79

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_p$ $(p \geqslant 2)$ des variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_i > 0$.

On pose pour tout $p \geqslant 2$: $S_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle du vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_{p-1})$ sachant $(S_p = n)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'espérance conditionnelle $E(X_1 / X_1 + X_2 = n)$ en fonction de n, λ_1 et λ_2.

Exercice principal S 79

Q1 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E.

<u>Si x et y sont deux éléments de E : x et y sont orthogonaux si et seulement si</u>

<u>$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.</u>

Q2 Montrons que $\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$ et $\mathcal{H}$ sont trois sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$.

- $\mathcal{P}\subset\mathcal{F}$, $\mathcal{I}\subset\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}\subset\mathcal{F}$ par définition.
- Soit f_0 l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f_0(x)=0$. $f_0\in\mathcal{F}$.

→ $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f_0(-x)=0=f_0(x)$; $f_0\in\mathcal{P}$. $\mathcal{P}\neq\emptyset$.

→ $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f_0(-x)=0=-f_0(x)$; $f_0\in\mathcal{I}$; $\mathcal{I}\neq\emptyset$.

→ Soient u et v deux éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que $\langle u,v\rangle=0$

$f_0(u+v)=0=0+0=f_0(u)+f_0(v)$. De plus f_0 est continue sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi $f_0\in\mathcal{H}$; $\mathcal{H}\neq\emptyset$.

- Soit $(f,g)\in\mathcal{F}^2$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

→ Supposons que $(f,g)\in\mathcal{P}^2$.

$\forall x\in\mathbb{R}^n$, $(\lambda f+g)(-x)=\lambda f(-x)+g(-x)=\lambda f(x)+g(x)=(\lambda f+g)(x)$; $\lambda f+g\in\mathcal{P}$.

→ Supposons que $(f,g)\in\mathcal{I}^2$

$\forall x\in\mathbb{R}^n$, $(\lambda f+g)(-x)=\lambda f(-x)+g(-x)=\lambda(-f(x))+(-g(x))=-(\lambda f+g)(x)$; $\lambda f+g\in\mathcal{I}$.

→ Supposons que $(f,g)\in\mathcal{H}^2$. Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\langle u,v\rangle=0$.

$(\lambda f+g)(u+v)=\lambda f(u+v)+g(u+v)=\lambda(f(u)+f(v))+g(u)+g(v)=(\lambda f+g)(u)+(\lambda f+g)(v)$.

De plus f et g sont continues sur $\mathbb{R}^n$ donc $\lambda f+g$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. Ceci achève de montrer que $\lambda f+g$ appartient à $\mathcal{H}$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(f,g)\in\mathcal{P}^2$, $\lambda f+g\in\mathcal{P}$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(f,g)\in\mathcal{I}^2$, $\lambda f+g\in\mathcal{I}$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(f,g)\in\mathcal{H}^2$, $\lambda f+g\in\mathcal{H}$.

Les trois points précédents montrent que <u>$\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$ et $\mathcal{H}$ sont trois sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$.</u>

Montrons que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{F}$.

Soit $f\in\mathcal{F}$. Montrons par "analyse / synthèse" que $\exists!\,(p,i)\in\mathcal{P}\times\mathcal{I}$, $f=p+i$.

* <u>Analyse / Unicité.</u>

Supposons que $(p,i)\in\mathcal{P}\times\mathcal{I}$ et que $f=p+i$. $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f(x)=p(x)+i(x)$ et $f(-x)=p(-x)+i(-x)$

$=p(x)-i(x)$.

Alors $f(x)+f(-x)=2p(x)$ et $f(x)-f(-x)=2i(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$.

$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ p(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ et $i(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$.

d'où l'unicité de (p,i).

* <u>Synthèse / Existence.</u>

Posons $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ p(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ et $i(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$.

- $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ p(x)+i(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x))=f(x)$. $f=p+i$.
- $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ p(-x)=\frac{1}{2}(f(-x)+f(x))=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))=p(x)$; $p\in\mathcal{P}$.
- $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ i(-x)=\frac{1}{2}(f(-x)-f(x))=-\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))=-i(x)$; $i\in\mathcal{I}$.

Alors $f=p+i$ avec $p\in\mathcal{P}$ et $i\in\mathcal{I}$. D'où l'existence d'un couple (p,i) de $\mathcal{P}\times\mathcal{I}$ tel que $f=p+i$. Notons que <u>$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ p(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ et $i(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$.</u>

Finalement : <u>$\forall f\in\mathcal{F},\ \exists!(p,i)\in\mathcal{P}\times\mathcal{I},\ f=p+i$.</u>

<u>$\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}=\mathcal{P}\oplus\mathcal{I}$.</u>

- $(\mathcal{X}\cap\mathcal{P})\cap(\mathcal{X}\cap\mathcal{I})\subset\mathcal{P}\cap\mathcal{I}=\{0_{\mathcal{F}}\}$.

  Or $0_{\mathcal{F}}\in(\mathcal{X}\cap\mathcal{P})\cap(\mathcal{X}\cap\mathcal{I})$ car $\mathcal{P},\mathcal{I},\mathcal{X}$ sont trois sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$.

  Ainsi $(\mathcal{X}\cap\mathcal{P})\cap(\mathcal{X}\cap\mathcal{I})=\{0_{\mathcal{F}}\}$. <u>$\mathcal{X}\cap\mathcal{P}$ et $\mathcal{X}\cap\mathcal{I}$ sont en somme directe.</u>

- $\mathcal{X}\cap\mathcal{P}\subset\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}\cap\mathcal{I}\subset\mathcal{X}$ donc <u>$(\mathcal{X}\cap\mathcal{P})+(\mathcal{X}\cap\mathcal{I})\subset\mathcal{X}$</u> car $\mathcal{X}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

- Soit $f\in\mathcal{X}$. $\exists!(p,i)\in\mathcal{P}\times\mathcal{I},\ f=p+i$. Montrons que p et i sont dans $\mathcal{X}$.

  $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ p(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ et $i(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$.

  Soit $(u,v)\in(\mathbb{R}^n)^2$ tel que $\langle u,v\rangle=0$. Notons que $\langle -u,-v\rangle=0$.

  $$p(u+v)=\frac{1}{2}[f(u+v)+f(-u-v)]\underset{\langle u,v\rangle=\langle -u,-v\rangle=0}{=}\frac{1}{2}[f(u)+f(v)+f(-u)+f(-v)]=\frac{1}{2}[f(u)+f(-u)+f(v)+f(-v)]$$

  $$p(u+v)=\frac{1}{2}[f(u)+f(-u)]+\frac{1}{2}[f(v)+f(-v)]=p(u)+p(v).$$

  $$i(u+v)=\frac{1}{2}[f(u+v)-f(-u-v)]\underset{\langle u,v\rangle=\langle -u,-v\rangle=0}{=}\frac{1}{2}[f(u)+f(v)-f(-u)-f(-v)]=\frac{1}{2}[f(u)-f(-u)+f(v)-f(-v)]$$

  $$i(u+v)=\frac{1}{2}(f(u)-f(-u))+\frac{1}{2}(f(v)-f(-v))=i(u)+i(v).$$

  Par continuité de $x\mapsto -x$ et car f est continue sur $\mathbb{R}^n$, alors p et i sont continues sur $\mathbb{R}^n$. Ceci achève de montrer que $p\in\mathcal{X}$ et $i\in\mathcal{X}$.

  Ainsi $f=p+i$ avec $p\in\mathcal{P}$, $i\in\mathcal{I}$, $p\in\mathcal{X}$ et $i\in\mathcal{X}$.

  $f=p+i$ avec $p\in\mathcal{X}\cap\mathcal{P}$ et $i\in\mathcal{X}\cap\mathcal{I}$. $f\in(\mathcal{X}\cap\mathcal{P})+(\mathcal{X}\cap\mathcal{I})$.

Ainsi $\forall f \in \mathcal{H}$, $f \in (\mathcal{H} \cap \mathcal{G}) + (\mathcal{H} \cap \mathcal{I})$. $\underline{\underline{\mathcal{H} \subset (\mathcal{H} \cap \mathcal{G}) + (\mathcal{H} \cap \mathcal{I})}}$.

les trois points précédents montrent que que $\underline{\underline{\mathcal{H} = (\mathcal{H} \cap \mathcal{G}) \oplus (\mathcal{H} \cap \mathcal{I})}}$.

(Q3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor n\lambda \rfloor \leq n\lambda < \lfloor n\lambda \rfloor + 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\lfloor n\lambda \rfloor}{n} \leq \lambda < \frac{\lfloor n\lambda \rfloor}{n} + \frac{1}{n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor n\lambda \rfloor}{n} \leq \lambda$ et $\lim_{n \to +\infty} (\lambda - \frac{1}{n}) = \lambda$.

⚠ On aurait pu éviter l'utilisation de n...

Par encadrement il vient $\underline{\underline{\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor n\lambda \rfloor}{n} = \lambda \text{ et ceci pour tout réel } \lambda}}$.

(Q4) $g \in \mathcal{H} \cap \mathcal{I}$

a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $\dim \mathrm{Vect}(x) \leq 1$ et $\dim \mathbb{R}^n = n > 1$.

Alors $(\mathrm{Vect}(x))^\perp$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Ainsi il existe $z \in (\mathrm{Vect}(x))^\perp - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Posons $y = \frac{\|x\|}{\|z\|} z$.

Alors $y \in (\mathrm{Vect}(x))^\perp$ et $\|y\| = \left|\frac{\|x\|}{\|z\|}\right| \|z\| = \frac{\|x\|}{\|z\|} \|z\| = \|x\|$.

Ainsi y est un vecteur orthogonal à x et de même norme que $\|x\|$.

$\langle x-y, x+y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$. $x-y$ et $x+y$ sont orthogonaux.

Alors $g(x-y+x+y) = g(x-y) + g(x+y)$. $g(2x) = g(x-y) + g(x+y)$.

Notons que x et $-y$ sont orthogonaux de même que x et y.

Alors $g(2x) = g(x) + g(-y) + g(x) + g(y) = 2g(x)$ car $g(-y) = -g(y)$ $(g \in \mathcal{I})$.

$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ g(2x) = 2g(x)}}$.

b) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $g(rx) = r\,g(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Supposons que $r = 0$. $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $g(2z) = 2g(z)$. Donc $g(0_{\mathbb{R}^n}) = g(2 \times 0_{\mathbb{R}^n}) = 2 \times g(0_{\mathbb{R}^n})$.

Alors $g(0_{\mathbb{R}^n}) = 2 \times g(0_{\mathbb{R}^n})$. Ainsi $g(0_{\mathbb{R}^n}) = 0$.

Ainsi $g(rx) = g(0 \times x) = g(0_{\mathbb{R}^n}) = 0 = 0 \times g(x) = r\,g(x)$. $g(rx) = r\,g(x)$.

Montrons par récurrence que $\forall r \in \mathbb{N}^*$ $g(rx) = r\,g(x)$. ← ⚠ On aurait pu commencer la récurrence à $r=0$!!

- La propriété est vraie pour $r=1$!
- Supposons la vraie pour r avec $r\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $r+1$.

Soit z un vecteur non nul de $(\mathrm{Vect}(x))^{\perp}$.

Posons $y=\frac{\sqrt{r}\,\|x\|}{\|z\|}z$. Notons que y est orthogonal à x car z est orthogonal à x.

$\langle rx+y, x-y\rangle = r\|x\|^2 - r\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle - \|y\|^2 = r\|x\|^2 - 0 + 0 - \left\|\frac{\sqrt{r}\,\|x\|}{\|z\|}z\right\|^2$

$\langle rx+y, x-y\rangle = r\|x\|^2 - \left(\left|\frac{\sqrt{r}\,\|x\|}{\|z\|}\right|\|z\|\right)^2 = r\|x\|^2 - \frac{r\|x\|^2}{\|z\|^2}\|z\|^2 = 0.$

$rx+y$ et $x-y$ sont deux éléments orthogonaux de $\mathbb{R}^n$.

Alors $g(rx+y+x-y) = g(rx+y) + g(x-y)$.

$g((r+1)x) = g(rx) + g(y) + g(x) + g(-y)$ car rx et y sont orthogonaux ainsi que x et $-y$.

Comme $g\in\mathcal{J}$: $g(y)+g(-y)=0$. Alors $g((r+1)x) = g(rx)+g(x)$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence on obtient $g((r+1)x) = r\,g(x) + g(x) = (r+1)g(x)$.

ceci achève la récurrence.

$\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall r\in\mathbb{N},\ g(rx)=rg(x).}}$

Soit $x\in\mathbb{R}^n$. $\forall r\in\mathbb{N},\ g(rx)=rg(x)$.

$$\forall r\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N},\ g(rx) \underset{g\in\mathcal{J}}{=} -g((-r)x) \overset{-r\in\mathbb{N}^*}{=} -(-r)g(x) = rg(x).$$

Ainsi $\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall r\in\mathbb{Z},\ g(rx)=rg(x).}}$

Soit $x\in\mathbb{R}^n$ et soit $r\in\mathbb{Q}$. $\exists (r_1,r_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ r=\frac{r_1}{r_2}$.

$$g(rx) = g\left(\frac{r_1}{r_2}x\right) = r_1\,g\left(\left(\frac{1}{r_2}x\right)\right) = \frac{r_1}{r_2}\left(r_2\,g\left(\frac{1}{r_2}x\right)\right) = r\,g\left(r_2\left(\frac{1}{r_2}x\right)\right) = rg(x).$$

$\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall r\in\mathbb{Q},\ g(rx)=rg(x).}}$

Soit $x\in\mathbb{R}^n$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Posons $\forall q\in\mathbb{N}^*,\ r_q=\frac{\lfloor q\lambda\rfloor}{q}$.

$\forall q\in\mathbb{N}^*,\ r_q\in\mathbb{Q}$ et $\lim_{q\to+\infty} r_q=\lambda$ d'après Q3.

$\forall q\in\mathbb{N}^*,\ g(r_q x)=r_q\,g(x)$. La suite $(r_q x)_{q\in\mathbb{N}^*}$ converge vers λx et g est continue en λx ($g\in\mathcal{E}$). Alors $\lim_{q\to+\infty} g(r_q x) = g(\lambda x)$.

Ainsi $g(\lambda x) = \lim_{q\to+\infty} g(r_q x) = \lim_{q\to+\infty} (r_q\, g(x)) = \lambda\, g(x)$.

donc $\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall \lambda\in\mathbb{R},\ g(\lambda x)=\lambda g(x)}}$.

c) montrons par récurrence que : $\forall s\in [\![1,n]\!],\ \forall (x_1,x_2,\dots,x_s)\in\mathbb{R}^s,\ g\left(\sum_{i=1}^{s} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{s} g(x_i e_i)$

sachant que $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Notons que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

- La propriété est évidemment vraie pour $s=1$.
- Supposons la propriété vraie pour s dans $[\![1,n-1]\!]$ et montrons la pour $s+1$.

Soit $(x_1,x_2,\dots,x_{s+1})\in\mathbb{R}^{s+1}$. $\sum_{i=1}^{s} x_i e_i$ et $x_{s+1}e_{s+1}$ sont orthogonaux.

Ainsi $g\left(\sum_{i=1}^{s+1} x_i e_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^{s} x_i e_i + x_{s+1}e_{s+1}\right) = g\left(\sum_{i=1}^{s} x_i e_i\right) + g(x_{s+1}e_{s+1}) \underset{\text{hypothèse de récurrence}}{=} \sum_{i=1}^{s} g(x_i e_i) + g(x_{s+1}e_{s+1})$

donc $g\left(\sum_{i=1}^{s+1} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{s+1} g(x_i e_i)$. ceci achève la récurrence.

La propriété est vraie pour $s=n$ donc $\underline{\forall (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i e_i)}$.

d'après Q4 b) $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \forall x_i\in\mathbb{R},\ g(x_i e_i) = x_i\, g(e_i)$.

Ainsi $\underline{\forall (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, g(e_i)}$.

montrons que g est linéaire.

1) $\underline{\forall \lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ g(\lambda x)=\lambda g(x)}$.

2) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Montrons que $g(x+y)=g(x)+g(y)$.

$\exists!\,(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $\exists!\,(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n,\ y=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

$g(x+y) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)\, g(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, g(e_i) + \sum_{i=1}^{n} y_i\, g(e_i)$

Ainsi $g(x+y) = g(x)+g(y)$.

$\underline{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\ g(x+y) = g(x)+g(y)}$.

Ceci achève de montrer que $\underline{\underline{g \text{ est linéaire}}}$.

Q5 a] Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|=\|y\|$. $\langle x-y,x+y\rangle=\|x\|^2-\|y\|^2=0$.

Alors $h(x-y+x+y)=h(x-y)+h(x+y)$. $h(2x)=h(x-y)+h(x+y)$.

De même comme $\|y\|=\|x\|$: $h(2y)=h(y-x)+h(y+x)$.

Alors $h(2x)=h(x-y)+h(x+y) \underset{h\in\mathcal{G}}{=} h(-(x-y))+h(y+x)=h(y-x)+h(y+x)=h(2y)$.

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\ \|x\|=\|y\|\Rightarrow h(2x)=h(2y)$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|=\|y\|$. Posons $x'=\frac{1}{2}x$ et $y'=\frac{1}{2}y$.

$\|x'\|=\|\frac{1}{2}x\|=|\frac{1}{2}|\,\|x\|=|\frac{1}{2}|\,\|y\|=\|\frac{1}{2}y\|=\|y'\|$. Alors $h(2x')=h(2y')$. Ainsi $h(x)=h(y)$.

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\ \|x\|=\|y\|\Rightarrow h(x)=h(y)$.

b] $B=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est toujours la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Posons $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi(t)=h(\sqrt{t}\,e_1)$.

Soit $x\in\mathbb{R}^n$. $\|\,\|x\|\,e_1\|=|\,\|x\|\,|\,\|e_1\|=\|x\|\,\|e_1\|=\|x\|$.

Alors d'après a : $h(\|x\|e_1)=h(x)$. Donc $h(x)=h\left(\sqrt{\|x\|^2}\,e_1\right)=\varphi(\|x\|^2)$.

Il existe une application φ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ h(x)=\varphi(\|x\|^2)$.

c] Notons que l'application φ proposée ci-dessus est continue sur $\mathbb{R}^+$. "En effet"

$t\to\sqrt{t}\,e_1$ est continue de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}^n$ et h est continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Par "composition"...

φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque... on peut le montrer sérieusement en utilisant la définition...

Soit $(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$. Montrons que $\varphi(s+t)=\varphi(s)+\varphi(t)$.

$\varphi(s)=h(\sqrt{s}\,e_1)$. $\varphi(t)=h(\sqrt{t}\,e_1)\underset{\|\sqrt{t}e_1\|=\|\sqrt{t}e_2\|}{=}h(\sqrt{t}\,e_2)$.

$\varphi(s)+\varphi(t)=h(\sqrt{s}\,e_1)+h(\sqrt{t}\,e_2)$.

Or $\sqrt{s}\,e_1$ et $\sqrt{t}\,e_2$ sont orthogonaux donc $\varphi(s)+\varphi(t)=h(\sqrt{s}\,e_1+\sqrt{t}\,e_2)$

$\varphi(s)+\varphi(t)=\varphi(\|\sqrt{s}\,e_1+\sqrt{t}\,e_2\|^2)\underset{(e_1,e_2)\text{ est une famille orthonormée}}{=}\varphi((\sqrt{s})^2+(\sqrt{t})^2)=\varphi(s+t)$.

$\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ \varphi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t).$

d] Nous allons montrer en trois étapes que $\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2,\ \varphi(st) = s\varphi(t)$.

→ E1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(nt) = n\varphi(t)$.

- $\varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0)$. Donc $\varphi(0) = 2\varphi(0)$; $\varphi(0) = 0$.

  Alors $\varphi(0 \times t) = \varphi(0) = 0 = 0 \times \varphi(t)$. La propriété est vraie pour $n=0$.

- Supposons la propriété vraie pour n et montrons-la pour $n+1$ avec n dans $\mathbb{N}$.

  $\varphi((n+1)t) = \varphi(nt+t) = \varphi(nt) + \varphi(t) = n\varphi(t) + \varphi(t) = (n+1)\varphi(t)$. Ceci achève la récurrence.

  Hypothèse de récurrence.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(nt) = n\varphi(t)$.

→ E2 Montrons que $\forall r \in \mathbb{Q}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(rt) = r\varphi(t)$.

Soit $r \in \mathbb{Q}_+$ et soit $t \in \mathbb{R}_+$. $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ r = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

$$\varphi(rt) = \varphi\left(\alpha\left(\frac{t}{\beta}\right)\right) = \alpha\,\varphi\left(\frac{t}{\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\beta\varphi\left(\frac{t}{\beta}\right)\right) = \frac{\alpha}{\beta}\varphi\left(\beta \times \frac{t}{\beta}\right) = r\varphi(t).$$

$\alpha \in \mathbb{N}$, $t/\beta \in \mathbb{R}_+$; $\beta \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{t}{\beta} \in \mathbb{R}_+$

$\forall r \in \mathbb{Q}^+, \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(rt) = r\varphi(t).$

→ E3 Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(xt) = x\varphi(t)$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ent}(2^n x) \leq 2^n x < \mathrm{Ent}(2^n x) + 1$ Petite variante pour changer de Q3 !!

$\forall n \in \mathbb{N},\quad \dfrac{\mathrm{E}(2^n x)}{2^n} \leqslant x < \dfrac{\mathrm{Ent}(2^n x)}{2^n} + \dfrac{1}{2^n}$; $0 \leqslant x - \dfrac{\mathrm{Ent}(2^n x)}{2^n} < \dfrac{1}{2^n}$

Alors par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(x - \dfrac{\mathrm{Ent}(2^n x)}{2^n}\right) = 0$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{Ent}(2^n x)}{2^n} = x$.

Notons que $\mathrm{Ent}(2^n x) \in \mathbb{N}$ et $2^n \in \mathbb{N}^*$ donc $\dfrac{\mathrm{Ent}(2^n x)}{2^n} \in \mathbb{Q}_+$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \dfrac{\mathrm{Ent}(2^n x)}{2^n}$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \mathbb{Q}_+$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(x_n t) = x_n \varphi(t)$. Notons que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n t \in \mathbb{R}_+$

$\lim\limits_{n \to +\infty}(x_n t) = xt$ et φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}(\varphi(x_n t)) = \varphi(xt)$.

Alors $\varphi(xt) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n t) = \lim_{n\to+\infty} (x_n \varphi(t)) = x\varphi(t)$.

ceci achève de prouver que $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2,\ \varphi(xt) = x\varphi(t)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) = \varphi(x\times 1) = x\varphi(1)$. Posons $c = \varphi(1)$.

$c \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) = cx$.

Ainsi $\forall u \in \mathbb{R}^n,\ h(u) = \varphi(\|u\|^2) = c\|u\|^2$.

ou (!) $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ h(x) = c\|x\|^2$.

Q6 * Soit $f \in \mathcal{H}$. $\exists (h,g) \in (\mathcal{H}\cap\mathcal{P}) \times (\mathcal{H}\cap\mathcal{I})$, $f = h+g$.

d'après Q5 d) : $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ h(x) = c\|x\|^2$.

d'après Q4 c) : g est linéaire.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = c\|x\|^2 + g$ où $c \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

* $c \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = c\|x\|^2 + g$. Montrons que f appartient à $\mathcal{H}$. Il suffit de montrer que : $h : x \mapsto c\|x\|^2$ appartient à $\mathcal{H}\cap\mathcal{P}$ et que $g \in \mathcal{H}\cap\mathcal{I}$.

linéarité de g

→ • $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i g(e_i) = \sum_{i=1}^n g(e_i) x_i$. Ainsi g est une fonction polynomiale, donc g est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

• $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow g(x+y) = g(x) + g(y)$ car g est linéaire !!

• comme g est linéaire $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ g(-x) = -g(x)$; $g \in \mathcal{I}$.

les trois points précédents montrent que $g \in \mathcal{H}\cap\mathcal{I}$.

→ • $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ h(-x) = c\|-x\|^2 = c\|x\|^2 = h(x)$; $h \in \mathcal{P}$.

• Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que $\langle u,v\rangle$.

Pythagore donne $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Alors $h(u+v) = c\|u+v\|^2 = c(\|u\|^2 + \|v\|^2) = c\|u\|^2 + c\|v\|^2 = h(u) + h(v)$.

• $\lim_{x\mapsto x_0} h(x) = \lim_{x\mapsto x_0} (c\|x\|) = c\|x_0\| = h(x_0)$ pour tout x_0 dans $\mathbb{R}^n$. h est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

ceci achève de montrer que $h \in \mathcal{H}\cap\mathcal{P}$.

Alors $f = h + g$ avec $h \in \mathcal{H} \cap \mathcal{P}$ et $g \in \mathcal{H} \cap \mathcal{I}$. Donc $f \in \mathcal{H}$.

Alors on peut conclure et dire que les éléments de $\mathcal{H}$ sont les applications f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe c dans $\mathbb{R}$ et une application linéaire g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = c\|x\|^2 + g$.

$\mathcal{H} = \{ f \in \mathcal{F} \mid \exists c \in \mathbb{R}, \exists g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = c\|x\|^2 + g(x) \}$.

Exercice principal S82

1. Question de cours : Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n ($n \geqslant 2$) et φ un endomorphisme de E.
On note id_E l'endomorphisme identité de E, 0_E l'endomorphisme nul de E et on pose : $\varphi^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^k = \varphi \circ \varphi^{k-1}$.

On dit que φ est cyclique s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\left(x_0, \varphi(x_0), \ldots, \varphi^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E.

2. On suppose que $\varphi^n = 0_E$ et $\varphi^{n-1} \neq 0_E$.

a) Montrer que φ est cyclique.

b) Déterminer les valeurs propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. On suppose que φ est cyclique. Soit ψ un endomorphisme de E tel que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

En utilisant une base du type $\left(x_0, \varphi(x_0), \ldots, \varphi^{n-1}(x_0)\right)$, établir l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\psi = P(\varphi)$.

4. On suppose que φ est cyclique. On note x_0 un vecteur de E vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\left(x_0, \varphi(x_0), \ldots, \varphi^{n-1}(x_0)\right) \text{ est une base de } E \text{ et } \varphi^n(x_0) = x_0 \,.$$

a) Montrer que $\varphi^n = \mathrm{id}_E$. En déduire que φ est bijectif.

b) Quelles sont les valeurs propres possibles de φ ?

c) Montrer que φ est diagonalisable.

Exercice sans préparation S82

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose : $Y = \lfloor X \rfloor$ et $Z = X - Y$.

1. Montrer que Y est une variable aléatoire et déterminer sa loi. Que peut-on dire de $Y + 1$?

2. Montrer que Z est une variable aléatoire et déterminer sa loi.

3. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice principal S 82

Q1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes

i) A est diagonalisable.

ii) A est semblable à une matrice diagonale.

iii) Il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A.

iv) l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

v) Il existe un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n tel que la matrice de cet endomorphisme dans une base de cet espace vectoriel soit A.

vi) $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} A} \dim SEP(A,\lambda) = n$.

vii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp} A} SEP(A,\lambda)$.

Q2 a) Il existe un élément x_0 de E tel que $\varphi^{n-1}(x_0) \neq 0$ car $\varphi^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

montrons que $\mathcal{F} = (x_0, \varphi(x_0), \dots, \varphi^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

comme $\mathcal{F}$ est une famille de cardinal égal à la dimension n de E il suffit de montrer que cette famille est libre. Supposons le contraire. Il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ et $\sum_{\ell=0}^{n-1} \lambda_\ell \varphi^\ell(x_0) = 0_E$.

$\{i \in [\![0, n-1]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle possède un plus petit élément i_0.

Alors $\underline{\lambda_{i_0} \neq 0}$ et $\sum_{i=i_0}^{n-1} \lambda_i \varphi^i(x_0) = 0_E$.

Ainsi $0_E = \varphi^{n-1-i_0}(0_E) = \varphi^{n-1-i_0}\left(\sum_{i=i_0}^{n-1} \lambda_i \varphi^i(x_0)\right) = \sum_{i=i_0}^{n-1} \lambda_i \varphi^{n-1-i_0+i}(x_0)$.

Notons que $\varphi^{n-1-i_0+i}(x_0) = \varphi^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ si $i = i_0$ et si $i \in [\![i_0+1, n-1]\!]$,

$\varphi^{n-1-i_0+i}(x_0) = \varphi^{i-i_0-1}(\varphi^n(x_0)) = \varphi^{i-i_0-1}(0_E) = 0_E$ car $\varphi^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ t sauf si $i = n-1$...

Ainsi $0_E = \lambda_{i_0} \varphi^{n-1}(x_0)$ et $\varphi^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. donc $\underline{\lambda_{i_0} = 0}$. ceci est impossible !!!

Ceci achève de montrer que $\mathcal{F} = (x_0, \varphi(x_0), \dots, \varphi^{n-1}(x_0))$ est une famille libre de E et même une base de E. Ainsi $\underline{\underline{\varphi \text{ est cyclique}}}$.

Exercice principal S84

1. Question de cours : Donner deux conditions suffisantes et non nécessaires de diagonalisabilité d'une matrice.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a : $a_{i,j} = \min(i,j)$.

2.a) Soit $L = (l_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice triangulaire inférieure et $U = (u_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure. On pose : $M = LU = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a : $m_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{i,k} u_{k,j}$.

b) En déduire l'existence d'une matrice triangulaire supérieure T telle que $A = {}^tTT$.

c) Montrer que les matrices A et T sont de même rang.

d) Justifier que A est diagonalisable et déduire des questions précédentes que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

e) Justifier l'inversibilité de A et déterminer son inverse.

3. Soit $p \in]0,1[$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$.

On note Σ_S la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

a) Montrer que les valeurs propres de Σ_S sont toutes positives.

b) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, déterminer $\text{Cov}(S_i, S_j)$.

c) Exprimer Σ_S en fonction de A.

Exercice sans préparation S84

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Exercice principale S 84

(Q1) M est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) M est diagonalisable

ii) Il existe une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M.

iii) M est semblable à une matrice diagonale

iv) L'endomorphisme canoniquement associé à M est diagonalisable.

v) $\sum_{\lambda \in sp M} \dim SEP(M,\lambda) = n$

$\bigoplus_{\lambda \in sp M} SEP(M,\lambda) = M_{n,1}(\mathbb{K})$

(Q2) a) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} l_{i,k}\, u_{k,j} \overset{\downarrow}{=} \sum_{k=1}^{j} l_{i,k}\, u_{k,j} \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{i,k}\, u_{k,j}$.

U est triangulaire supérieure ($u_{k,j} = 0$ si $k > j$)

L est triangulaire inférieure ($l_{i,k} = 0$ si $i < k$)

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{i,k}\, u_{k,j}$.

b) Soit T la matrice triangulaire supérieure de $M_n(\mathbb{R})$ telle que si $T = (t_{i,j})$:

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $t_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \leq j \\ 0 \text{ si } i > j \end{cases}$. Posons ${}^tT = (t'_{i,j})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $t'_{i,j} = t_{j,i} = \begin{cases} 1 \text{ si } j \leq i \\ 0 \text{ si } j > i \end{cases}$. Notons que ${}^tT$ est triangulaire inférieure.

Alors d'après a) ${}^tTT = \left(\sum_{k=1}^{\min(i,j)} t'_{i,k}\, t_{k,j}\right) \underset{\uparrow}{=} \left(\sum_{k=1}^{\min(i,j)} 1 \times 1\right) = \left(\min(i,j)\right) = A$.

si $k \leq \min(i,j)$: $t'_{i,k} = t_{k,j} = 1$

si $k > \min(i,j)$: $t'_{i,k} = 0$ ou $t_{k,j} = 0$

Soit T la matrice triangulaire supérieure telle que $T = (t_{i,j})$ avec $t_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \leq j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$,

${}^tTT = A$.

c) Montrons que $\{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid TX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

- Soit X un élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors ${}^tTTX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi $0_{\mathbb{R}} = {}^tX\,{}^tTTX = {}^t(TX)TX = \|TX\|^2$. Alors $\|TX\| = 0$.

Par conséquent $TX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

• Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $TX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $AX = {}^tTTX = {}^tT\, 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

ceci achève de montrer que $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid TX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Evitons d'exploiter le théorème du rang pour les matrices...

Soit f_A (resp. f_T) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A (resp. T).

Ce qui précède montre que $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_A(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_T(x) = 0\}$. Ainsi $\operatorname{Ker} f_A = \operatorname{Ker} f_T$.

Alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f_A = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{Ker} f_A = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{Ker} f_T = \operatorname{rg} f_T = \operatorname{rg} T$.

<u>A et T ont même rang.</u>

d) ${}^tA = {}^t({}^tTT) = {}^tT\, {}^t({}^tT) = {}^tTT = A$.

Alors A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

$AX = \lambda X$. $\lambda \|X\|^2 = \lambda \langle X, X\rangle = \langle \lambda X, X\rangle = \langle AX, X\rangle = \langle X, AX\rangle = \langle X, {}^tTTX\rangle = {}^tX({}^tTTX) = {}^t(TX)TX = \|TX\|^2$.

donc $\lambda = \frac{\|TX\|^2}{\|X\|^2}$ car $\|X\| \neq 0$. Alors $\lambda = \left(\frac{\|TX\|}{\|X\|}\right)^2 \geqslant 0$.

Supposons que $\lambda = 0$. Alors $\|TX\|^2 = 0$. $\|TX\| = 0$. $TX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Par définition de T : $TX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donne $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$. En faisant les opérations

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, ..., $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$ on obtient $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Ainsi $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$!! Finalement $\lambda \geqslant 0$ et $\lambda \neq 0$. $\lambda > 0$.

<u>Les valeurs propres de A sont strictement positives.</u>

e) Comme dans ce qui précède on a : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ TX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi T est inversible. $n = \operatorname{rg} T = \operatorname{rg} A$ (Q2 c). $\operatorname{rg} A = n$.

Alors <u>A est inversible.</u>

$A^{-1} = ({}^tTT)^{-1} = T^{-1}({}^tT)^{-1} = T^{-1}\,{}^tT^{-1}$. Cherchons T^{-1}.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $TX = Y$.

$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 \\ x_2 + \cdots + x_n = y_2 \\ \quad\cdots \\ x_n = y_n \end{cases}$. En faisant les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, ..., $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$ on obtient $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ \quad\cdots \\ x_{n-1} = y_{n-1} - y_n \\ x_n = y_n \end{cases}$.

Ainsi $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^tT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$T^{-1} = (\alpha_{i,j})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } j=i+1 \quad (\text{suppose } j \geq 2 \text{ et } i \leq n-1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

${}^tT^{-1} = (\alpha'_{i,j})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\alpha'_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } i=j+1 \quad (\text{suppose } j \leq n-1 \text{ et } i \geq 2). \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Posons $A^{-1} = (\gamma_{i,j})$. $A^{-1} = T^{-1}\,{}^tT^{-1}$
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\gamma_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{i,\ell}\, \alpha'_{\ell,j}$.

<u>1er cas.</u> $i \in [\![2,n-1]\!]$

$$\gamma_{i,j} = \alpha_{i,i}\alpha'_{i,j} + \alpha_{i,i+1}\alpha'_{i+1,j} = \alpha'_{i,j} - \alpha'_{i+1,j}.$$

$$\gamma_{i,j} = \begin{cases} 1-(-1) & \text{si } i=j \\ -1-0 & \text{si } i=j+1 \\ 0-1 & \text{si } j=i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 2 & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } |i-j|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>2ème cas.</u> $i=1$.

$$\gamma_{i,j} = \gamma_{1,j} = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{1,\ell}\alpha'_{\ell,j} = \alpha_{1,1}\alpha'_{1,j} + \alpha_{1,2}\alpha'_{2,j} = \alpha'_{1,j} - \alpha'_{2,j}.$$

$\gamma_{i,j} = \gamma_{1,j} = \begin{cases} 1-(-1) & \text{si } j=1 \\ 0-1 & \text{si } j=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a encore $\gamma_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } |i-j|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

<u>3ème cas</u> $i=n$

$$\gamma_{i,j} = \gamma_{n,j} = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{n,\ell}\alpha'_{\ell,j} = \alpha_{n,n}\alpha'_{n,j} = \alpha'_{n,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=n \text{ ou } j=i \\ -1 & \text{si } j=n-1 \text{ ou } j=i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a "encore" $\gamma_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } |i-j|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

<u>L'inverse de A est la matrice $A^{-1} = (\gamma_{i,j})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\gamma_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i=j<n \\ 1 & \text{si } i=j=n \\ -1 & \text{si } |i-j|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.</u>

(*) voir dernière page A^{-1}.

Q3 a] Soit λ une valeur propre de Σ_S. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$\lambda \|X\|^2 = \lambda \langle X, X \rangle = \langle X, \lambda X \rangle = \langle X, \Sigma_S X \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{cov}(S_i, S_j) y_j \right)$.

$\lambda \|X\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \,\mathrm{cov}(S_i, S_j) = \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i S_i, \sum_{j=1}^{n} x_j S_j \right) = V\left(\sum_{i=1}^{n} x_i S_i \right) \geq 0$. $\lambda \|X\|^2 \geq 0$.

Or X n'est pas nul donc $\|X\|^2 > 0$. Ainsi $\lambda \geq 0$.

<u>Les valeurs propres de Σ_S sont toutes positives.</u>

b] Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

et c] $\mathrm{cov}(S_i, S_j) = \mathrm{cov}\left(\sum_{\ell=1}^{i} X_\ell, \sum_{e=1}^{j} X_e \right) = \sum_{\ell=1}^{i} \sum_{e=1}^{j} \mathrm{cov}(X_\ell, X_e)$. Rappelons que $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ indépendantes

Alors $\forall (\ell, e) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{cov}(X_\ell, X_e) = \begin{cases} V(X_\ell) & \text{si } \ell = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

donc $\forall (\ell, e) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{cov}(X_\ell, X_e) = \begin{cases} p(1-p) & \text{si } \ell = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

<u>1er cas</u> : $i \leq j$. $\mathrm{cov}(S_i, S_j) = \sum_{\ell=1}^{i} \sum_{e=1}^{j} \mathrm{cov}(X_\ell, X_e) = \sum_{\ell=1}^{i} \mathrm{cov}(X_\ell, X_\ell) = \sum_{\ell=1}^{i} V(X_\ell) = i\, p(1-p)$

<u>2ième cas</u> : $i > j$ $\mathrm{cov}(S_i, S_j) = \sum_{\ell=1}^{i} \sum_{e=1}^{j} \mathrm{cov}(X_\ell, X_e) = \sum_{e=1}^{j} \sum_{\ell=1}^{i} \mathrm{cov}(X_\ell, X_e) = \sum_{e=1}^{j} \mathrm{cov}(X_e, X_e) = \sum_{e=1}^{j} V(X_e) = j\, p(1-p)$.

donc $\mathrm{cov}(S_i, S_j) = \begin{cases} p(1-p)\, i & \text{si } i \leq j \\ p(1-p)\, j & \text{si } i > j \end{cases}$; $\mathrm{cov}(S_i, S_j) = p(1-p) \min(i,j)$.

<u>$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{cov}(S_i, S_j) = p(1-p) \min(i,j)$.</u> <u>$\Sigma_S = p(1-p) A$.</u>

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>si vous trouvez des erreurs importantes me le dire.</u>