HEC 2012 S20

Exercice principal S20

1. Question de cours : Théorème de la limite centrée.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires centrées réduites définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même densité de probabilité, et admettant des moments jusqu'à l'ordre 4.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note m_4 le moment d'ordre 4 de X_n.

a) Montrer que $m_4 > 1$.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n^* = \dfrac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k^2-1)$.

Justifier la convergence en loi de la suite $(Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $U_n = \sqrt{\dfrac{n}{m_4-1}}\,\overline{X}_n^2$.

Calculer $E(U_n)$ et en déduire la convergence en probabilité vers 0 de la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Soit x et ε deux réels arbitraires avec $\varepsilon > 0$.

a) Établir l'encadrement : $P(Y_n^* \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* \leqslant x+\varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon)$.

b) En déduire l'existence d'un entier N_ε tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, on a :

$$\Phi(x) - \varepsilon \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant \Phi(x+\varepsilon) + \varepsilon$$

c) Que peut-on en conclure pour la suite $(Y_n^* - U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((X_k - \overline{X}_n)^2 - 1\right)$.

Déduire des résultats précédents, la limite en loi de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice sans préparation S20

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. Soit T l'application qui à toute fonction $f \in E$, associe la fonction $F = T(f)$ définie par : $F(0) = f(0)$ et $\forall x > 0, F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

HEC 2012 S20 Correction de l'exercice principal

(Q1) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$ et de même loi. On suppose que les variables aléatoires de cette suite ont une espérance m et une variance σ^2 $(\sigma>0)$.

On pose $S_n = X_1+X_2+\dots+X_n$ et $S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \dfrac{S_n - nm}{\sqrt{n}\,\sigma}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

La suite (S_n^*) converge en probabilité vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n^*\leq x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$.

(Q2) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $T_n = X_n^2$.

$E(X_n^2) = V(X_n)+(E(X_n))^2$

$E(X_n)$ existe et vaut 0. $V(X_n)$ existe et vaut 1. Donc $E(X_n^2)$ existe et vaut 1.
$E(T_n)$ existe et vaut 1. X_n possède un moment d'ordre 4 donc T_n possède un moment d'ordre 2 et une variance. $V(T_n) = E(T_n^2)-(E(T_n))^2 = E(X_n^4)-(E(X_n^2))^2 = m_4 - 1$.
X_n est une variable aléatoire à densité donc T_n également. Alors $V(T_n)>0$.
Ainsi $m_4 - 1 > 0$. Ce qui donne $\underline{\underline{m_4>1}}$.

b) Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \sum_{k=1}^{n} T_k$.

- $(X_k^2)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes car $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.
- Toutes les variables aléatoires de la suite $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi car toutes les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $E(X_n^2)$ existe et vaut 1
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $V(X_n^2)$ existe et vaut m_4-1
- $m_4 - 1 > 0$

Alors la suite de terme général $H_n^* = \dfrac{H_n - E(H_n)}{\sqrt{V(H_n)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

→

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(H_n) = n\,E(X_1^2)$ et $V(H_n) = n\,V(X_1^2)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(H_n) = n$ et $V(H_n) = n(m_4 - 1)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n^* = \dfrac{H_n - n}{\sqrt{n(m_4-1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\right] = \dfrac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}\sum_{k=1}^{n}(X_k^2 - 1) = Y_n^*$.

<u>Remarque</u>.. $Y_n^* = \dfrac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{V(Y_n)}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$!

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n^* = H_n^*$. Donc $(Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite ... ou $(Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

(Q3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et possèdent une variance égale à 1.

Alors $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ possède une variance égale à n.

Alors $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ possède une variance égale à $\frac{1}{n^2} \times n$ donc à $\frac{1}{n}$.

Ainsi $V(\overline{X}_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n}$. Alors $E(\overline{X}_n^2)$ existe et vaut $V(\overline{X}_n) + (E(\overline{X}_n))^2$.

$E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)\right) = \frac{1}{n}E(X_1) + \frac{1}{n}E(X_2) + \dots + \frac{1}{n}E(X_n) = 0$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ E(X_k) = 0$

Alors $E(\overline{X}_n^2)$ existe et vaut $\frac{1}{n}$.

Donc $U_n = \sqrt{\dfrac{n}{m_4-1}}\ \overline{X}_n^2$ possède une espérance qui vaut $\sqrt{\dfrac{n}{m_4-1}} \times \dfrac{1}{n}$.

<u>$E(U_n)$ existe et vaut $\dfrac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.</u>

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et possède une espérance. L'inégalité de Markov donne alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(|U_n - 0| \geq \varepsilon) = P(U_n \geq \varepsilon) \leq \dfrac{E(U_n)}{\varepsilon}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq P(|U_n - 0| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}\right) = 0$

Par encadrement il vient alors $\lim_{n\to+\infty} P(|U_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $(U_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

(Q4) a) • Soit $\omega \in \Omega$ tel que $Y_n^*(\omega) \leq x$. Comme $U_n(\omega) \geq 0$: $Y_n^*(\omega) - U_n(\omega) \leq Y_n^*(\omega) \leq x$.

$\forall \omega \in \Omega$, $Y_n^*(\omega) \leq x \Rightarrow (Y_n^* - U_n)(\omega) \leq x$. Ainsi $\{Y_n^* \leq x\} \subset \{Y_n^* - U_n \leq x\}$.

Par croissance de P : $P(Y_n^* \leq x) \leq P(Y_n^* - U_n \leq x)$.

• Soit $\omega \in \Omega$ tel que $(Y_n^* - U_n)(\omega) \leq x$.

1er cas.. $Y_n^*(\omega) \leq x + \varepsilon$ et c'est très bien.

2e cas.. $Y_n^*(\omega) > x + \varepsilon$.

Alors $x \geq (Y_n^* - U_n)(\omega) = Y_n^*(\omega) - U_n(\omega) > x + \varepsilon - U_n(\omega)$.

donc $U_n(\omega) > x + \varepsilon - x = \varepsilon$. Alors $U_n(\omega) \geq \varepsilon$!

Ainsi $\forall \omega \in \Omega$, $(Y_n^* - U_n)(\omega) \leq x \Rightarrow Y_n^*(\omega) \leq x + \varepsilon$ ou $U_n(\omega) \geq \varepsilon$!

$\{Y_n^* - U_n \leq x\} \subset \{Y_n^* \leq x+\varepsilon\} \cup \{U_n \geq \varepsilon\}$. Par croissance de P :

$P(Y_n^* - U_n \leq x) \leq P(\{Y_n^* \leq x+\varepsilon\} \cup \{U_n \geq \varepsilon\}) = P(Y_n^* \leq x+\varepsilon) + P(U_n \geq \varepsilon) - \underbrace{P(\{Y_n^* \leq x+\varepsilon\} \cap \{U_n \geq \varepsilon\})}_{\geq 0}$

donc $P(Y_n^* - U_n \leq x) \leq P(Y_n^* \leq x+\varepsilon) + P(U_n \geq \varepsilon)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n^* \leq x) \leq P(Y_n^* - U_n \leq x) \leq P(Y_n^* \leq x+\varepsilon) + P(U_n \geq \varepsilon)$.

b) $(Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite donc $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n^* \leq x) \overset{(1)}{=} \phi(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n^* \leq x+\varepsilon) = \phi(x+\varepsilon)$.

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

Alors $\lim_{n\to+\infty} P(U_n \geq \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} P(|U_n| \geq \varepsilon) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(P(Y_n^* \leq x+\varepsilon) + P(U_n \geq \varepsilon)\right) \overset{(2)}{=} \phi(x+\varepsilon)$.

(1) donne l'existence de N'_ε dans $\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N'_\varepsilon \Rightarrow |P(Y_n^* \leq x) - \phi(x)| < \varepsilon$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N'_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < P(Y_n^* \leq x) - \phi(x) < \varepsilon \Rightarrow \phi(x) - \varepsilon < P(Y_n^* \leq x)$;

(2) donne l'existence de N''_ε dans $\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N''_\varepsilon \Rightarrow |P(Y_n^* \leq x+\varepsilon) + P(U_n \geq \varepsilon) - \phi(x+\varepsilon)| < \varepsilon$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N''_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < P(Y_n^* \leq x+\varepsilon) + P(U_n \geq \varepsilon) - \phi(x+\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow P(Y_n^* \leq x+\varepsilon) + P(U_n \geq \varepsilon) < \phi(x+\varepsilon)+\varepsilon$

Soit $N_\varepsilon = \max(N'_\varepsilon, N''_\varepsilon)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N_\varepsilon$. $n \geq N'_\varepsilon$ et $n \geq N''_\varepsilon$.

Alors 1) $P(Y_n^* \leq x) \leq P(Y_n^* - U_n \leq x) + P(Y_n^* \leq x+\varepsilon) + P(U_n \geq \varepsilon)$

2) $\phi(x) - \varepsilon < P(Y_n^* \leq x)$ donc $\phi(x) - \varepsilon \leq P(Y_n^* \leq x)$

3) $P(Y_n^* \leq x+\varepsilon) + P(U_n \geq \varepsilon) < \phi(x+\varepsilon)+\varepsilon$ donc $P(Y_n^* \leq x+\varepsilon) + P(U_n \geq \varepsilon) \leq \phi(x+\varepsilon)+\varepsilon$

Ainsi $\phi(x) - \varepsilon \leq P(Y_n^* - U_n \leq x) \leq \phi(x+\varepsilon)+\varepsilon$.

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \phi(x) - \varepsilon \leq P(Y_n^* - U_n \leq x) \leq \phi(x+\varepsilon)+\varepsilon$.

c) Ici c'est plus délicat que le seul point d'interrogation le laisse supposer.
Oublions le "soit x et ε deux réels arbitraires avec $\varepsilon > 0$".
Notons que $(Y_n^* - U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Soit à noter que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} P(Y_n^* - U_n \leq x) = \phi(x)$

Fixons x dans $\mathbb{R}$. Notons, en utilisant la définition que
$\lim_{n \to +\infty} P(Y_n^* - U_n \leq x) = \phi(x)$. Notons donc que : $\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*, \exists P_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq P_{\varepsilon'} \Rightarrow |P(Y_n^* - U_n \leq x) - \phi(x)| < \varepsilon'$

Fixons ε' dans $\mathbb{R}_+^*$. ϕ est continue en x donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, |y-x| < \alpha \Rightarrow |\phi(y) - \phi(x)| < \frac{\varepsilon'}{2}$.

Posons $\varepsilon = \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\varepsilon'}{2}\right)$. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $|(x+\varepsilon) - x| = |\varepsilon| = \varepsilon < \alpha$ donc $|\phi(x+\varepsilon) - \phi(x)| < \frac{\varepsilon'}{2}$.

Alors $\phi(x+\varepsilon) - \phi(x) < \frac{\varepsilon'}{2}$ donc $\phi(x+\varepsilon) < \phi(x) + \frac{\varepsilon'}{2}$;

Ainsi $\phi(x+\varepsilon) + \varepsilon < \phi(x) + \frac{\varepsilon'}{2} + \varepsilon \leq \phi(x) + \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2}$ donc $\phi(x+\varepsilon) + \varepsilon < \phi(x) + \varepsilon'$.

De plus $\phi(x) - \varepsilon' < \phi(x) - \varepsilon$ car $\varepsilon < \varepsilon'$.

Appliquons alors le résultat b).

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \phi(x) - \varepsilon \leq P(Y_n^* - U_n \leq x) \leq \phi(x+\varepsilon)+\varepsilon$.

Notons que N_ε dépend de ε et que ε dépend de ε'. Posons alors $P_{\varepsilon'} = N_\varepsilon$ (!).

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq P_{\varepsilon'} \Rightarrow \phi(x) - \varepsilon' < \phi(x) - \varepsilon \leq P(Y_n^* - U_n \leq x) \leq \phi(x+\varepsilon)+\varepsilon < \phi(x) + \varepsilon'$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant p_{\varepsilon'} \Rightarrow \phi(x) - \varepsilon' < P(Y_n^* - U_n \leqslant x) < \phi(x) + \varepsilon' \Rightarrow |P(Y_n^* - U_n \leqslant x) - \phi(x)| < \varepsilon'$.

Finalement nous avons montré que :

$\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant p_{\varepsilon'} \Rightarrow |P(Y_n^* - U_n \leqslant x) - \phi(x)| < \varepsilon'$.

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Y_n^* - U_n \leqslant x) = \phi(x)$ et ceci pour tout réel x.

Alors $(Y_n^* - U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

(Q5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum\limits_{\ell=1}^{n}\left((X_\ell - \overline{X}_n)^2 - 1\right) = \sum\limits_{\ell=1}^{n}\left(X_\ell^2 - 2X_\ell \overline{X}_n + \overline{X}_n^2 - 1\right) = \sum\limits_{\ell=1}^{n}(X_\ell^2 - 1) - 2\overline{X}_n \sum\limits_{\ell=1}^{n} X_\ell + n\overline{X}_n^2$

$$\sum_{\ell=1}^{n}\left((X_\ell - \overline{X}_n)^2 - 1\right) = \sum_{\ell=1}^{n}(X_\ell^2 - 1) - 2\overline{X}_n(n\overline{X}_n) + n\overline{X}_n^2 = \sum_{\ell=1}^{n}(X_\ell^2 - 1) - n\overline{X}_n^2.$$

$$\sum_{\ell=1}^{n}\left((X_\ell - \overline{X}_n)^2 - 1\right) = \sqrt{n(m_4 - 1)}\, Y_n^* - \sqrt{n(m_4-1)}\, U_n = \sqrt{n}\sqrt{m_4 - 1}\,(Y_n^* - U_n).$$

donc $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{\ell=1}^{n}\left((X_\ell - \overline{X}_n)^2 - 1\right) = \sqrt{m_4 - 1}\,(Y_n^* - U_n)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z_n \leqslant x) = P(\sqrt{m_4 - 1}(Y_n^* - U_n) \leqslant x) \overset{\sqrt{m_4-1} > 0}{=} P\left(Y_n^* - U_n \leqslant \frac{x}{\sqrt{m_4 - 1}}\right)$.

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Z_n \leqslant x) = \lim\limits_{n \to +\infty} P\left(Y_n^* - U_n \leqslant \frac{x}{\sqrt{m_4 - 1}}\right) = \phi\left(\frac{x}{\sqrt{m_4 - 1}}\right)$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Soit W une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et de variance $m_4 - 1$.

$P(W \leqslant x) = P\left(\frac{W - 0}{\sqrt{m_4 - 1}} \leqslant \frac{x - 0}{\sqrt{m_4 - 1}}\right) = P\left(\frac{W - E(W)}{\sqrt{V(W)}} \leqslant \frac{x}{\sqrt{m_4 - 1}}\right) = \phi\left(\frac{x}{\sqrt{m_4 - 1}}\right)$ car $\frac{W - E(W)}{\sqrt{V(W)}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n \to +\infty} P(Z_n \leqslant x) = P(W \leqslant x)$

Alors $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et de variance $m_4 - 1$.

Question 5 **HEC 2012-5-S20** $\boxed{\text{F 2}}$

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $F = T(f)$ définie par :

$$F(0) = f(0) \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[,\ F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Q1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

Q2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Question de cours. *Théorème de la limite centrée.*

Q1 • Soit $f \in E$. Posons $F = T(f)$ et montrons que $F \in E$.

Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $P_f(x) = \int_0^x f(t)dt$. P_f est la primitive de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0 (f est continue sur $[0,+\infty[$).

P_f est donc de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. De plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Alors par produit $F = T(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Donc F est largement continue sur $]0,+\infty[$.

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right) = \lim_{x\to 0}\frac{P_f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{P_f(x)-P_f(0)}{x-0} = P_f'(0) = f(0)$. Ainsi F est continue en 0.

F est donc continue sur $[0,+\infty[$. $F \in E$.

$\forall f \in E$, $T(f) \in E$. <u>T est une application de E dans E.</u>

• Montrons que T est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(f,g) \in E^2$.

→ $T(\lambda f+g)(0) = (\lambda f+g)(0) = \lambda f(0)+g(0) = \lambda T(f)(0) + T(g)(0) = (\lambda T(f)+T(g))(0)$.

→ Soit $x \in]0,+\infty[$. $T(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f+g)(u)du = \lambda\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$.

$T(\lambda f+g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x) = (\lambda T(f)+T(g))(x)$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[$, $T(\lambda f+g)(x) = (\lambda T(f)+T(g))(x)$. $T(\lambda f+g) = \lambda T(f)+T(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall (f,g) \in E^2$, $T(\lambda f+g) = \lambda T(f)+T(g)$. <u>$T$ est linéaire</u>.

Finalement <u>T est un endomorphisme de E</u>

• Soit $f \in \operatorname{Ker} T$. $T(f) = 0_E$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 0$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $\int_0^x f(t)dt = 0$.

Alors $\forall x \in [0, +\infty[$, $\int_0^x f(t)dt = 0$. En dérivant on obtient : $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = 0$. $f = 0_E$.

Ainsi $\operatorname{Ker} T = \{0_E\}$. T est injectif.

Remarque.. Nous avons vu que si $f \in E$, $T(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
les éléments de $\operatorname{Im} T$ sont donc de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Posons $\forall x \in [0, +\infty[$, $h(x) = |x-1|$.
h est continue sur $[0, +\infty[$ mais n'est pas dérivable en 1. Ainsi $h \in E$ mais $h \notin \operatorname{Im} T$
Alors T n'est pas surjectif.

Exercice.. Montrer que $\operatorname{Im} T$ est l'ensemble des éléments g de E tels que :

1) g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$;

2) $\lim_{x \mapsto 0^+} (x g'(x)) = 0$.

(Q2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\mathcal{E}_\lambda = \{f \in E \mid T(f) = \lambda f\}$. Notons que $\mathcal{E}_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

Si $\lambda = 0$: $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_0 = \operatorname{Ker} T = \{0_E\}$. Donc nous supposerons dans ce qui suit $\lambda \neq 0$.

Analysons un peu ! Partons d'un élément f appartenant à $\mathcal{E}_\lambda$.

Notons de nouveau P_f la primitive de f sur $[0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0.

$T(f)(0) = \lambda f(0)$ donc $f(0) = \lambda f(0)$, $(\lambda - 1) f(0) = 0$. Notons que si $\lambda \neq 1$: $f(0) = 0$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $P_f'(x) = f(x) = \frac{1}{\lambda x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{\lambda x} P_f(x)$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $P_f'(x) - \frac{1}{\lambda x} P_f(x) = 0$.

Notons que $x \mapsto \frac{1}{\lambda} \ln x$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction continue sur $]0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{\lambda x}$.

Le cours permet de dire que : $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0, +\infty[$, $P_f(x) = C\, e^{\frac{1}{\lambda} \ln x}$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = P_f'(x) = \frac{1}{\lambda x} P_f(x) = C \frac{1}{\lambda x} e^{\frac{1}{\lambda} \ln x} = C \frac{1}{\lambda x} x^{1/\lambda} = \frac{C}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda} - 1}$.

Donc $\exists d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = d\, x^{\frac{1}{\lambda} - 1}$ et $f(0) = 0$ si $\lambda \neq 1$. Poursuivons l'analyse.

f est continue en 0 donc $f(0) = \lim_{x \mapsto 0^+} \left(d\, x^{\frac{1}{\lambda}-1} \right)$. Notons que cette limite est finie !

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$ $\quad \lim_{x \mapsto 0^+} \left(x^{\frac{1}{\lambda}-1} \right) = +\infty$ donc nécessairement $d = 0$.

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0$ $\quad f(0) = \lim_{x \mapsto 0^+} (d\, x^0) = d$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = d\, x^{\frac{1}{\lambda}-1} = d x^0 = d$.

donc $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = d$. Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_1(x) = 1$. $\underline{f = d\, f_1}$

Si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$ $\quad$ Alors $f(0) = 0$ car $d \neq 2$ et ainsi $f(0) = d \times 0$.

De plus $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = d \times x^{\frac{1}{\lambda}-1}$

Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. $\underline{f = d\, f_\lambda}$.

Résumons cette analyse.

Si $\lambda = 0$: $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$: $\mathcal{S}_\lambda \subset \{0_E\}$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0$ donc si $\lambda = 1$:

$\mathcal{S}_1 \subset \mathrm{Vect}(f_1)$. Si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$, $\mathcal{S}_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$.

Notons que $0_E \in \mathcal{S}_\lambda$, que $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \lambda \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ et

$\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda \in]0,1[$.

Alors 1° $\forall \lambda \in]-\infty, 0] \cup]1,+\infty[$, $\mathcal{S}_\lambda = \{0_E\}$.

2° $\mathcal{S}_1 \subset \mathrm{Vect}(f_1)$ où $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_1(x) = 1$.

3° $\forall \lambda \in]0,1[$, $\mathcal{S}_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Reste à envisager deux réciproques.

Notons que $\mathcal{S}_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda\, \mathrm{Id}_E)$ donc $\mathcal{S}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de E ceci pour tout λ dans $\mathbb{R}$.

f_1 est continue sur $[0,\infty[$, $f_1 \in E$. $\quad T(f_1)(0) = f_1(0)$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $T(f_1)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x 1\, dt = \frac{1}{x} \times x = 1 = f_1(x)$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[$, $T(f_1)(x) = 1 \times f_1(x)$. $T(f_1) = 1 \times f_1$. $f_1 \in \mathcal{S}_1$.

Donc $\mathrm{Vect}(f_1) \subset \mathcal{E}_1$. Alors $\mathcal{E}_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$.

Soit $\lambda \in]0,1[$. $\mathcal{E}_\lambda \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$. Pour montrer que $\mathrm{Vect}(f_\lambda) \subset \mathcal{E}_\lambda$ il suffit de montrer que $f_\lambda \in \mathcal{E}_\lambda$ car $\mathcal{E}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de E.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

f_λ est continue sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\lambda}-1} \underset{\frac{1}{\lambda}-1>0}{=} 0 = f_\lambda(0)$ donc f_λ est continue en 0.

Ainsi f_λ est continue sur $[0,+\infty[$. $f_\lambda \in E$.

$T(f_\lambda)(0) = f_\lambda(0) = 0 = \lambda f_\lambda(0)$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

Soit $\varepsilon \in]0,+\infty[$. $\displaystyle\int_\varepsilon^x f_\lambda(t)\,dt = \int_\varepsilon^x t^{\frac{1}{\lambda}-1}\,dt = \left[\frac{t^{1/\lambda}}{1/\lambda}\right]_\varepsilon^x = \lambda\left[x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}\right]$.

Alors $\displaystyle\int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\lambda\left[x^{1/\lambda} - \varepsilon^{1/\lambda}\right]\right) = \lambda x^{1/\lambda}$ car $\frac{1}{\lambda} > 0$.

Alors $T(f_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f_\lambda(t)\,dt = \frac{1}{x}\lambda x^{1/\lambda} = \lambda\, x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda f_\lambda(x)$.

Finalement $\forall x \in [0,+\infty[$, $T(f_\lambda)(x) = \lambda f_\lambda(x)$. $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$; $f_\lambda \in \mathcal{E}_\lambda$.

Alors $\mathrm{Vect}(f_\lambda) \subset \mathcal{E}_\lambda$ et finalement $\mathcal{E}_\lambda = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$.

<u>Conclusion</u> :
- $\forall \lambda \in]-\infty,0] \cup]1,+\infty[$, $\mathcal{E}_\lambda = \{0_E\}$
- $\mathcal{E}_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$ où f_1 est l'élément de E défini par $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_1(x) = 1$
- Si $\lambda \in]0,1[$, $\mathcal{E}_\lambda = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où f_λ est l'élément de E défini par :
  $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Ainsi → $\mathrm{Sp}\, T =]0,1]$

→ $\mathrm{SEP}(T,\lambda) = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$ pour tout $\lambda \in]0,1]$.

<u>Remarque</u> .. On aurait sans doute pu poser $\forall \lambda \in]0,1]$, $\forall x \in \underline{[}0,+\infty[$, $f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ ...

HEC 2012 S 23

Exercice principal S23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle et on note $\langle , \rangle$ son produit scalaire canonique.

1. Question de cours : Développement limité d'ordre 1 au point $a \in \mathbb{R}^n$ pour une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ convexes et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Les fonctions suivantes sont-elles convexes : $f_1 + f_2$, αf_1 , $\min(f_1, f_2)$ et $\max(f_1, f_2)$?

b) Lorsque $n = 1$ a-t-on $f_1 \circ f_2$ convexe ?

3. Soit f une fonction convexe et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $(x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, soit $g_{x,h}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g_{x,h}(t) = f(x+th)$.

a) Montrer que $g_{x,h}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $g_{x,h}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'_{x,h}(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

c) En déduire que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle \nabla f(x), y - x\rangle \leqslant f(y) - f(x)$, où $\nabla f(x)$ est le gradient de f en x.

d) Soit a un point critique de f. Montrer que f admet un minimum global au point a.

4. Dans cette question, soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n et soit f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$.

a) Vérifier que f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \nabla f(x) = Ax$.

b) En déduire que si f est convexe, alors toutes les valeurs propres de A sont positives.

Exercice sans préparation S23

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant les conditions suivantes :

- $P(X = 0) = 0$;
- $P(X > 0) = \alpha > 0$;
- $P_{[X>0]}(X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ avec $a > 0$;
- (*) $P_{[X<0]}(-X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ avec $b > 0$.

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. La variable aléatoire X est-elle à densité ?
3. Établir l'existence de $E(X)$. Calculer $E(X)$.

(*) Ici je propose plutôt $P_{[X<0]}(X < x)$, non ?

Je propose également de $]0,1[$.

Q1) f est une fonction numérique de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. $a \in \mathbb{R}^n$

1) f admet un développement limité d'ordre 1 au point a.

2) ce développement limité est :

$$f(a+h) \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|).$$

<u>Remarque</u>.. Posons $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$.

$\forall h=(h_1,h_2,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(a), h\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, h_k$.

Q2) <u>a)</u> • Soit $\lambda \in [0,1]$ et soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

$(f_1+f_2)(\lambda x+(1-\lambda)y) = f_1(\lambda x+(1-\lambda)y)+f_2(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f_1(x)+(1-\lambda)f_1(y)+\lambda f_2(x)+(1-\lambda)f_2(y)$.

$(f_1+f_2)(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda (f_1+f_2)(x)+(1-\lambda)(f_1+f_2)(y)$.

Ainsi <u>f_1+f_2 est convexe sur $\mathbb{R}$.</u>

• Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

$\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $f_1(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f_1(x)+(1-\lambda)f_1(y)$. Comme $\alpha \geq 0$:

$\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\alpha f_1(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda \alpha f_1(x)+(1-\lambda)\alpha f_1(y)$.

$\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $(\alpha f_1)(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda (\alpha f_1)(x)+(1-\lambda)(\alpha f_1)(y)$.

Donc si $\alpha \in \mathbb{R}_+$: <u>αf_1 est convexe.</u>

Il est clair que si $\alpha \in\,]-\infty,0[$, αf_1 est concave donc est "rarement" convexe !

Prenons $\alpha=-1$. Posons $\forall (x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\hat{f}_1(x) = x_1^2$.

Rappelons que $t \mapsto t^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (... sa dérivée seconde est positive).

Soit $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Soit $\lambda \in [0,1]$.

$$\hat{f}_1(\lambda x+(1-\lambda)y) = (\lambda x_1+(1-\lambda)y_1)^2 \underset{t\mapsto t^2 \text{ est convexe}}{\leq} \lambda x_1^2+(1-\lambda)y_1^2 = \lambda \hat{f}_1(x)+(1-\lambda)\hat{f}_1(y).$$

Ainsi $\hat{f}_1$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

Considérons les éléments $x=(1,0,\dots,0)$ et $y=(2,0,\dots,0)$ de $\mathbb{R}^n$. Posons $\lambda = 1/2$

$$\hat{f}_1(\lambda x+(1-\lambda)y) - \lambda \hat{f}_1(x) - (1-\lambda)\hat{f}_1(y) = \left(\tfrac{1}{2}\times 1+\tfrac{1}{2}\times 2\right)^2 - \tfrac{1}{2}\times 1^2 - \tfrac{1}{2}\times 2^2 = \tfrac{9}{4}-\tfrac{5}{2} = -\tfrac{1}{4} < 0.$$

Donc $\hat{f}_1(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda \hat{f}_1(x)+(1-\lambda)\hat{f}_1(y)$. Alors $(-\hat{f}_1)(\lambda x+(1-\lambda)y) > \lambda(-\hat{f}_1)(x)+(1-\lambda)(-\hat{f}_1)(y)$.

$\exists \lambda \in [0,1]$, $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(-f_1)(\lambda x + (1-\lambda) y) > \lambda (-f_1)(x) + (1-\lambda)(-f_1)(y)$.

Ainsi $-\hat{f}_1$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^n$.

Nous avons donc trouvé un réel strictement négatif $\hat{\alpha}$ $(\hat{\alpha} = -1)$ et une application convexe $\hat{f}_1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\hat{\alpha} \hat{f}_1$ ne soit pas convexe.

Ainsi si $\alpha < 0$, αf_1 n'est pas "nécessairement" convexe.

• Posons $\psi = \max(f_1, f_2)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et soit $\lambda \in [0,1]$.

$f_1(x) \leq \psi(x)$, $f_1(y) \leq \psi(y)$, $\lambda \in [0,1]$ et $1-\lambda \in [0,1]$.

Alors $\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y) \leq \lambda \psi(x) + (1-\lambda) \psi(y)$.

Ainsi $f_1(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y) \leq \lambda \psi(x) + (1-\lambda) \psi(y)$.

Donc $f_1(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \psi(x) + (1-\lambda) \psi(y)$. De même $f_2(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \psi(x) + (1-\lambda) \psi(y)$.

Alors $\psi(\lambda x + (1-\lambda) y) = \max(f_1(\lambda x + (1-\lambda) y), f_2(\lambda x + (1-\lambda) y)) \leq \lambda \psi(x) + (1-\lambda) \psi(y)$.

ceci achève de montrer que ψ est convexe.

Ainsi $\max(f_1, f_2)$ est convexe.

Montrons qu'il n'en est pas de même pour $\mathrm{Min}(f_1, f_2)$.

Posons $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\hat{f}_1((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_1^2$ et $\hat{f}_2((x_1, x_2, \dots, x_n)) = (x_1 - 4)^2$.

Nous avons déjà vu que $\hat{f}_1$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$. On montre de la même manière que $\hat{f}_2$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$ en utilisant le fait que $t \mapsto (t-4)^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}$).

Posons $\varphi = \mathrm{Min}(\hat{f}_1, \hat{f}_2)$.

Considérons les éléments $x = (1, 0, \dots, 0)$ et $y = (3, 0, \dots, 0)$ de $\mathbb{R}^n$ et posons $\lambda = \frac{1}{2}$.

$\lambda x + (1-\lambda) y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y = (2, 0, \dots, 0)$.

$\hat{f}_1(\lambda x + (1-\lambda) y) = 2^2 = 4$. $\hat{f}_2(\lambda x + (1-\lambda) y) = (2-4)^2 = 4$. Alors $\varphi(\lambda x + (1-\lambda) y) = 4$.

$\hat{f}_1(x) = 1$, $\hat{f}_1(y) = 9$, $\hat{f}_2(x) = (1-4)^2 = 9$, $\hat{f}_2(y) = (3-4)^2 = 1$.

Ainsi $\varphi(x) = \mathrm{Min}(1, 9)$ et $\varphi(y) = \mathrm{Min}(9, 1)$. $\varphi(x) = \varphi(y) = 1$.

Alors $\lambda \varphi(x) + (1-\lambda) \varphi(y) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = 1 < 4 = \varphi(\lambda x + (1-\lambda) y)$.

$\exists \lambda \in [0,1], \exists (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \ \varphi(\lambda x+(1-\lambda)y) > \lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)$.

Donc φ n'est pas convexe.

Nous avons donc trouvé deux applications convexes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$, telles que $m(\hat{f}_1, \hat{f}_2)$ ne soit pas convexe.

Ainsi <u>$m(f_1, f_2)$ n'est pas nécessairement convexe.</u>

b) Ici encore la réponse est négative.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}, \ \tilde{f}_1(x) = -2x$ et $\tilde{f}_2(x) = x^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \ (\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2)(x) = -2x^2$. $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ et $\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2$ sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \tilde{f}_1''(x) = 0 \geq 0, \ \tilde{f}_2''(x) = 2 \geq 0$ et $(\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2)''(x) = -4 < 0$.

Alors $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ sont convexes mais $\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2$ n'est pas convexe.

<u>Pour $n=1$, $f_1 \circ f_2$ n'est pas nécessairement convexe.</u>

Q3 a) Soit $\lambda \in [0,1]$. Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$

$$g_{x,h}(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2) = f(x+(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)h) \underset{\substack{\uparrow \\ 1=\lambda+(1-\lambda) \text{ donc } x=\lambda x+(1-\lambda)x}}{=} f(\lambda(x+t_1 h)+(1-\lambda)(x+t_2 h)).$$

Comme f est convexe sur $\mathbb{R}^n$: $g_{x,h}(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2) \leq \lambda f(x+t_1 h)+(1-\lambda)f(x+t_2 h) = \lambda g_{x,h}(t_1)+(1-\lambda)g_{x,h}(t_2)$.

$\forall \lambda \in [0,1], \forall (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2, \ g_{x,h}(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2) \leq \lambda g_{x,h}(t_1)+(1-\lambda)g_{x,h}(t_2)$.

<u>$g_{x,h}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.</u>

b) Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, le cours indique (*) que <u>$g_{x,h}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.</u>

(*) Le programme parle de la dérivée de $t \mapsto (f \circ u)(t)$ dans le cas où $u(t) = A + tV$...

<u>De plus $\forall t \in \mathbb{R}, \ g'_{x,h}(t) = \langle \nabla f(x+th), h \rangle$.</u>

<u>En posant $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ on a aussi $\forall t \in \mathbb{R}, \ g'_{x,h}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x+th) \times h_k$</u>

c) Poursuivons avec le couple (x,h).

$g_{x,h}$ étant convexe sur $\mathbb{R}$ on a $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $g_{x,h}(b) \geq g'_{x,h}(a)(b-a) + g_{x,h}(a)$.

Appliquons cela avec $a=0$ et $b=1$. $g_{x,h}(1) \geq g'_{x,h}(0)(1-0) + g_{x,h}(0)$.

$g_{x,h}(1) = f(x+h)$, $g_{x,h}(0) = f(x)$ et $g'_{x,h}(0) = \langle \nabla f(x), h\rangle$.

Alors $f(x+h) \geq \langle \nabla f(x), h\rangle + f(x)$. ou $\langle \nabla f(x), h\rangle \leq f(x+h) - f(x)$.

$\forall (x,h)\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(x), h\rangle \leq f(x+h)-f(x)$.

Prenons un couple (x,y) quelconque d'éléments de $\mathbb{R}^n$. Posons $h = y-x$. $y = x+h$.

Alors $\langle \nabla f(x), y-x\rangle = \langle \nabla f(x), h\rangle \leq f(x+h) - f(x) = f(y) - f(x)$.

Ainsi $\underline{\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2, \ \langle \nabla f(x), y-x\rangle \leq f(y) - f(x).}$

d) Soit a un point critique de f. $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

$\forall y\in\mathbb{R}^n$, $f(y) - f(a) \geq \langle \nabla f(a), y-a\rangle = \langle 0_{\mathbb{R}^n}, y-a\rangle = 0$.

Donc $\forall y\in\mathbb{R}^n$, $f(y)\geq f(a)$.

<u>Si a est un point critique de f, f admet en a un minimum global.</u>

<u>Remarque</u>.. Soit a un point de $\mathbb{R}^n$. Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$:

<u>f admet un minimum global en a si et seulement si a est un point critique de f.</u>

C'est le gros intérêt des fonctions convexes en optimisation.

Si g est une fonction numérique C^1 et concave sur $\mathbb{R}^n$ et si $a\in\mathbb{R}^n$:

<u>g admet un maximum global en a si et seulement si a est un point critique de g.</u>

(Q4) Notons que le texte oblige à identifier $\mathbb{R}^n$ et $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Nous nous y plierons.

a) Posons $A = (a_{i,j})$.

$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\in\mathbb{R}^n$, $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right)x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ car f est une fonction polynômiale.

Posons $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u_{i,j}(x) = x_i x_j$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $u_{i,j}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ car $u_{i,j}$ est polynômiale.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\dfrac{\partial u_{i,j}}{\partial x_k}(x) = \begin{cases} 2x_k & \text{si } i=j=k \\ x_i & \text{si } i \neq k \text{ et } j=k \\ x_j & \text{si } i=k \text{ et } j\neq k \\ 0 & \text{si } i\neq k \text{ et } j\neq k \end{cases}$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et soit $x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x_k}(x).$$

Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \dfrac{1}{2}\Big[a_{k,k}2x_k + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n a_{i,k} x_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n a_{k,j} x_j\Big]$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_{i,k} x_i + \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j$ (on a réparti le $a_{k,k}$ sur entre les deux sommes ...)

Or A est symétrique.

Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_{k,i} x_i + \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j = \sum_{i=1}^n a_{k,i} x_i$.

Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ est la $k^{\text{ième}}$ composante de Ax

Par conséquent $\underline{\nabla f(x) = Ax}$.

b) Supposons que f est convexe et notons que $\nabla f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Alors $0_{\mathbb{R}^n}$ est un point critique de la fonction convexe f. donc f admet en $0_{\mathbb{R}^n}$ un minimum global.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $0 = f(0) \leqslant f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$. Alors $\underline{\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax,x\rangle \geqslant 0}$.

V1 Reconnaître alors que les valeurs propres de la matrice symétrique A sont positives ou nulles.

V2 Soit $\lambda \in Sp\, A$. $\exists x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $Ax = \lambda x$.

Alors $0 \leqslant \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$ et $\|x\|^2 > 0$ donc $\lambda \geqslant 0$.

<u>Si f est convexe les valeurs propres de A sont positives ou nulles.</u>

Remarque. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et A est la hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^n$...

R.

Question 6 HEC 2012-6-S23 $\boxed{\text{F 1}}$ **I. KARDASZEWICZ**

a, b sont deux réels strictement positifs. α est réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabili~~s~~sé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant les conditions suivantes :

- $P(X=0)=0$;
- $P(X>0)=\alpha$;
- $P_{\{X>0\}}(X \leqslant x) = \begin{cases} 1-e^{-ax} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$;
- $P_{\{X<0\}}(-X \leqslant x) = \begin{cases} 1-e^{-bx} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. *Je mettrais plutôt* $P_{\{X<0\}}(-X < x) = \begin{cases} 1-e^{-bx} & si\ x>0 \\ 0 & si\ x \leqslant 0 \end{cases}$.

Q1. Déterminer la fonction de répartition de X.

Q2. La variable aléatoire X est-elle à à densité ?

Q3. Établir l'existence de $E(X)$. Calculer $E(X)$.

Question de cours. *Développement limité d'ordre 1 au point a de $\mathbb{R}^n$ pour une fonction numérique f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.*

Q1 $(\{X>0\}, \{X=0\}, \{X<0\})$ est un système complet d'événements.

Alors $1 = P(X>0)+P(X=0)+P(X<0) = \alpha + 0 + P(X<0)$. $\underline{P(X<0) = 1-\alpha.}$ Dans la suite nous supposons $\alpha \in]0,1[$.

Soit $x \in]-\infty, 0]$

$P(X \leqslant x) = P(\{X\leqslant x\} \cap \{X<0\}) + P(\{X \leqslant x\} \cap \{X=0\}) + P(\{X\leqslant x\} \cap \{X>0\})$.

$\{X\leqslant x\} \cap \{X>0\} = \emptyset$ donc $P(\{X\leqslant x\}\cap\{X>0\}) = 0$ ... car $x \leqslant 0$

$\{X\leqslant x\} \cap \{X=0\} \subset \{X=0\}$. Mais $0 \leqslant P(\{X\leqslant x\} \cap \{X=0\}) \leqslant P(X=0) = 0$.

donc $P(\{X\leqslant x\}\cap\{X=0\}) = 0$.

Alors $P(X\leqslant x) = P(\{X\leqslant x\} \cap \{X<0\}) = P(\{-X \geqslant -x\} \cap \{X<0\})$

$P(X \leqslant x) = P(X<0)\, P_{\{X<0\}}(-X \geqslant -x) = (1-\alpha)\,(1 - P_{\{X<0\}}(-X < -x)) = (1-\alpha)\left[1-(1-e^{-b(-x)})\right]$

$P_{\{X<0\}}$ est une probabilité...

$-x \geqslant 0$ donc drait si $-x > 0$ et encore vrai si $-x = 0$!!

$\underline{P(X \leqslant x) = (1-\alpha)\, e^{bx} \text{ si } x \in]-\infty, 0].}$

Soit $x \in]0, +\infty[$.

$P(X\leqslant x) = P(\{X\leqslant x\}\cap\{X<0\}) + P(\{X\leqslant x\}\cap\{X=0\}) + P(\{X\leqslant x\}\cap\{X>0\})$.

$P(\{X\leqslant x\}\cap\{X<0\}) = P(X<0) = 1-\alpha$ et comme plus haut $P(\{X\leqslant x\}\cap\{X=0\}) = 0$ car $P(X=0)=0$.

Ainsi $P(X\leqslant x) = 1-\alpha + P(X>0)\, P_{\{X>0\}}(X\leqslant x) = 1-\alpha+\alpha(1-e^{-ax}) = 1-\alpha e^{-ax}$.

La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie par

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} (1-\alpha)e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1-\alpha e^{-ax} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}}.$$

(Q2) $(1-\alpha)e^{b\times 0} = 1-\alpha = 1-\alpha e^{-a\times 0}$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} (1-\alpha)e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1-\alpha e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

$x \mapsto (1-\alpha)e^{bx}$ et $x \mapsto 1-\alpha e^{-ax}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc F_X est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. Ceci suffit pour dire que :

1°/ F_X est continue sur $\mathbb{R}$

2°/ F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{0\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Ainsi <u>X est une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F'_X(x) = (1-\alpha)b e^{bx}$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ F'_X(x) = \alpha a e^{-ax}$.

Posons $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} \alpha a e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ (1-\alpha)b e^{bx} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}}$.

f_X est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide sur $\mathbb{R}-\{0\}$, donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points, avec F'_X donc <u>f_X est une densité de X.</u>

(Q3) Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

g est une densité d'une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. Alors $\int_0^{+\infty} x g(x)\,dx$ converge et vaut $E(Y)$.

donc $\underline{\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx \text{ converge et vaut } \frac{1}{\lambda}}$. ① $-Y$ est aussi une variable aléatoire à densité et $h : x \mapsto \frac{1}{|-1|} g(-x)$ en est une densité.

$E(-Y)$ existe et vaut $-E(Y)$ donc $-\frac{1}{\lambda}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$ existe et vaut $-\frac{1}{\lambda}$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Donc $\int_{-\infty}^{0} \lambda x e^{\lambda x}\,dx$ existe et vaut $-\frac{1}{\lambda}$. ②

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x f_X(x) = \begin{cases} \alpha a x e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ (1-\alpha) b x e^{bx} & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi • $\int_{0}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $\alpha \times \frac{1}{a}$ (d'après ①).

• $\int_{-\infty}^{0} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $(1-\alpha)\left(-\frac{1}{b}\right)$ (d'après ②).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{\alpha}{a} - \frac{1-\alpha}{b}$.

Donc X possède une espérance et $E(X) = \frac{\alpha}{a} - \frac{1-\alpha}{b}$.

HEC 2012 S 28

Exercice principal S28

Soit p un paramètre réel inconnu vérifiant $0 < p < 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli d'espérance p.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$; on note $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X et exp la fonction exponentielle.

1. Question de cours : Rappeler comment l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de définir à partir de $\overline{X}_n$, un intervalle de confiance de risque α $(0 < \alpha < 1)$ pour le paramètre p.

2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) = -pt + \ln(1 - p + pe^t)$.

a) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée seconde vérifie : $\forall t \geqslant 0,\ f''(t) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

b) Montrer à l'aide d'une formule de Taylor que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $f(t) \leqslant \dfrac{t^2}{8}$.

c) En déduire que pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $E\big(\exp(t(X_k - p))\big) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{8}\right)$.

3.a) Montrer que si S est une variable aléatoire discrète finie à valeurs positives et a un réel strictement positif, on a : $P(S \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(S)}{a}$.

b) À l'aide des questions 2.c) et 3.a), établir pour tout couple $(t, \varepsilon) \in (\mathbb{R}^+)^2$, l'inégalité :

$$P(\overline{X}_n - p \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}\right)$$

c) Montrer que pour tout $\varepsilon \geqslant 0$, on a : $P(|\overline{X}_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\exp(-2n\varepsilon^2)$.

d) En déduire un intervalle de confiance de risque α pour le paramètre p et comparer sa longueur, lorsque α est proche de 0, à celle de l'intervalle de confiance demandé dans la question 1.

Exercice sans préparation S28

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$. On note $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.

1. Exprimer P^{-1} en fonction de P.

2. Établir l'inégalité : $\left|\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} p_{i,j}\right| \leqslant n$.

Q1 Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $E(X_k)$ existe et vaut p.

Alors $E(\sum_{k=1}^{n} X_k)$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$ donc np.

Alors $E(\overline{X}_n)$ existe et vaut p.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $V(X_k)$ existe et vaut $p(1-p)$.

De plus $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes. Ainsi $V(\sum_{k=1}^{n} X_k)$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{n} V(X_k)$ donc $np(1-p)$

Alors $V(\overline{X}_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n^2} V(\sum_{k=1}^{n} X_k)$ donc $\frac{p(1-p)}{n}$.

Notons encore que $\frac{1}{4} - p(1-p) = \frac{1}{4}[1-4p+4p^2] = (2p-1)^2/4 \geq 0$.

Ainsi $0 \leq p(1-p) \leq \frac{1}{4}$. Alors $V(\overline{X}_n) \leq \frac{1}{4n}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut alors être appliquée à $\overline{X}_n$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $P(|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Or $P(|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)| \geq \varepsilon) = P(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) = P(\{\overline{X}_n - p \geq \varepsilon\} \cup \{\overline{X}_n - p \leq -\varepsilon\})$.

$P(|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)| \geq \varepsilon) = P(\{p \leq \overline{X}_n - \varepsilon\} \cup \{p \geq \overline{X}_n + \varepsilon\}) = P(p \notin [\overline{X}_n - \varepsilon, \overline{X}_n + \varepsilon])$.

Donc $P(p \notin [\overline{X}_n - \varepsilon, \overline{X}_n + \varepsilon]) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$; $P(p \in [\overline{X}_n - \varepsilon, \overline{X}_n + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ (passage au complémentaire).

Alors $[\overline{X}_n - \varepsilon, \overline{X}_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance de p au risque α ou à la confiance $1-\alpha$ dès que $1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq 1 - \alpha$ ou $\alpha \geq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ ou encore $\varepsilon^2 \geq \frac{1}{4n\alpha}$.

<u>Ainsi en posant $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}}$ on peut dire que $[\overline{X}_n - \varepsilon, \overline{X}_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance de p au risque α "déduit" de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.</u>

<u>Remarque</u>.. La longueur de cet intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{4n\alpha}}$ donc $\frac{1}{\sqrt{n\alpha}}$.

Q2 a) $t \mapsto 1-p+pe^t$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, ln est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $1-p+pe^t > 0$. Par composition $t \mapsto \ln(1-p+pe^t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

$p \in]0,1[$

Comme $t \mapsto -pt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, par somme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -p + \dfrac{pe^t}{1-p+pe^t}$ et $f''(t) = p\,\dfrac{e^t(1-p+pe^t) - e^t pe^t}{(1-p+pe^t)^2} = p\,\dfrac{(1-p)e^t}{(1-p+pe^t)^2}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{4} - f''(t) = \frac{1}{4} - \frac{p(1-p)e^t}{(1-p+pe^t)^2} = \frac{1}{4(1-p+pe^t)^2}\left((1-p+pe^t)^2 - 4p(1-p)e^t\right)$$

Remarque.. $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$.

En appliquant cela pour $a = 1-p$ et $b = pe^t$ il vient :

$\dfrac{1}{4} - f''(t) = \dfrac{(1-p-pe^t)^2}{4(1-p+pe^t)^2}$. $\dfrac{1}{4} - f''(t) \geq 0$. $f''(t) \leq \dfrac{1}{4}$.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $f''(t) \leq \frac{1}{4}$. donc $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f''(t) \leq \frac{1}{4}$!

b) $\boxed{V1}$ Notons que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f''(t) \leq \frac{1}{4}$. Alors $\forall z \in \mathbb{R}^+$, $f'(z) - f'(0) = \int_0^z f''(t)\,dt \underset{z \geq 0}{\leq} \frac{1}{4}\int_0^z 1\,dt = \frac{1}{4}z$.

donc $\forall z \in \mathbb{R}^+$, $f'(z) \leq \frac{1}{4}z$ car $f'(0) = 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) = f(t) - f(0) = \int_0^t f'(z)\,dz \underset{t \geq 0}{\leq} \int_0^t \frac{1}{4}z\,dz = \frac{1}{4}\,\frac{t^2}{2}$. $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \leq \dfrac{t^2}{8}$.

$\boxed{V2}$ f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Appliquons alors l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 pour f.

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|f(t) - f(0) - (t-0)f'(0)| \leq \dfrac{t^2}{2} \max\limits_{x \in [0,t]} |f''(x)|$.

Rappelons que $f(0) = f'(0) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f''(x) = \dfrac{p(1-p)e^x}{(1-p+pe^x)^2} \geq 0$ et $f''(x) \leq \frac{1}{4}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|f''(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|f(t)| \leq \dfrac{t^2}{2} \max\limits_{x \in [0,t]} |f''(x)| \leq \dfrac{t^2}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{t^2}{8}$.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \leq |f(t)| \leq \dfrac{t^2}{8}$. $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \leq \dfrac{t^2}{8}$.

$\boxed{V3}$ Soit $t\in\mathbb{R}^{+*}$ f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Alors la formule de Taylor-Lagrange appliquée à f à l'ordre 1 montre l'existence de c_t dans $]0,t[$ tel que :

$$f(t)=f(0)+(t-0)f'(0)+\frac{(t-0)^2}{2}f''(c_t)\underset{\substack{\uparrow\\ f(0)=f'(0)=0}}{=}\frac{t^2}{2}f''(c_t)\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{t^2}{2}\geqslant 0 \text{ et } f''(c_t)\leqslant\frac{1}{4}}}{\leqslant}\frac{t^2}{8}.$$

$f(t)\leqslant\frac{t^2}{8}$.

ceci vaut encore pour $t=0$ car $f(0)=0$. Alors $\forall t\in\mathbb{R}^+,\ f(t)\leqslant\frac{t^2}{8}$.

Noté il n'y aura pas de varia 4 !

c) Soit $t\in\mathbb{R}^+$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $X_k(\Omega)=\{0,1\}$, $P(X_k=1)=p$ et $P(X_k=0)=1-p$.

$e^{t(X_k-p)}$ possède une espérance car c'est une variable aléatoire finie.

le théorème de transfert donne $E(e^{t(X_k-p)})=e^{t(0-p)}P(X_k=0)+e^{t(1-p)}P(X_k=1)$.

Alors $E(e^{t(X_k-p)})=(1-p)e^{-tp}+pe^{t(1-p)}=e^{-tp}[1-p+pe^t]$.

$E(e^{t(X_k-p)})=e^{-tp+\ln(1-p+pe^t)}=e^{f(t)}\leqslant e^{t^2/8}$.

$\forall t\in\mathbb{R}^+,\ E(e^{t(X_k-p)})\leqslant e^{\frac{t^2}{8}}$.

(Q3) a) Soit une variable aléatoire finie à valeurs positives. Posons $S(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_r\}$ avec $x_1<x_2<\dots<x_r$.

Soit $a\in\mathbb{R}^*_+$. Posons $I=\{i\in[\![1,r]\!]\mid x_i\geqslant a\}$.

1er cas.. $I=\emptyset$. Alors $\{S\geqslant a\}=\emptyset$ donc $P(S\geqslant a)=0$.

Or $E(S)=\sum_{i=1}^{r}x_iP(S=x_i)\geqslant 0$ et $a>0$. Ainsi $P(S\geqslant a)=0\leqslant\frac{E(S)}{a}$.

$\forall i\in[\![1,r]\!],\ x_i\geqslant 0$ et $P(S=x_i)\geqslant 0$

2ème cas.. $I\neq\emptyset$ $P(S\geqslant a)=P\left(\bigcup_{i\in I}\{S=x_i\}\right)=\sum_{i\in I}P(S=x_i)$.

$$E(S)=\sum_{i=1}^{r}x_iP(S=x_i)\geqslant\sum_{i\in I}x_iP(S=x_i)$$

$I\subset[\![1,r]\!]$ et $\forall i\in[\![1,r]\!],\ x_iP(S=x_i)\geqslant 0$

Or $\forall i\in I,\ x_i\geqslant 0$ et $P(S=x_i)\geqslant 0$

donc $\forall i\in I,\ x_iP(S=x_i)\geqslant aP(S=x_i)$. donc $E(S)\geqslant\sum_{i\in I}x_iP(S=x_i)\geqslant\sum_{i\in I}aP(S=x_i)$.

$E(S) \geqslant \sum_{i\in I} a\,P(S=x_i) = a\sum_{i\in I} P(S=x_i) = a\,P(S\geqslant a)$. Comme $a>0$: $P(S\geqslant a) \leqslant \dfrac{E(S)}{a}$.

Si S est une variable aléatoire discrète finie à valeurs positives et a un réel strictement positif : $P(S\geqslant a) \leqslant \dfrac{E(S)}{a}$. C'est l'inégalité de Markov.

b) Soit $(t,\varepsilon)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$. ⚠ Dans toute la suite $n\in\mathbb{N}^*$. Nous ne le redirons pas.

Soit $\omega\in\Omega$. Supposons $(\bar{X}_n-p)(\omega)\geqslant\varepsilon$. Alors $t(\bar{X}_n-p)(\omega)\geqslant t\varepsilon$ car $t\in\mathbb{R}^+$.

Donc $e^{t(\bar{X}_n-p)(\omega)}\geqslant e^{t\varepsilon}$ car $x\mapsto e^x$ est croissante.

Ainsi $\{\bar{X}_n-p\geqslant\varepsilon\}\subset\{e^{t(\bar{X}_n-p)}\geqslant e^{t\varepsilon}\}$.

Par croissance de la probabilité P il vient $P(\bar{X}_n-p\geqslant\varepsilon)\leqslant P(e^{t(\bar{X}_n-p)}\geqslant e^{t\varepsilon})$.

Or $e^{t(\bar{X}_n-p)}$ est une variable aléatoire discrète finie à valeurs positives et $e^{t\varepsilon}$ un réel strictement positif. Donc $P(e^{t(\bar{X}_n-p)}\geqslant e^{t\varepsilon})\leqslant\dfrac{1}{e^{t\varepsilon}}E(e^{t(\bar{X}_n-p)})$.

Alors $\underline{P(\bar{X}_n-p\geqslant\varepsilon)\leqslant e^{-t\varepsilon}E(e^{t(\bar{X}_n-p)})}$.

$t(\bar{X}_n-p)=t\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-p\right]=\frac{t}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k-np\right)=\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-p)$.

Alors $e^{t(\bar{X}_n-p)}=e^{\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-p)}=e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{t}{n}(X_k-p)}=\prod_{k=1}^{n}e^{\frac{t}{n}(X_k-p)}$.

Or $X_1,X_2,\dots,X_n$ sont indépendantes donc $e^{\frac{t}{n}(X_1-p)},e^{\frac{t}{n}(X_2-p)},\dots,e^{\frac{t}{n}(X_n-p)}$ sont également indépendantes et possèdent une espérance.

Alors $E(e^{t(\bar{X}_n-p)})=E\left(\prod_{k=1}^{n}e^{\frac{t}{n}(X_k-p)}\right)=\prod_{k=1}^{n}E(e^{\frac{t}{n}(X_k-p)})$.

Or d'après Q2c) $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $E(e^{\frac{t}{n}(X_k-p)})\leqslant e^{(t/n)^2/8}=e^{\frac{t^2}{8n^2}}$.

Mieux $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $0\leqslant E(e^{\frac{t}{n}(X_k-p)})\leqslant e^{\frac{t^2}{8n^2}}$.

Alors $E(e^{t(\bar{X}_n-p)})=\prod_{k=1}^{n}E(e^{\frac{t}{n}(X_k-p)})\leqslant\prod_{k=1}^{n}e^{\frac{t^2}{8n^2}}=\left(e^{\frac{t^2}{8n^2}}\right)^n=e^{\frac{t^2}{8n}}$.

$\underline{E(e^{t(\bar{X}_n-p)})\leqslant e^{\frac{t^2}{8n}}}$.

Ainsi $P(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} E(e^{t(\overline{X}_n - p)}) \leq e^{-t\varepsilon} e^{t^2/8n} = e^{-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}}$.

$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \; P(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

c) $P(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) = P(\{\overline{X}_n - p \geq \varepsilon\} \cup \{\overline{X}_n - p \leq -\varepsilon\})$.

$P(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) = P(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) + P(\overline{X}_n - p \leq -\varepsilon)$.

$P(\overline{X}_n - p \leq -\varepsilon) = P(-\overline{X}_n + p \geq \varepsilon) = P(1 - \overline{X}_n - (1-p) \geq \varepsilon)$.

Posons $p' = 1-p$. $p' \in]0,1[$. $1 - \overline{X}_n = 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1 - X_k)$.

Posons $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X'_k = 1 - X_k$ et $\overline{X}'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X'_k$.

1) Comme pour tout k dans $[\![1,n]\!]$ X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p, pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, X'_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $1-p$ donc p'.

2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes donc $1-X_1, 1-X_2, \dots, 1-X_n$ sont indépendantes

Alors $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$ sont indépendantes.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Q3 b) appliqué à $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$ donne :

$P(\overline{X}'_n - p' \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}}$.

Alors $P(\overline{X}_n - p \leq -\varepsilon) = P(1 - \overline{X}_n - (1-p) \geq \varepsilon) = P(1 - \overline{X}_n - p' \geq \varepsilon)$

Or $1 - \overline{X}_n = 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1 - X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X'_k = \overline{X'_n}$ ... comme nous l'avions déjà vu.

Donc $P(\overline{X}_n - p \leq -\varepsilon) = P(\overline{X}'_n - p' \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}}$.

Donc $P(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) = P(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) + P(\overline{X}_n - p \leq -\varepsilon) \leq 2e^{-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}}$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(t) = -t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi'(t) = -\varepsilon + \frac{t}{4n}$.

φ est décroissante sur $[0, 4n\varepsilon]$ et croissante sur $[4n\varepsilon, +\infty[$.

Alors φ admet a $t_0 = 4n\varepsilon$ un minimum égal à $\varphi(4n\varepsilon)$.

Notons que $\varphi(4n\varepsilon) = -(4n\varepsilon)\varepsilon + \frac{(4n\varepsilon)^2}{8n} = -4n\varepsilon^2 + \frac{16n^2\varepsilon^2}{8n} = -4n\varepsilon^2 + 2n\varepsilon^2 = -2n\varepsilon^2$.

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $P(|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}} = 2e^{\varphi(t)}$

En particulier $P(|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{\varphi(t_0)} = 2e^{-2n\varepsilon^2}$.

Finalement pour tout ε dans $\mathbb{R}^+$, $P(|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$.

d) Alors $1 - P(|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) \geq 1 - 2e^{-2n\varepsilon^2}$; $P(|\bar{X}_n - p| < \varepsilon) \geq 1 - 2e^{-2n\varepsilon^2}$.

Or $\{|\bar{X}_n - p| < \varepsilon\} \subset \{|\bar{X}_n - p| \leq \varepsilon\}$.

Donc $P(|\bar{X}_n - p| \leq \varepsilon) \geq P(|\bar{X}_n - p| < \varepsilon) \geq 1 - 2e^{-2n\varepsilon^2}$.

$P(|X_n - p| \leq \varepsilon) = P(-\varepsilon \leq \bar{X}_n - p \leq \varepsilon) = P(\bar{X}_n - \varepsilon \leq p \leq \bar{X}_n + \varepsilon) = P(p \in [\bar{X}_n - \varepsilon, \bar{X}_n + \varepsilon])$.

Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour avoir $P(p \in [\bar{X}_n - \varepsilon, \bar{X}_n + \varepsilon]) \geq 1-\alpha$ il suffit alors d'avoir

$1 - 2e^{-2n\varepsilon^2} \geq 1 - \alpha$.

$1 - 2e^{-2n\varepsilon^2} \geq 1 - \alpha \iff \alpha \geq 2e^{-2n\varepsilon^2} \iff \ln\frac{\alpha}{2} \geq -2n\varepsilon^2 \iff \varepsilon^2 \geq \frac{-\ln\frac{\alpha}{2}}{2n}$.

Notons que $\frac{-\ln\frac{\alpha}{2}}{2n} > 0$ car $\alpha \in]0,1[$. Alors $1 - 2e^{-2n\varepsilon^2} \geq 1 - \alpha \iff \varepsilon \geq \sqrt{\frac{-1}{2n}\ln\frac{\alpha}{2}}$.

Si $\varepsilon = \sqrt{-\frac{1}{2n}\ln\frac{\alpha}{2}}$: $[\bar{X}_n - \varepsilon, \bar{X}_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance de p à la confiance $1-\alpha$ ou au risque α dont la longueur est $2\sqrt{-\frac{1}{2n}\ln\frac{\alpha}{2}}$.

Notons que dans Q1, Bienaymé-Tchebychev nous a donné un intervalle de confiance de p au risque α de longueur $\frac{2}{\sqrt{4n\alpha}}$.

Or $\lim_{\alpha \mapsto 0^+} \left(\frac{2\sqrt{-\frac{1}{2n}\ln\frac{\alpha}{2}}}{2 \times \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}}} \right) = \lim_{\alpha \mapsto 0^+} \sqrt{-2\alpha \ln\frac{\alpha}{2}} = 0$. La longueur de l'intervalle de confiance de Q3 est négligeable devant la longueur de l'intervalle de confiance de Q1 lorsque α tend vers 0. Lorsque α est proche de 0 le second intervalle de confiance est meilleur que le premier.

R..

Question 8 **HEC 2012-8-S28** $\boxed{\text{F 2}}$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$. On note $P = (p_{i,j})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.

Q1. Exprimer P^{-1} en fonction de P.

Q2. Établir l'inégalité $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\right| \leqslant n$.

Question de cours. *Soit p un paramètre réel inconnu vérifiant $0 < p < 1$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variable aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli d'espérance p. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.*

Rappeler comment l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de définir à partir de $\overline{X_n}$, un intervalle de confiance de risque α $(0 < \alpha < 1)$ pour le paramètre p.

Q1 P est la matrice de passage d'une base orthonormée B_1 de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormée B_2 de $\mathbb{R}^n$ donc P est une matrice orthogonale.
Alors P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

Q2 Soit U l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Posons $V = PU = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $v_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \times 1 = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}$.

Notons $<\cdot,\cdot>$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

$<U, PU> = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 \times v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}$.

$\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\right| = |<U, PU>| \leqslant \|U\|\,\|PU\|$ d'après Cauchy-Schwarz.

$\|PU\|^2 = <PU, PU> = {}^t(PU)PU = {}^tU\,{}^tP P U = {}^tU I_n U = {}^tU U = \|U\|^2$ donc $\|PU\| = \|U\|$.

Alors $\|U\|\,\|PU\| = \|U\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1^2 = n$.

Ainsi $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\right| \leqslant n$.

HEC 2012 S 27

Exercice principal S27

1. Question de cours : Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par : $P(X) = X^3 - X^2 - 1$.

a) Montrer que toutes les racines de P sont simples.

b) Montrer que P admet une racine réelle, notée b, et deux racines complexes conjuguées, notées z et $\bar{z}$.

c) Calculer le produit $bz\bar{z}$. Comparer b et $|z|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}$ une partie de $[\![1, n]\!]$ qui possède la propriété suivante : si $p \in \mathcal{S}$, alors $p+1$ et $p+2$ n'appartiennent pas à $\mathcal{S}$; on dit que $\mathcal{S}$ est une "partie spéciale" de $[\![1, n]\!]$. Par exemple, l'ensemble vide est une partie spéciale.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note t_n le nombre de parties spéciales de $[\![1, n]\!]$ et on pose $t_0 = 1$.

a) Calculer t_1 , t_2 et t_3.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $t_{n+3} = t_n + t_{n+2}$.

* 4. Soit V l'ensemble des suites réelles $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : $(v_0, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+3} = v_n + v_{n+2}$.

a) Montrer que V est un espace vectoriel.

b) Déterminer la dimension de V ainsi qu'une base de V.

5) Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & z & \bar{z} \\ b^2 & z^2 & \bar{z}^2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la matrice M est inversible.

b) Quelles sont les suites géométriques de V ?

c) Soit α, β et γ des constantes complexes telles que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha b^n + \beta z^n + \gamma \bar{z}^n = 0$.
Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

d) En déduire qu'il existe une constante réelle A et une constante complexe B vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_n = Ab^n + Bz^n + \overline{B}\bar{z}^n$.

Exercice sans préparation S27

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_*^+$.

1. On suppose que la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ admet une espérance. Montrer que X admet une espérance.

2. La réciproque est-elle vraie ?

* dans cette question 4 il faudrait sans doute remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

R.

HEC 2012 S27 Correction de l'exercice principal

(Q1) Soit $\hat{P}$ un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$, soit α un élément de $\mathbb{K}$ et soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) α est une racine de $\hat{P}$ d'ordre de multiplicité k.

i') $(X-\alpha)^k$ divise $\hat{P}$ et $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas $\hat{P}$.

ii) $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$, $\hat{P} = (X-\alpha)^k Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

iii) $\hat{P}(\alpha) = \hat{P}'(\alpha) = \cdots = \hat{P}^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $\hat{P}^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

▼ <u>Remarque</u>.. le plus souvent on prend i') comme définition. ▲

(Q2) a) Soit α une racine de P. Supposons que α ne soit pas une racine simple de P.

Alors $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. $\begin{cases} \alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0 \\ 3\alpha^2 - 2\alpha = 0 \end{cases}$.

$3\alpha^2 - 2\alpha = 0$ donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = \frac{2}{3}$. Si $\alpha = 0$: $\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = -1$ et si $\alpha = \frac{2}{3}$:

$\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = -\frac{31}{27}$. Dans les deux cas $\alpha^3 - \alpha^2 - 1 \neq 0$!

<u>Toutes les racines de P sont simples.</u>

<u>b)</u> Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x = 3x\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

$f'(0) = f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$; $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[$, $f'(x) > 0$; $\forall x \in]0, \frac{2}{3}[$, $f'(x) < 0$.

Alors f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[\frac{2}{3}, +\infty[$. f est strictement décroissante sur $[0, \frac{2}{3}]$. Ajoutons que $f(0) = -1$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{31}{27}$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$		0		$2/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		-1		$-\frac{31}{27}$		$+\infty$

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $f(x) \leq f(0) = -1$ (f est croissante sur $]-\infty, 0]$).

$\forall x \in [0, \frac{2}{3}]$, $f(x) \in [-\frac{31}{27}, -1]$ (f est décroissante sur $[0, \frac{2}{3}]$).

Alors f ne s'annule pas sur $]-\infty, \frac{2}{3}]$.

f est continue et strictement croissante sur $]\frac{2}{3}, +\infty[$, $\lim_{x \to \frac{2}{3}} f(x) = -\frac{31}{27}$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

R.

f définit alors une bijection de $]\frac{2}{3},+\infty[$ sur $]-\frac{31}{27},+\infty[$.

Or $0 \in]-\frac{31}{27},+\infty[$ donc $\exists !\, b \in]\frac{2}{3},+\infty[,\ f(b)=0$.

Finalement $\exists !\, b \in \mathbb{R},\ f(b)=0$. $b \in]\frac{2}{3},+\infty[$.

Alors <u>P admet une racine réelle, notée b, et une seule</u>. <u>L'ordre de multiplicité de b dans P est 1.</u>

▼ <u>Remarque</u>.. $f(1)=-1$ et $f(2)=3$ donc <u>$b \in]1,2[$</u>. ▲

$\exists (c,d,e) \in \mathbb{R}^3$, $P(X)=(X-b)(cX^2+dX+e)$. Posons $Q=cX^2+dX+e$.

Q est un polynôme de degré deux, à coefficients réels n'ayant pas de racine dans $\mathbb{R}$.

Ainsi Q admet deux racines complexes conjuguées que nous noterons z et $\bar{z}$

Finalement <u>P admet une racine réelle notée b, et deux racines complexes conjuguées, notées z et $\bar{z}$.</u>

▼ <u>Remarque</u>.. les admirateurs de Cardan pourront montrer que :

$$b=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{29}{27}+\sqrt{\frac{31}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{29}{27}-\sqrt{\frac{31}{27}}\right)}+\frac{1}{3}\ ;\quad b \simeq 1,465\,571\,232.$$

On peut aussi prendre $z=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{29}{27}+\sqrt{\frac{31}{27}}\right)}\, j+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{29}{27}+\sqrt{\frac{31}{27}}\right)}\, j^2+\frac{1}{3}$. ▲

<u>c)</u> $P(X)=X^3-X^2-1=(X-b)(X-z)(X-\bar{z})$. De plus les coefficients constants de X^3-X^2-1 et de $(X-b)(X-z)(X-\bar{z})$ sont respectivement -1 et $-bz\bar{z}$.

Alors <u>$bz\bar{z}=1$.</u> Ainsi $b|z|^2=1$. <u>$|z|=\frac{1}{\sqrt{b}}$.</u>

Notons que $b \in]1,2[$ comme nous l'avons dit plus haut. Alors $|z|=\frac{1}{\sqrt{b}}<1$.

Finalement <u>$|z|<1<b$</u> donc <u>$|z|<b$</u>

(Q3) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ nous noterons $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$. $\mathrm{card}\,\mathcal{P}_n=2^n$

<u>a)</u> $\mathcal{P}_1=\{\emptyset, \{1\}\}$

les parties spéciales de $[\![1,1]\!]$ sont donc $\emptyset$ et $\{1\}$

Ainsi <u>$t_1=2$.</u>

$\mathcal{P}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. les parties spéciales de $[\![1,2]\!]$ sont $\emptyset$, $\{1\}$ et $\{2\}$. $\underline{t_2 = 3}$.

$\mathcal{P}_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.
les parties spéciales de $[\![1,3]\!]$ sont $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$. Ainsi $\underline{t_3 = 4}$.

▼ <u>Remarque</u>.. Les parties spéciales de $[\![1,4]\!]$ sont $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,4\}$.
Ainsi $t_4 = 6$. ▲

b) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ notons $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des parties spéciales de $[\![1,n]\!]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{S}'_{n+3}$ (resp. $\mathcal{S}''_{n+3}$) l'ensemble des parties spéciales de $[\![1,n+3]\!]$ qui contiennent (resp. qui ne contiennent pas) $n+3$.

$\mathcal{S}_{n+3} = \mathcal{S}'_{n+3} \cup \mathcal{S}''_{n+3}$ et $\mathcal{S}'_{n+3} \cap \mathcal{S}''_{n+3} = \emptyset$. Ainsi $t_{n+3} = \operatorname{card} \mathcal{S}_{n+3} = \operatorname{card} \mathcal{S}'_{n+3} + \operatorname{card} \mathcal{S}''_{n+3}$.

notons qu'une partie de $\mathcal{S}'_{n+3}$ ne contient ni $n+2$ ni $n+1$. Mieux une partie de $\mathcal{S}'_{n+3}$ est la réunion d'une partie de $\mathcal{S}_n$ avec $\{n+3\}$.

Alors $\operatorname{card} \mathcal{S}'_{n+3} = \operatorname{card} \mathcal{S}_n = t_n$. $\underline{\operatorname{card} \mathcal{S}'_{n+3} = t_n}$.

Rappelons que $\mathcal{S}''_{n+3}$ est l'ensemble des parties spéciales de $[\![1,n+3]\!]$ qui ne contient pas $n+3$ et remarquons que $\mathcal{S}''_{n+3}$ n'est autre que l'ensemble des parties spéciales de $[\![1,n+2]\!]$. Alors $\underline{\operatorname{card} \mathcal{S}''_{n+3} = t_{n+2}}$.

Ainsi $t_{n+3} = \operatorname{card} \mathcal{S}'_{n+3} + \operatorname{card} \mathcal{S}''_{n+3} = t_n + t_{n+2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+3} = t_n + t_{n+2}$. Par convention $t_0 = 1$.

Alors $t_{0+3} = t_3 = 4 = 1 + 3 = t_0 + t_2 = t_0 + t_{0+2}$. La formule est encore vraie pour $n=0$.

$\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+3} = t_n + t_{n+2}}$.

Ici il faut lire les solutions en pensant que l'on peut remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ ...

(Q4) a) Notons E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

- $V \subset E$
- La suite nulle appartient clairement à V ($0 = 0+0$!!).
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de V.

$\lambda u+v=(\lambda u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lambda u_{n+3}+v_{n+3}=\lambda(u_n+u_{n+2})+(v_n+v_{n+2})=(\lambda u_n+v_n)+(\lambda u_{n+2}+v_{n+2})$.

Donc $\lambda u+v\in V$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(u,v)\in V^2$, $\lambda u+v\in V$.

ceci achève de montrer que V est un sous-espace vectoriel de E.

Ainsi V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) Posons $\forall v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in V$, $\varphi(v)=(v_0,v_1,v_2)$. φ est une application de V dans $\mathbb{R}^3$.

• Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soient $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de V.

$\varphi(\lambda u+v)=(\lambda u_0+v_0,\lambda u_1+v_1,\lambda u_2+v_2)=\lambda(u_0,u_1,u_2)+(v_0,v_1,v_2)=\lambda\varphi(u)+\varphi(v)$.

φ est linéaire

• soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\operatorname{Ker}\varphi$. $\varphi(u)=0_{\mathbb{R}^3}$. $(u_0,u_1,u_2)=0_{\mathbb{R}^3}$. $u_0=u_1=u_2=0$.

montrons par une récurrence "d'ordre 3" que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=0$.

la propriété est vraie pour $n=0$, $n=1$, $n=2$.

Supposons la vraie pour n, $n+1$ et $n+2$ avec $n\in\mathbb{N}$. Montrons la pour $n+3$.

$u_{n+3}=u_n+u_{n+2}=0+0=0$! ceci achève la récurrence.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=0$. $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=0_V$.

Alors $\operatorname{Ker}\varphi=\{0_V\}$. φ est injective.

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. le principe de récurrence montre qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0=a$, $u_1=b$, $u_2=c$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+3}=u_n+u_{n+2}$.

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in V$ et $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}})=(u_0,u_1,u_2)=(a,b,c)$.

$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $\exists u\in V$, $\varphi(u)=(a,b,c)$. φ est surjective.

Finalement φ est une application linéaire bijective de V sur $\mathbb{R}^3$.

V et $\mathbb{R}^3$ sont isomorphes et $\dim\mathbb{R}^3=3$.

Alors V est de dimension 3. Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$.

φ^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur V et (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Alors $(\varphi^{-1}(e_1), \varphi^{-1}(e_2), \varphi^{-1}(e_3))$ est une base de V.

Posons $\varphi^{-1}(e_1) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi^{-1}(e_2) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi^{-1}(e_3) = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+3} = a_n + a_{n+2}$;

$b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_{n+3} = b_n + b_{n+2}$;

$c_0 = c_1 = 0$, $c_2 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $c_{n+3} = c_n + c_{n+2}$.

Q5 a) V1 Soit $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ tel que ${}^t M \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})}$.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & b & b^2\\ 1 & z & z^2\\ 1 & \bar z & \bar z^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta b+\delta b^2\\ \alpha+\beta z+\delta z^2\\ \alpha+\beta\bar z+\delta\bar z^2\end{pmatrix}. \quad \begin{cases}\alpha+\beta b+\delta b^2 = 0\\ \alpha+\beta z+\delta z^2 = 0\\ \alpha+\beta\bar z+\delta\bar z^2 = 0\end{cases}. \quad \text{Posons } R = \alpha+\beta X+\delta X^2.$$

$R\in\mathbb{C}_2[X]$, $R(b) = R(z) = R(\bar z) = 0$. Notons que $b\neq z$, $b\neq\bar z$ et $z\neq\bar z$.

Alors R est un polynôme de degré au plus 2 ayant trois racines distinctes.

R est donc le polynôme nul. Ainsi $\alpha=\beta=\delta=0$.

$\forall \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, ${}^t M\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})} \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})}$. ${}^t M$ est inversible.

(*) Alors $\mathrm{rg}\, M = \mathrm{rg}\, {}^t M = 3$. Donc M est inversible.

V2 Soit $U = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ tel que $MU = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})}$. $\begin{cases}\alpha+\beta+\delta = 0 & L_1\\ \alpha b+\beta z+\delta\bar z = 0 & L_2\\ \alpha b^2+\beta z^2+\delta\bar z^2 = 0 & L_3\end{cases}$

$L_2 \leftarrow L_2 - b L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - b L_2$ donnent $\begin{cases}\beta(z-b)+\delta(\bar z-b) = 0 & L'_1\\ \beta z(z-b)+\delta\bar z(\bar z-b) = 0 & L'_2\end{cases}$

$L'_2 \leftarrow L'_2 - z L'_1$ donne $\delta(\bar z - z)(\bar z - b) = 0$. Comme $\bar z\neq z$ et $\bar z\neq b$: $\delta = 0$.

En renvoyant dans L'_1 il vient $\beta = 0$ car $z\neq b$. En renvoyant dans L_1 il vient $\alpha = 0$.

Donc $\alpha=\beta=\delta=0$. $U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}}(\mathbb{C})$.

$\forall U\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, $MU = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})} \Rightarrow U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})}$. M est inversible.

On peut passer directement de ${}^t M$ inversible à M inversible en utilisant la définition sans utiliser $\mathrm{rg}\,{}^t M = \mathrm{rg}\, M$.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrie de réels. Soit q sa raison. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=q^n u_0$.

1er cas.. $q=0$ et $u_0=0$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=0$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in V$.

2ème cas.. $q=0$ et $u_0\neq 0$ Alors $u_1=u_2=u_3=0$. Donc $u_3=0$ et $u_0+u_2=u_0\neq 0$
Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\notin V$

3ème cas.. $q\neq 0$ et $u_0=0$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle et elle appartient à V.

4ème cas.. $q\neq 0$ et $u_0\neq 0$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in V \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}=u_n+u_{n+2} \iff \forall n\in\mathbb{N},\ u_0 q^{n+3}=u_0 q^n+u_0 q^{n+2}$.

comme $u_0\neq 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $q^n\neq 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in V \iff q^3=q^0+q^2 \iff P(q)=0$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{q\in\mathbb{R}}{\iff} q=b$.

Les suites géométriques de V sont la suite nulle et la suite $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

▼ Remarque.. On montre de la même manière que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients complexes, géométriques et vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+3}=u_n+u_{n+2}$ sont la suite nulle, et les suites $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\bar{\beta}^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
C'est sans doute ce qu'il fallait démontrer. ▲

c) Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha b^n+\beta \jmath^n+\gamma\bar{\jmath}^n=0$.

Alors $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha b+\beta \jmath+\gamma\bar{\jmath}=0\\ \alpha b^2+\beta \jmath^2+\gamma\bar{\jmath}^2=0\end{cases}$. Donc $\begin{pmatrix}1&1&1\\ b&\jmath&\bar{\jmath}\\ b^2&\jmath^2&\bar{\jmath}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. $M\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=0_{M_{3,1}(\mathbb{C})}$.

comme M est inversible : $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=0_{M_{3,1}(\mathbb{C})}$. $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Si $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$, $(\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha b^n+\beta \jmath^n+\gamma\bar{\jmath}^n=0)\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$.

La famille $((b^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\jmath^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\bar{\jmath}^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$.

d) En déduire ?!! Tu rigoles, coco ! Tout est à refaire !!

D'abord il fallait considérer l'ensemble V' des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexes qui vérifient $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3} = u_n + u_{n+2}$. Puis :

- comme dans Q4 a) on montre que V' est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
- on pose $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V',\ \varphi'((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_0, u_1, u_2)$ et on montre que φ' est un isomorphisme de V' sur $\mathbb{C}^3$. Alors dim $V' = 3$.
- On montre que les suites géométriques de V' sont $0_{V'}$, $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathfrak{z}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\bar{\mathfrak{z}}^n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Q4 c) montre que $((b^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathfrak{z}^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\bar{\mathfrak{z}}^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de V' donc une base de V' car dim $V' = 3$.

Alors comme $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V'$ $(V\subset V')$: $\exists (A,B,C)\in\mathbb{C}^3, \forall n\in\mathbb{N},\ t_n = A\,b^n + B\,\mathfrak{z}^n + C\,\bar{\mathfrak{z}}^n$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ 0 = t_n - t_n = t_n - \bar{t}_n = A b^n + B\mathfrak{z}^n + C\bar{\mathfrak{z}}^n - \bar{A} b^n - \bar{B}\bar{\mathfrak{z}}^n - \bar{C}\mathfrak{z}^n$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ (A-\bar{A})b^n + (B-\bar{C})\mathfrak{z}^n + (C-\bar{B})\bar{\mathfrak{z}}^n = 0$. Alors d'après Q5 c) $A - \bar{A} = B - \bar{C} = C - \bar{B} = 0$.

Donc $A = \bar{A}$ et $C = \bar{B}$. Ainsi $A\in\mathbb{R}$ et $C = \bar{B}$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ t_n = A\,b^n + B\,\mathfrak{z}^n + \bar{B}\,\bar{\mathfrak{z}}^n$ avec $A\in\mathbb{R}$ et $B\in\mathbb{C}$.

Exercice.. Réécrire le topo !

R..

Question 7 **HEC 2012-7-S27** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Q1. On suppose que la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ admet une espérance. Montrer que X admet une espérance.

Q2. La réciproque est-elle vraie ?

Question de cours. *Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.*

(Q1) X est une variable aléatoire à densité qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc X possède une densité f définie sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $]-\infty, 0]$.

- X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$;
- $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$;
- f est une densité de X ;
- $E(X + \frac{1}{X})$ existe

alors le théorème de transfert montre que $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) f(t)\, dt$ est absolument convergente donc convergente.

$\int_{-\infty}^0 t f(t)\, dt$ existe et vaut 0. $\forall t \in]0, +\infty[$, $0 \leq t \leq t + \frac{1}{t}$ et $f(t) \geq 0$.

donc $\forall t \in]0, +\infty[$, $0 \leq t f(t) \leq (t + \frac{1}{t}) f(t)$ et $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) f(t)\, dt$ converge.

Alors $\int_0^{+\infty} t f(t)\, dt$ converge.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ converge. Donc X possède une espérance.

(Q2) La réciproque est fausse. Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

- X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (non ?)
- $E(X)$ existe.
- la fonction g définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de X

$t \mapsto t + \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc, d'après le théorème de transfert, $X + \frac{1}{X}$ possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) g(t)\, dt$ est absolument convergente.

Or $(t + \frac{1}{t}) g(t) \underset{0}{\sim} \frac{\lambda}{t}$; $\forall t \in]0, +\infty[$, $\frac{\lambda}{t} \geq 0$ et $\int_0^1 \frac{\lambda}{t}\, dt$ diverge. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^1 (t + \frac{1}{t}) g(t)$ diverge. Alors $\int_0^{+\infty} (t + \frac{1}{t}) g(t)\, dt$ diverge. $X + \frac{1}{X}$ n'a pas d'espérance.

Exercice principal S33

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.
Rappeler la signification de la relation : $v_n = o(u_n)$.
Montrer que si $v_n = o(u_n)$ et si la série de terme général u_n est convergente, la série de terme général v_n l'est aussi et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$.

2. Soit α un réel strictement positif.
a) Établir la relation : $\mathrm{e}^{-n^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
b) En déduire l'existence d'un réel c_α et d'une variable aléatoire X_α à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([X_\alpha = n]) = c_\alpha\, \mathrm{e}^{-n^\alpha}$$

c) On suppose que $\alpha = 1$.
Identifier la loi de X_1 et calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité conditionnelle $P_{[X_1 \geqslant n]}([X_1 \geqslant n+1])$.

3. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$ et on lui associe X_α comme en 2.b).
a) Établir la relation : $\mathrm{e}^{-(n+1)^\alpha} = o\big(\mathrm{e}^{-n^\alpha} - \mathrm{e}^{-(n+1)^\alpha}\big)$.
b) À l'aide du résultat de la question 1, établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $P([X_\alpha \geqslant n+1]) = o\big(P([X_\alpha = n])\big)$.
c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_{[X_\alpha \geqslant n]}([X_\alpha \geqslant n+1]) = 0$.

4. On suppose dans cette question que $0 < \alpha < 1$ et on lui associe X_α comme en 2.b).
a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{(n+1)^\alpha}\big(\mathrm{e}^{-n^\alpha} - \mathrm{e}^{-(n+1)^\alpha}\big)$.
b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_{[X_\alpha \geqslant n]}([X_\alpha \geqslant n+1])$.

Exercice sans préparation S33

Soit D la matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

HEC 2012 S 33 Correction de l'exercice principal.

Q1 $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ signifie que : il existe un élément p de $\mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq p}$ de réels tels que

1) $\forall n\in [\![p,+\infty[\![, \; v_n=\varepsilon_n u_n$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$

Comme ici, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_n>0$ cela signifie encore que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=0$.

On suppose maintenant que la série de terme général u_n converge et que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ et $v_n>0$: la série de terme général v_n converge... cours !!

Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $T_n=\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$ et $R_n=\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$ et montrons que $T_n \underset{n\to+\infty}{=} o(R_n)$.

Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $R_n>0$ il suffit de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{T_n}{R_n}=0$.

Rappelons qu'il existe p dans $\mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq p}$ de réels tels que $\forall n\in[\![p,+\infty[\![$, $v_n=\varepsilon_n u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. $\exists q\in[\![p,+\infty[\![$, $\forall n\in[\![p,+\infty[\![$, $n\geq q\Rightarrow|\varepsilon_n|<\varepsilon$. $\forall q\in[\![p,+\infty[\![$, $\varepsilon_n\leq|\varepsilon_n|<\varepsilon$.
il faut il y a égalité...

Soit $n\in[\![q,+\infty[\![$, $0<v_k=\varepsilon_k u_k<\varepsilon u_k$ pour tout $k\in[\![n,+\infty[\![$.
$\uparrow\ \varepsilon_k<\varepsilon$ et $u_k>0$

$\forall k\in[\![n,+\infty[\![$, $0<v_k<\varepsilon u_k$. Alors $0<\sum\limits_{k=n}^{+\infty}v_k<\varepsilon\sum\limits_{k=n}^{+\infty}u_k$ car ces deux sommes existent.

Donc $\left|\dfrac{T_n}{R_n}-0\right|=\left|\dfrac{T_n}{R_n}\right|=\dfrac{T_n}{R_n}<\dfrac{\varepsilon R_n}{R_n}<\varepsilon$. Donc $\forall n\in[\![q,+\infty[\![$, $\left|\dfrac{T_n}{R_n}-0\right|<\varepsilon$.

Nous avons donc montré que : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists q\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq q\Rightarrow\left|\dfrac{T_n}{R_n}-0\right|<\varepsilon$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{T_n}{R_n}=0$. Donc $T_n \underset{n\to+\infty}{=} o(R_n)$ ou $\sum\limits_{k=n}^{+\infty}v_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty}u_k\right)$

<u>Si la série de terme général u_n converge, la série de terme général v_n converge et</u>

$\sum\limits_{k=n}^{+\infty}v_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty}u_k\right)$.

<u>Exercice..</u> Notez ce résultat en supposant que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq0$ et $v_n\geq0$.

Q2 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n^2 e^{-n^\alpha} = \dfrac{(n^\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}}{e^{n^\alpha}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{2}{\alpha}}}{e^{x}} = 0$ par croissance comparée.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ ($\alpha>0$) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n^\alpha)^{2/\alpha}}{e^{n^\alpha}} = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 e^{-n^\alpha}) = 0$.

Ainsi $e^{-n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Notons que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $e^{-n^\alpha}\geqslant 0$ et $\frac{1}{n^2}\geqslant 0$. Alors les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que <u>la série de terme général e^{-n^α} converge.</u>

Posons $a_\alpha = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^\alpha}$. $a_\alpha>0$ car $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $e^{-n^\alpha}>0$. Posons alors $c_\alpha = \frac{1}{a_\alpha}$.

Posons encore $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_\alpha(n) = c_\alpha e^{-n^\alpha}$

1) $\mathbb{N}^*$ est dénombrable ;

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_\alpha(n)\geqslant 0$

3) La série de terme général $f_\alpha(n)$ converge car la série de terme général e^{-n^α} converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_\alpha(n) = c_\alpha \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^\alpha} = c_\alpha a_\alpha = 1$

<u>Alors f_α est la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X_α à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.</u>

<u>Il existe un réel c_α et une variable aléatoire X_α à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(X_\alpha = n) = c_\alpha e^{-n^\alpha}$.</u>

▼ <u>Remarque</u>.. Notons que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_\alpha(n)\geqslant 0$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_\alpha(n) = 1$ donc nécessairement :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_\alpha(n)\in[0,1]$. Donc il n'est pas nécessaire de montrer que

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_\alpha(n)\leqslant 1$. Notons cependant que c'est une évidence. ▼

Rappel.. $c_\alpha = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^\alpha}\right)^{-1}$. Ainsi $c_\alpha>0$.

c) Ici $\alpha=1$. Alors $c_1 = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n}\right)^{-1} = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-n-1}\right)^{-1} = \left(e^{-1}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n\right)^{-1} = \left(e^{-1}\dfrac{1}{1-\frac{1}{e}}\right)^{-1} = \left(\dfrac{1}{e-1}\right)^{-1} = e-1$!

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(X_1 = n) = c_1 e^{-n} = (e-1)e^{-n} = \left(1-\frac{1}{e}\right)e\,e^{-n} = \left(1-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$. De plus $1-\frac{1}{e}\in\,]0,1[$
et $\frac{1}{e} = 1-\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

Alors X_1 suit la loi géométrique de paramètre $1-\frac{1}{e}$. $\ell = i+n$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $P(X_1\geqslant n)=\sum_{\ell=n}^{+\infty}P(X_1=\ell)=\sum_{\ell=n}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{e}\right)^{\ell-1}=\left(1-\frac{1}{e}\right)\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{i+n-1}$.

$P(X_1\geqslant n)=\left(1-\frac{1}{e}\right)(1/e)^{n-1}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{i}=\left(1-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$. Notons que $P(X_1\geqslant n)\neq 0$.

Alors $P(X_1\geqslant n+1)=\left(\frac{1}{e}\right)^{n}$.

$$P_{\{X_1\geqslant n\}}(X_1\geqslant n+1)=\frac{P(\{X_1\geqslant n\}\cap\{X_1\geqslant n+1\})}{P(X_1\geqslant n)}=\frac{P(X_1\geqslant n+1)}{P(X_1\geqslant n)}=\frac{(1/e)^n}{(1/e)^{n-1}}=\frac{1}{e}.$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P_{\{X_1\geqslant n\}}(X_1\geqslant n+1)=\frac{1}{e}$.

Q3 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $(n+1)^\alpha > n^\alpha$ car $\alpha>0$ donc $e^{(n+1)^\alpha}>e^{n^\alpha}$.

Alors $e^{-n^\alpha}>e^{-(n+1)^\alpha}$ donc $e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha}>0$.

$$\frac{e^{-(n+1)^\alpha}}{e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha}}=\frac{1}{e^{(n+1)^\alpha}\left(e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha}\right)}=\frac{1}{e^{(n+1)^\alpha-n^\alpha}-1}.$$

Rappelons que $(1+x)^\alpha-1\underset{x\to0}{\sim}\alpha x$ donc $(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right]\underset{n\to+\infty}{\sim}n^\alpha\times\alpha\times\frac{1}{n}=\alpha n^{\alpha-1}$

$(n+1)^\alpha-n^\alpha\underset{n\to+\infty}{\sim}\alpha n^{\alpha-1}$ et $\alpha-1>0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left((n+1)^\alpha-n^\alpha\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\alpha n^{\alpha-1}\right)=+\infty$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{(n+1)^\alpha-n^\alpha}-1\right)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{-(n+1)^\alpha}}{e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha}}=0$

Ainsi $e^{-(n+1)^\alpha}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha}\right)$.

Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\begin{cases}753 \text{ si } n=0 \;!! \\ C_\alpha e^{-n^\alpha}-C_\alpha e^{-(n+1)^\alpha} \text{ si } n\geqslant 1\end{cases}$ et $v_n=C_\alpha e^{-(n+1)^\alpha}$.

D'après ce que nous avons vu dans Q2b, la série de terme général $C_\alpha e^{-n^\alpha}$ converge. Ainsi la séries de terme général v_n converge.

Par différence la série de terme général u_n converge.

De plus 1) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$ $\quad$ $C_\alpha > 0$ et $-n^\alpha > -(n+1)^\alpha$

2) $u_0 = 753 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = C_\alpha\left(e^{-n^\alpha} - e^{-(n+1)^\alpha}\right) > 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

3) $e^{-(n+1)^\alpha} \underset{n\mapsto+\infty}{=} o\left(e^{-n^\alpha} - e^{-(n+1)^\alpha}\right)$ donc $C_\alpha e^{-(n+1)^\alpha} \underset{n\mapsto+\infty}{=} o\left(C_\alpha\left(e^{-n^\alpha} - e^{-(n+1)^\alpha}\right)\right)$.

Ainsi $v_n \underset{n\mapsto+\infty}{=} o(u_n)$.

Alors d'après Q1 : $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{n\mapsto+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$ (nous avons déjà dit que la série de terme général v_n converge, non ?).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = \sum_{k=n}^{+\infty} C_\alpha e^{-(k+1)^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} C_\alpha e^{-k^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X_\alpha = k) = P(X_\alpha \geqslant n+1)$.

$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty}\left(C_\alpha e^{-k^\alpha} - C_\alpha e^{-(k+1)^\alpha}\right) = \lim_{q\mapsto+\infty}\left(\sum_{k=n}^{q} C_\alpha e^{-k^\alpha} - C_\alpha e^{-(k+1)^\alpha}\right) = \lim_{q\mapsto+\infty}\left[C_\alpha e^{-n^\alpha} - C_\alpha e^{-(q+1)^\alpha}\right] = C_\alpha e^{-n^\alpha}$

donc $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = P(X_\alpha = n)$.

Alors $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{n\mapsto+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$ donc : $\underline{P(X_\alpha \geqslant n+1) \underset{n\mapsto+\infty}{=} o\left(P(X_\alpha = n)\right)}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que $P(X_\alpha \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} C_\alpha e^{-n^\alpha} > 0$ donc $P(X_\alpha \geqslant n) \neq 0$.

$$P_{\{X_\alpha \geqslant n\}}(X_\alpha \geqslant n+1) = \frac{P(\{X_\alpha \geqslant n\} \cap \{X_\alpha \geqslant n+1\})}{P(X_\alpha \geqslant n)} = \frac{P(X_\alpha \geqslant n+1)}{P(X_\alpha \geqslant n)} = \frac{P(X_\alpha \geqslant n+1)}{P(X_\alpha \geqslant n+1) + P(X_\alpha = n)}.$$

Alors $P_{\{X_\alpha \geqslant n\}}(X_\alpha \geqslant n+1) = \dfrac{\dfrac{P(X_\alpha \geqslant n+1)}{P(X_\alpha = n)}}{\dfrac{P(X_\alpha \geqslant n+1)}{P(X_\alpha = n)} + 1}$ car $P(X_\alpha = n) = C_\alpha e^{-n^\alpha} \neq 0$.

Or $\lim_{n\mapsto+\infty} \dfrac{P(X_\alpha \geqslant n+1)}{P(X_\alpha = n)} = 0$ car $P(X_\alpha \geqslant n+1) \underset{n\mapsto+\infty}{=} o(P(X_\alpha = n))$ donc $\underline{\lim_{n\mapsto+\infty} P_{\{X_\alpha \geqslant n\}}(X_\alpha \geqslant n+1) = 0}$.

Q4 a) $e^{(n+1)^\alpha}(e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha}) = e^{(n+1)^\alpha-n^\alpha}-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

$(n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha\left[(1+\frac{1}{n})^\alpha - 1\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\alpha \times \alpha \times \frac{1}{n} = \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}((n+1)^\alpha - n^\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}\right) = 0$ car $1-\alpha>0$ puisque $\alpha<1$.

donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[e^{(n+1)^\alpha}(e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha})\right]} = \lim\limits_{n\to+\infty}(e^{(n+1)^\alpha-n^\alpha}-1) = e^0-1 = \underline{\underline{0}}$.

b) Par conséquent $e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{-(n+1)^\alpha})$.

Posons ici $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = \begin{cases} e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha} & \text{si } n\in\mathbb{N}^* \\ 432 & \text{si } n=0\end{cases}$ et $u_n = e^{-(n+1)^\alpha}$.

1) $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$.

2) $v_0 = 432>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = e^{-n^\alpha}-e^{-(n+1)^\alpha} > 0$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n>0$. $-n^\alpha > -(n+1)^\alpha$ car $\alpha>0$

3) La série de terme général u_n converge ($\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = e^{-(n+1)^\alpha}$).

Q1 donne alors $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$ et avant tout la convergence de la série de terme général v_n ...

$\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k = \sum\limits_{k=n}^{+\infty}(e^{-k^\alpha}-e^{-(k+1)^\alpha}) = e^{-n^\alpha}$ comme nous l'avons déjà vu ... ou presque.

donc $e^{-n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} e^{-(k+1)^\alpha}\right)$ donc $e^{-n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^\alpha}\right)$.

Alors $P(X_\alpha = n) = c_\alpha e^{-n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(c_\alpha \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^\alpha}\right)$.

$P(X_\alpha = n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} P(X_\alpha = k)\right)$. donc $\underline{\underline{P(X_\alpha = n) \underset{n\to+\infty}{=} o(P(X_\alpha \geqslant n+1))}}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P_{(X_\alpha\geqslant n)}(X_\alpha\geqslant n+1) = \frac{P((X_\alpha\geqslant n)\cap(X_\alpha\geqslant n+1))}{P(X_\alpha\geqslant n)} = \frac{P(X_\alpha\geqslant n+1)}{P(X_\alpha\geqslant n)} = \frac{P(X_\alpha\geqslant n+1)}{P(X_\alpha=n)+P(X_\alpha\geqslant n+1)}$.

$P(X_\alpha\geqslant n)\neq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{\{X_\alpha \geq n\}}(X_\alpha \geq n+1) = \frac{1}{\dfrac{P(X_\alpha = n)}{P(X_\alpha \geq n+1)} + 1} \qquad (P(X_\alpha \geq n+1) \neq 0)$$

Or $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{P(X_\alpha = n)}{P(X_\alpha \geq n+1)} = 0$ car $P(X_\alpha = n) \underset{n \mapsto +\infty}{=} o(P(X_\alpha \geq n+1))$.

Alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} P_{\{X_\alpha \geq n\}}(X_\alpha \geq n+1) = 1$.

R.

Question 9 **HEC 2012-9-S33** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit D une matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

Question de cours. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. Rappeler la signification de la relation : $v_n = o(u_n)$.*

Montrer que si $v_n = o(u_n)$ et si la série de terme général u_n est convergente, la série de terme général v_n l'est et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - 2M = D$.

Alors $MD = M(M^3-2M) = M^4 - 2M^2 = (M^3-2M)M = DM$. M et D commutent.

Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -a & 4b \\ -c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 4c & 4d \end{pmatrix}$; $\begin{cases} 4b = -b \\ -c = 4c \end{cases}$; $b = c = 0$.

Donc si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et si $M^3 - 2M = D$, M est diagonale. Cherchons donc les matrices diagonales solution du problème. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Posons $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

$\Delta^3 - 2\Delta = D \iff \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & \beta^3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha^3 - 2\alpha = -1 \\ \beta^3 - 2\beta = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^3 - 2\alpha + 1 = 0 \\ \beta^3 - 2\beta - 4 = 0 \end{cases}$.

α (resp. β) est un zéro de $P = X^3 - 2X + 1$ (resp. $Q = X^3 - 2X - 4$).

$P = (X-1)(X^2 + X - 1) = (X-1)\left[\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right] = (X-1)\left(X + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

$Q = (X-2)(X^2 + 2X + 2) = (X-2)\left((X+1)^2 + 1\right)$.

Les racines réelles de P sont : 1, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. 2 est la seule racine réelle de Q.

Ainsi $\Delta^3 - 2\Delta = D \iff \begin{cases} \alpha \in \left\{1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right\} \\ \beta = 2 \end{cases}$.

<u>L'équation $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $M^3 - 2M = D$ admet trois solutions :</u>

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

HEC 2012 S34

Exercice principal S34

1. Question de cours : Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les deux cas, préciser les propriétés des sous-espaces propres.

Dans tout l'exercice, on associe à tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la matrice-colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On considère des réels a, b et c strictement positifs et la matrice $A = \begin{pmatrix} -b & b & a \\ b & -c & c \\ a & c & -a \end{pmatrix}$.

2. Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, à valeurs réelles, telle que $\varphi(u, v) = {}^tUAV$ est une forme bilinéaire symétrique.

3.a) Soit $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Déterminer les signes de $\varphi(u, u)$ et $\varphi(v, v)$ respectivement. L'application φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

b) Montrer que A admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. (on ne cherchera pas à les calculer)

4. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y, z) = x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^z + z\,\mathrm{e}^x$.

a) Montrer qu'un point critique $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ de f vérifie les conditions : $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} = -1$, $\overline{x} < 0$, $\overline{y} < 0$ et $\overline{z} < 0$. Donner un point critique de f.

b) Justifier l'existence du développement limité à l'ordre 2 de f en un point critique, et écrire ce développement.

c) La fonction f admet-elle un extremum local ?

Exercice sans préparation S34

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1.a) Montrer que pour tout entier $n > \lambda - 1$, on a : $P(X \geqslant n) \leqslant P(X = n) \times \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

b) En déduire que $P(X \geqslant n) \underset{n\to+\infty}{\sim} P(X = n)$.

2. Montrer que $P(X > n) = o\big(P(X = n)\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

R.

HEC 2012 S 34 Correction de l'exercice principal

Q1 $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. M est diagonalisable

$\Updownarrow$ M est semblable à une matrice diagonale

$\Updownarrow$ Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M

$\Updownarrow$
$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, M} SEP(M,\lambda)$$

$\Updownarrow$
$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, M} \dim SEP(M,\lambda)$$

$\Updownarrow$ L'endomorphisme canoniquement associé à M est diagonalisable.

C'est bon, non ??

Q2 • $\underline{\varphi \text{ est une application de } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \text{ dans } \mathbb{R}}$

• Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et soit U (resp. V) la matrice de u (resp. v) dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

A est symétrique

$\varphi(u,v) = {}^tUAV = \langle U, AV\rangle = \langle AV, U\rangle = {}^t(AV)U = {}^tV\,{}^tA\,U \overset{\downarrow}{=} {}^tVAU = \varphi(v,u)$.

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$ donc $\underline{\varphi \text{ est symétrique}}$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient u, v, w trois éléments de $\mathbb{R}^3$ de matrices respectives U, V, W dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. $\lambda V + W$ est la matrice de $\lambda v + w$ dans cette base.

$\varphi(u, \lambda v + w) = {}^tUA(\lambda V + W) = \lambda\, {}^tUAV + {}^tUAW = \lambda \varphi(u,v) + \varphi(u,w)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (u,v,w) \in (\mathbb{R}^3)^3$, $\varphi(u, \lambda v + w) = \lambda \varphi(u,v) + \varphi(u,w)$.

Ainsi φ est linéaire à droite. Étant symétrique elle est alors linéaire à gauche.

$\underline{\varphi \text{ est donc bilinéaire}}$.

Ceci achève de montrer que $\underline{\varphi \text{ est une forme bilinéaire symétrique sur } \mathbb{R}^3}$.

Q3 a) $\varphi(u,u) = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} -b & b & a \\ b & -c & c \\ a & c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} -b \\ b \\ a \end{pmatrix} = -b$. Alors $\underline{\underline{\varphi(u,u) < 0}}$.

$\varphi(v,v) = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} -b & b & a \\ b & -c & c \\ a & c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a+b+c$. $\underline{\underline{\varphi(v,v) > 0}}$

$u \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi(u,u) < 0$ donc φ n'est pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

b) • Supposons que A n'admette que des valeurs propres positives ou nulles.

$A \in M_3(\mathbb{R})$ et A est symétrique donc A est diagonalisable. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2 et α_3. $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ et $\alpha_3 \geq 0$. Soit $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

$\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $X = x X_1 + y X_2 + z X_3$. $AX = xAX_1 + yAX_2 + zAX_3 = x\alpha_1 X_1 + y\alpha_2 X_2 + z\alpha_3 X_3$.

Comme (X_1, X_2, X_3) est une base orthonormée de $M_{3,1}(\mathbb{R})$: $\langle X, AX\rangle = x(x\alpha_1) + y(y\alpha_2) + z(z\alpha_3)$.

$\langle X, AX\rangle = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2 \geq 0$ $(\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0)$.

Ainsi $\forall X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = \langle X, AX\rangle \geq 0$ ← En fait c'est du cours ou presque...

Or nous avons vu que pour $U = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$: ${}^tUAU < 0$.

Ainsi les valeurs propres de A ne sont pas toutes positives ou nulles. A possède une valeur propre strictement négative.

• Supposons que A n'admette que des valeurs propres négatives ou nulles. ou on change A en $-A$!

On montre de même (ou on utilise le cours) que $\forall X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \leq 0$.

Or si $V = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, ${}^tVAV > 0$!! Ainsi les valeurs propres de A ne sont pas toutes négatives ou nulles. A possède une valeur propre strictement

<u>A admet au moins une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative.</u>

Q4 **a)** Pour $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $p(x,y,z) = x$, $q(x,y,z) = y$ et $r(x,y,z) = z$.

$f = pe^q + qe^r + re^p$. Soyons pieux et notons que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

p, q, r sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ car ce sont des fonctions polynômiales.

Comme exp l'est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$. Par composition e^p, e^q, e^r sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

Par sommes et produit f est de classe $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}^3$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$!

$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=e^y+ze^x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=xe^y+e^z$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=ye^z+e^x$.

Soit $(\bar x,\bar y,\bar z)$ un point critique de f.

$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar x,\bar y,\bar z)=\frac{\partial f}{\partial y}(\bar x,\bar y,\bar z)=\frac{\partial f}{\partial z}(\bar x,\bar y,\bar z)=0$. $\begin{cases} e^{\bar y}+\bar z e^{\bar x}=0\\ \bar x e^{\bar y}+e^{\bar z}=0\\ \bar y e^{\bar z}+e^{\bar x}=0\end{cases}$. $\begin{cases}\bar z=-e^{\bar y-\bar x}\\ \bar x=-e^{\bar z-\bar y}\\ \bar y=-e^{\bar x-\bar z}\end{cases}$.

Alors $\bar x<0$, $\bar y<0$ et $\bar z<0$

De plus $\bar x\bar y\bar z=-e^{\bar z-\bar y+\bar x-\bar z+\bar y-\bar x}=-e^0=-1$.

Si $(\bar x,\bar y,\bar z)$ est un point critique de f : $\bar x<0,\bar y<0,\bar z<0$ et $\bar x\bar y\bar z=-1$.

Soit $(\bar x,\bar y,\bar z)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. $(\bar x,\bar y,\bar z)$ est un point critique de f si et seulement si :

$\bar z=-e^{\bar y-\bar x}$, $\bar x=-e^{\bar z-\bar y}$ et $\bar y=-e^{\bar x-\bar z}$.

Il est clair que si l'on pose $\bar x=\bar y=\bar z=-1$ ces trois égalités sont vérifiées.

Ainsi $(-1,-1,-1)$ est un point critique de f.

b) Nous avons vu que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ donc admet un développement limité à l'ordre 2 en tout point de $\mathbb{R}^3$. Soit $t=(x,y,z)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(t)=e^y+ze^x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t)=xe^y+e^z$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(t)=ye^z+e^x$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t)=ze^x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t)=xe^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t)=ye^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(t)=e^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(t)=e^x$ et

$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(t)=e^z$. Alors $\nabla^2 f(t)=\begin{pmatrix} ze^x & e^y & e^x\\ e^y & xe^y & e^z\\ e^x & e^z & ye^z\end{pmatrix}$. Notons q_t la forme quadratique

associée à la Hessienne de f en t. Le développement limité de f à l'ordre 2 en t est

$f(t+h)\underset{h\to 0_{\mathbb{R}^3}}{=}f(t)+\langle\nabla f(t),h\rangle+\frac12 q_t(h)+o(\|h\|^2)$. Si t est un point critique de f

le développement limité à l'ordre 2 de f en t devient $f(t+h)\underset{h\to 0_{\mathbb{R}^3}}{=}f(t)+\frac12 q_t(h)+o(\|h\|^2)$

c) Soit $t=(\bar x,\bar y,\bar z)$ un point critique de f. $\bar z e^{\bar x}=-e^{\bar y}$, $\bar x e^{\bar y}=-e^{\bar z}$ et $\bar y e^{\bar z}=-e^{\bar x}$.

Alors $\nabla^2 f(t)=\begin{pmatrix}\bar z e^{\bar x} & e^{\bar y} & e^{\bar x}\\ e^{\bar y} & \bar x e^{\bar y} & e^{\bar z}\\ e^{\bar x} & e^{\bar z} & \bar y e^{\bar z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e^{\bar y} & e^{\bar y} & e^{\bar x}\\ e^{\bar y} & -e^{\bar z} & e^{\bar z}\\ e^{\bar x} & e^{\bar z} & -e^{\bar x}\end{pmatrix}$.

Posons $a'=e^{\bar x}$, $b'=e^{\bar y}$, $c'=e^{\bar z}$.

Alors $a'>0$, $b'>0$, $c'>0$ et $\nabla^2 f(t)=\begin{pmatrix}-b' & b' & a'\\ b' & -c' & c'\\ a' & c' & -a'\end{pmatrix}$

Q3 b) permet de dire que $\nabla^2 f(t)$ admet au moins une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative.

(*) Ainsi f n'a pas d'extremum local (et a fortiori global) en t.

Si f étant de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$, si f admet un extremum local en un point de $\mathbb{R}^3$ ce point est un point critique de f.

Ainsi f n'a pas d'extremum local.

Remarque.. On peut considérer cette déduction comme n'étant pas du programme ...
Alors apportons une preuve.

$t=(\bar x,\bar y,\bar z)$ est toujours un point critique et la hessienne $\nabla^2 f(t)$ de f en t admet une valeur propre strictement positive α_1 et une valeur propre strictement négative α_2.

Soit U_1 (resp. U_2) un vecteur propre de $\nabla^2 f(t)$ associé à la valeur propre α_1 (resp. α_2).

Soit u_1 (resp. u_2) l'élément de $\mathbb{R}^3$ de matrice U_1 (resp. U_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $i\in[\![1,2]\!]$! $q_t(u_i)={}^tU_i\nabla^2 f(t)U_i={}^tU_i(\alpha_iU_i)=\alpha_i\,{}^tU_iU_i=\alpha_i\|U_i\|^2$.

Notons aussi que $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $q_t(\lambda u_i)={}^t(\lambda U_i)\nabla^2 f(t)(\lambda U_i)=\lambda^2\,{}^tU_i\nabla^2 f(t)U_i=\lambda^2 q_t(u_i)=\lambda^2\alpha_i\|U_i\|^2$

$f(t+h)\underset{h\to 0_{\mathbb{R}^3}}{=}f(t)+\frac{1}{2}q_t(h)+o(\|h\|^2)$.

on peut aussi écrire $\|u_i\|^2$

Alors $f(t+\lambda u_i)\underset{\lambda\to 0}{=}f(t)+\frac{1}{2}q_t(\lambda u_i)+o(\|\lambda u_i\|^2)$. $f(t+\lambda u_i)\underset{\lambda\to 0}{=}f(t)+\frac{\alpha_i\|U_i\|^2}{2}\lambda^2+o(\|u_i\|^2\lambda^2)$

$\|U_i\|^2=\|u_i\|^2$

ceci peut encore s'écrire $f(t+\lambda u_i) - f(t) \underset{\lambda \mapsto 0}{=} \frac{\alpha_i \|u_i\|^2}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2)$.

Or $\frac{\alpha_i \|u_i\|^2}{2} \neq 0$ donc $f(t+\lambda u_i) - f(t) \underset{\lambda \mapsto 0}{\sim} \frac{\alpha_i \|u_i\|^2}{2}\lambda^2$.

Alors $\lim\limits_{\lambda \mapsto 0} \frac{f(t+\lambda u_i) - f(t)}{\frac{\alpha_i \|u_i\|^2}{2}\lambda^2} = 1$.

$\exists \eta_i \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, |\lambda| < \eta_i \Rightarrow \frac{f(t+\lambda u_i) - f(t)}{\frac{\alpha_i \|u_i\|^2}{2}\lambda^2} \geq \frac{1}{2}$. arbitraire. on aurait pu prendre n'importe quel réel de l'intervalle $]0,1[$.

Rappelons que $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$, $\|u_1\|^2 > 0$ et $\|u_2\|^2 > 0$.

Alors $\forall \lambda \in]-\eta_1, \eta_1[- \{0\}$, $f(t+\lambda u_1) - f(t) \geq \frac{1}{2}\frac{\alpha_1 \|u_1\|^2}{2}\lambda^2 > 0$.

$\forall \lambda \in]-\eta_2, \eta_2[- \{0\}$, $f(t+\lambda u_2) - f(t) \leq \frac{1}{2}\frac{\alpha_2 \|u_2\|^2}{2}\lambda^2 < 0$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. $\forall t \in]-\eta, \eta[- \{0\}$, $f(t+\lambda u_1) > f(t)$ et $f(t+\lambda u_2) < f(t)$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\lambda_1 = \min\left(\frac{\eta}{2}, \frac{r}{2\|u_1\|}\right)$ et $\lambda_2 = \min\left(\frac{\eta}{2}, \frac{r}{2\|u_2\|}\right)$.

λ_1 et λ_2 sont deux éléments de $]-\eta, \eta[- \{0\}$. Alors $f(t+\lambda u_1) > f(t)$ et $f(t+\lambda u_2) < f(t)$

De plus $\|t+\lambda_1 u_1 - t\| = \|\lambda_1 u_1\| = |\lambda_1| \|u_1\| = \lambda_1 \|u_1\| \leq \frac{r}{2\|u_1\|}\|u_1\| = \frac{r}{2} < r$.

De même $\|t+\lambda_2 u_2 - t\| < r$.

Ainsi $t+\lambda_1 u_1$ et $t+\lambda_2 u_2$ sont deux éléments de la boule $B(t,r)$ tels que

$f(t+\lambda_1 u_1) > f(t)$ et $f(t+\lambda_2 u_2) < f(t)$.

Alors $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists t_1 \in B(t,r)$, $\exists t_2 \in B(t,r)$, $f(t_1) > f(t)$ et $f(t_2) < f(t)$.

Par conséquent f n'a pas d'extremum local en t.

R..

Question 10 **HEC 2012-10-S34** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire défine sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Q1. a) Montrer que pour tout entier n strictement supérieur à $\lambda - 1$, on a : $P(X \geqslant n) \leqslant P(X = n)\,\dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

b) En déduire que $P(X \geqslant n) \underset{n \to +\infty}{\sim} P(X = n)$.

Q2. Montrer que $P(X > n) = \mathrm{o}\big(P(X = n)\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Question de cours. *Donner deux conditions suffisantes de diagonalisibilité d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les deux cas, préciser les propriétés des sous-espaces propres .*

Q1 a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que $n > \lambda - 1$.

$P(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \times \frac{n!}{k!} = P(X=n) \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \frac{n!}{k!}$.

Soit $k \in [\![n+1, +\infty[\![$, $\frac{n!}{k!} = \frac{1}{k(k-1)\cdots(n+1)} = \prod_{i=n+1}^{k} \frac{1}{i} \leqslant \prod_{i=n+1}^{k} \frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k-n}$.

Notons que $\forall k \in [\![n+1, +\infty[\![$, $\frac{n!}{k!} \leqslant \frac{1}{(n+1)^{k-n}}$ et $\lambda^{k-n} \geqslant 0$.

Donc $\forall k \in [\![n+1, +\infty[\![$, $\lambda^{k-n} \frac{n!}{k!} \leqslant \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n}$. Notons que ceci vaut encore pour $k=n$.

Donc $\forall k \in [\![n, +\infty[\![$, $\lambda^{k-n} \frac{n!}{k!} \leqslant \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n}$. Or $0 \leqslant \frac{\lambda}{n+1} \overset{n > \lambda - 1}{<} 1$ donc la série de terme général $u_i = \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^i$ converge.

Ainsi $P(X \geqslant n) = P(X=n) \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-n} \frac{n!}{k!} \overset{P(X=n) \geqslant 0}{\leqslant} P(X=n) \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n} = P(X=n) \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^i$.

$P(X \geqslant n) \leqslant P(X=n) \dfrac{1}{1 - \frac{\lambda}{n+1}} = P(X=n) \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n > \lambda - 1 \Rightarrow P(X \geqslant n) \leqslant P(X=n) \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

---

b) Posons $n_0 = \mathrm{Ent}(\lambda)$. Alors $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_0 \geqslant \mathrm{Ent}(\lambda) > \lambda - 1$.

Soit $n \in [\![n_0, +\infty[\![$. $n \geqslant n_0$ donc $n > \lambda - 1$.

Ainsi $P(X \geqslant n) \leqslant P(X=n) \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

De plus $\{X=n\} \subset \{X \geq n\}$. Alors par croissance de P : $P(X=n) \leq P(X\geq n)$.

Finalement : $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $P(X=n) \leq P(X\geq n) \leq P(X=n)\dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$ et $P(X=n)>0$.

Donc $\forall n \in [\![n_0,+\infty [\![$, $1 \leq \dfrac{P(X\geq n)}{P(X=n)} \leq \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{n+1}{n+1-\lambda} = 1$.

Alors, par encadrement, il vient $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{P(X\geq n)}{P(X=n)} = 1$. Donc $P(X\geq n) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} P(X=n)$.

(12) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{P(X>n)}{P(X=n)} = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{P(X\geq n)-P(X=n)}{P(X=n)} = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\dfrac{P(X\geq n)}{P(X=n)} - 1\right) = 0$

Ainsi $P(X>n) \underset{n\mapsto+\infty}{=} o\left(P(X=n)\right)$.

Exercice principal S36

1. Question de cours : Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(u_n) = \dfrac{n-1}{n}$ et $u_n \in]0, \pi/2]$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

b) Déterminer une constante réelle C telle que $u_n \sim \dfrac{C}{\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et exp la fonction exponentielle. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)(1 - \Phi(x))$.

a) On pose pour tout $x > 0$: $\theta(x) = 1 - \Phi(x) - \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. Déterminer le signe de $\theta(x)$.

b) Calculer $f(0)$. Montrer que f est décroissante et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

4.a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2 + u_n^2}\, dx$ et calculer cette intégrale. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n f(x)}{x^2 + u_n^2}\, dx$; on note I_n cette intégrale.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $K_n = \displaystyle\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n\big(f(x) - f(0)\big)}{x^2 + u_n^2}\, dx$.

Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et a pour limite 0.

c) En déduire la convergence et la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice sans préparation S36

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Établir l'existence d'un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

2. On suppose que la matrice A est inversible. Montrer que A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.

HEC 2012 S36 Correction de l'exercice principal

(Q1) I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. $a \in I$. f est une application de I dans $\mathbb{R}$.

f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

donc f est continue en a si et seulement si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

(Q2) soit $\hat{\varphi}$ l'application de $]0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0,1[$ définie par $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], \hat{\varphi}(x) = \cos x$.
car $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], \cos x \in [0,1[$

- $\hat{\varphi}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$
- $\hat{\varphi}$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], \hat{\varphi}'(x) = -\sin x < 0$. $\hat{\varphi}$ est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$
- $\lim\limits_{x \to 0} \hat{\varphi}(x) = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ et $\hat{\varphi}(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Ainsi $\hat{\varphi}$ est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0,1[$.

Alors $\forall y \in [0,1[, \exists! x \in]0, \frac{\pi}{2}], \hat{\varphi}(x) = y$.

Donc $\forall y \in [0,1[, \exists! x \in]0, \frac{\pi}{2}], \cos x = y$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! u_n \in]0, \frac{\pi}{2}], \cos u_n = \frac{n-1}{n}$ (car $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n-1}{n} \in [0,1[$).

a) $\boxed{V1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \hat{\varphi}(u_n) = \frac{n-1}{n}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \hat{\varphi}^{-1}(\frac{n-1}{n})$.

Or $\lim\limits_{x \to 0} \hat{\varphi}(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 1} \hat{\varphi}^{-1}(x) = 0$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$:

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \hat{\varphi}^{-1}\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0$.

Alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et a pour limite 0.

$\boxed{V2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$. donc $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

$\hat{\varphi}$ est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\hat{\varphi}^{-1}$ est décroissante sur $[0,1[$.

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\varphi^{-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente.

Soit ℓ sa limite. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\ell\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et cos est continue en ℓ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos u_n=\cos\ell$.

Ainsi $\cos\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}=1$. Alors $\cos\ell=1$ et $\ell\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\ell=0$.

Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite 0.

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 1-\cos u_n=1-\frac{n-1}{n}=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ donc $1-\cos u_n\sim\frac{u_n^2}{2}$. Alors $\frac{u_n^2}{2}\sim\frac{1}{n}$. $u_n^2\sim\frac{2}{n}$.

donc $|u_n|\sim\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$. De plus $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\geq 0$.

Par conséquent $u_n\sim\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$. $C=\sqrt{2}$ répond à la question.

Q3 Pour faciliter les écritures notons par : $\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

Rappelons que ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\phi'=\varphi$.

Notons aussi que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi'(x)=-x\varphi(x)$.

a) $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,\quad \theta(x)=1-\phi(x)-\frac{1}{x}\varphi(x)$.

ϕ, $x\mapsto\frac{1}{x}$ et φ sont dérivables sur $\left]0,+\infty\right[$ donc θ est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$.

$\forall x\in\left]0,+\infty\right[,\ \theta'(x)=0-\varphi(x)+\frac{1}{x^2}\varphi(x)-\frac{1}{x}(-x\varphi(x))=\frac{1}{x^2}\varphi(x)=\frac{1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

donc $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,\ \theta'(x)>0$.

θ est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)=0$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=1-1-0\times 0=0$. Comme θ est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$,

θ est strictement négative sur $\left]0,+\infty\right[$.

b) Rappelons que $\phi(0)=\frac{1}{2}$. Alors $f(0)=e^{0^2/2}(1-\phi(0)) = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. $\underline{f(0)=\frac{1}{2}}$.

$x\mapsto e^{x^2/2}$ et $x\mapsto 1-\phi(x)$ sont dérivables sur $[0,+\infty[$ donc f est dérivable sur $[0,+\infty[$.

$\forall x\in[0,+\infty[$, $f'(x)=xe^{x^2/2}(1-\phi(x))+e^{x^2/2}(-\varphi(x))$.

$f'(0)=-\varphi(0)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}<0$.

$\left\{\begin{array}{l} xe^{x^2/2}>0 \\ \theta(x)<0\end{array}\right.$

$\forall x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=xe^{x^2/2}\left[1-\phi(x)-\frac{1}{x}\varphi(x)\right]=xe^{x^2/2}\theta(x)<0$.

donc $\forall x\in[0,+\infty[$, $f'(x)<0$. $\underline{f \text{ est strictement décroissante sur } [0,+\infty[}$.

De plus $f(0)=\frac{1}{2}$ donc $\forall x\in[0,+\infty[$, $f(x)\leq\frac{1}{2}$.

$\forall x\in[0,+\infty[$, $e^{x^2/2}>0$ et $1-\phi(x)\geq 0$. Donc $\forall x\in[0,+\infty[$, $f(x)\geq 0$.

↑ Et même >0 !
└ ϕ est une fonction de répartition.

Alors $\underline{\forall x\in[0,+\infty[,\ 0\leq f(x)\leq\frac{1}{2}}$.

Ainsi $\underline{f \text{ est bornée sur } [0,+\infty[}$

Q4) a) arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\arctan' x=\frac{1}{1+x^2}$.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $\psi_\alpha(x)=\arctan\frac{x}{\alpha}$. Alors ψ_α est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\psi'_\alpha(x)=\frac{1}{\alpha}\arctan'\frac{x}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}=\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$.

Alors ψ_α est une primitive de $x\mapsto\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$ sur $\mathbb{R}$. Ce n'est pas un scoop !

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $x\mapsto\frac{u_n}{x^2+u_n^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $u_n\in\,]0,\frac{\pi}{2}]$

Alors $\forall A\in]0,+\infty[$, $\int_0^A\frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx=\left[\arctan\frac{x}{u_n}\right]_0^A=\arctan\frac{A}{u_n}$.

$\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{A}{u_n}=+\infty$ car $u_n>0$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\arctan\frac{A}{u_n}=\frac{\pi}{2}$. $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$.

Ainsi $\underline{\int_0^{+\infty}\frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx \text{ existe et vaut } \frac{\pi}{2}}$.

$x \mapsto \frac{u_n}{x^2+u_n^2}$ et f sont continues sur $[0,+\infty[$. Ainsi $g_n : x \mapsto \frac{u_n f(x)}{x^2+u_n^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \leq 1$ (!) et $\frac{u_n}{x^2+u_n^2} \geq 0$.

Alors 1) $\forall x \in [0,+\infty[$, $0 \leq g_n(x) = \frac{u_n}{x^2+u_n^2} \times f(x) \leq \frac{u_n}{x^2+u_n^2}$.

2) $\int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx$ converge.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{u_n f(x)}{x^2+u_n^2}\,dx$ converge.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\int_0^{+\infty} \frac{u_n f(x)}{x^2+u_n^2}\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx$ convergent.

Alors $\int_0^{+\infty} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\,dx$ converge comme combinaison linéaire de deux intégrales convergentes.

Alors $\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\,dx$ converge. Donc K_n est bien défini.

$\forall x \in [\sqrt{u_n},+\infty[$, $|f(x)-f(0)| \leq |f(x)|+|f(0)| = |f(x)|+\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ et $\frac{u_n}{x^2+u_n^2} \geq 0$.

Donc $\forall x \in [\sqrt{u_n},+\infty[$, $\left|\frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\right| = \left|\frac{u_n}{x^2+u_n^2}\right| |f(x)-f(0)| = \frac{u_n}{x^2+u_n^2} |f(x)-f(0)| \leq \frac{u_n}{x^2+u_n^2}$.

La convergence de $\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx$ et les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \left|\frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\right| dx$ converge.

De plus $\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \left|\frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\right| dx \leq \int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx$.

Alors $\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\,dx$ est absolument convergente ce qui permet d'écrire :

$|K_n| = \left|\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\,dx\right| \leq \int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \left|\frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\right| dx$. Avec ce que nous avons vu plus haut nous obtenons $|K_n| \leq \int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx$.

Soit $A \in]\sqrt{u_n}, +\infty[$. $\int_{\sqrt{u_n}}^{A} \frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx = \left[\arctan \frac{x}{u_n}\right]_{\sqrt{u_n}}^{A} = \arctan \frac{A}{u_n} - \arctan \frac{1}{\sqrt{u_n}}$.

$\lim_{A\to+\infty} \arctan \frac{A}{u_n} = \frac{\pi}{2}$ car $\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{u_n} = +\infty$ $(u_n > 0)$. Ainsi $\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{u_n}}$.

Finalement $0 \leq |K_n| \leq \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{u_n}}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{u_n} > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{u_n}} = +\infty$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{u_n}} = \frac{\pi}{2}$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{u_n}}\right) = 0$. On obtient alors par encadrement $\lim_{n\to+\infty} K_n = 0$.

$(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite 0.

c) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, posons $L_n = \int_0^{\sqrt{u_n}} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\,dx$ et $H_n = \int_0^{+\infty} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\,dx$

Nous avons vu plus haut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n existe.

Mieux nous pouvons dire que $H_n = \int_0^{+\infty} \frac{u_n f(x)}{x^2+u_n^2}\,dx - f(0) \int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx$ car toutes ~~les intégrales~~ convergent, et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = I_n - f(0) \int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2}\,dx = I_n - f(0)\frac{\pi}{2}$.

Nous allons montrer que $\lim_{n\to+\infty} H_n = 0$ ce qui donnera $\lim_{n\to+\infty} I_n = f(0)\frac{\pi}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = L_n + K_n$ et nous avons montré que $\lim_{n\to+\infty} K_n = 0$.

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\lim_{n\to+\infty} L_n = 0$. Nous allons le faire en utilisant la définition.

$x \mapsto |f(x)-f(0)|$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc pour tout $\alpha \in [0,+\infty[$, $\max\limits_{x\in[0,\alpha]} |f(x)-f(0)|$ existe
(une fonction continue sur un segment y possède un maximum)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $|L_n| = \left|\int_0^{\sqrt{u_n}} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2} dx\right| \leq \int_0^{\sqrt{u_n}} \left|\frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2}\right| dx = \int_0^{\sqrt{u_n}} \frac{u_n}{x^2+u_n^2} |f(x)-f(0)| dx$.

donc $|L_n| \leq \max\limits_{z\in[0,\sqrt{u_n}]} |f(z)-f(0)| \int_0^{\sqrt{u_n}} \frac{u_n}{x^2+u_n^2} dx \leq \max\limits_{z\in[0,\sqrt{u_n}]} |f(z)-f(0)| \int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2} dx$ car

cette dernière intégrale est convergente et $x \mapsto \frac{u_n}{x^2+u_n^2}$ est positive sur $[0,+\infty[$.

Finalement $\underline{|L_n| \leq \frac{\pi}{2} \max\limits_{z\in[0,\sqrt{u_n}]} |f(z)-f(0)|}$ Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0$ nous allons utiliser

par définition. Prenons ε quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$ et montrons qu'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ tel que

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow |L_n| < \varepsilon$. f est continue en 0.

Ainsi $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall z \in \mathbb{R}^+$, $|z-0| < \alpha \Rightarrow |f(z)-f(0)| < \frac{2}{\pi}\varepsilon$.

$\forall x \in [0,\alpha[$, $\forall z \in [0,x]$, $|z-0| = z \leq x < \alpha$

donc $\forall x \in [0,\alpha[$, $\forall z \in [0,x]$, $|z-0| < \alpha$. $\forall x \in [0,\alpha[, \forall z \in [0,x], |f(z)-f(0)| < \frac{2}{\pi}\varepsilon$.

Alors $\forall x \in [0,\alpha[$, $\max\limits_{z\in[0,x]} |f(z)-f(0)| < \frac{2}{\pi}\varepsilon$ ou $\frac{\pi}{2}\max\limits_{z\in[0,x]} |f(z)-f(0)| < \varepsilon$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = 0$. Alors $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow \sqrt{u_n} = |\sqrt{u_n} - 0| < \alpha$.

Alors $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $\sqrt{u_n} \in [0,\alpha[$. Ainsi $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $|L_n| \leq \frac{\pi}{2}\max\limits_{z\in[0,\sqrt{u_n}]} |f(z)-f(0)| < \varepsilon$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow |L_n| < \varepsilon$.

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow |L_n| < \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (L_n + K_n) = 0 + 0 = 0$.

donc $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} H_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u_n(f(x)-f(0))}{x^2+u_n^2} dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{u_n f(x)}{x^2+u_n^2}}_{I_n} - f(0)\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2+u_n^2} dx}_{=\pi/2}\right]$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n - f(0)\frac{\pi}{2}) = 0$. $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2} f(0) = \frac{\pi}{4}}$.

R..

Question 11 **HEC 2012-11-S36** $\boxed{\textbf{F 1}}$

n appartient à $\mathbb{N}^*$ et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1. Établir l'existence d'un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q2. On suppose que la matrice A est inversible. Montrer que A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.

Question de cours. *Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.*

Q1 $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$ et $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est une famille de n^2+1 éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est donc liée.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$, $(a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ et $\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Posons $P = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$. $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

<u>Il existe un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.</u>

Q2 Supposons que A est inversible. $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$

$\{k \in [\![0, n^2]\!] \mid a_k \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. Elle possède donc un plus petit élément que nous notons r (r est la valuation de P).

Alors $a_r \neq 0$ et $\sum_{k=r}^{n^2} a_k A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. En multipliant par $(A^{-1})^r$ on obtient $\sum_{k=r}^{n^2} a_k A^{k-r} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ ("en clair" : $a_r I_n + a_{r+1} A + \dots + a_{n^2} A^{n^2-r} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$).

Si $r = n^2$: $a_{n^2} A^0 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Donc $a_{n^2} I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Alors $a_{n^2} = 0$. $a_r = 0$.
Ainsi $a_r = 0$. Ce qui n'est pas. Par conséquent $r < n^2$.

Alors $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = a_r I_n + \sum_{k=r+1}^{n^2} a_k A^{k-r} = a_r I_n + A\left(\sum_{k=r+1}^{n^2} a_k A^{k-r-1}\right)$.

Ainsi $A\left(\sum_{k=r+1}^{n^2} \left(-\frac{a_k}{a_r}\right) A^{k-r-1}\right) = I_n$. En multipliant à gauche par A^{-1}

on obtient : $A^{-1} = \sum_{k=r+1}^{n^2} \left(-\frac{a_k}{a_r}\right) A^{k-r-1}$

Par conséquent <u>A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.</u>

HEC 2012 S 40

Exercice principal S40

1. Question de cours : Comparaison de séries à termes positifs.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} \times u_n$.

2. Écrire une fonction Pascal ayant pour argument un entier n et renvoyant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$.

a) Rappeler le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.
Montrer que $\ln v_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{5}{2n}\right)$.
Pour quelle valeur α_0 du réel α la série de terme général $\ln v_n$ est-elle convergente ?

b) Expliciter $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln v_k$ sans signe $\sum$, et en déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que $u_n \sim \dfrac{C}{n^{\alpha_0}}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Qu'en déduit-on pour la série $\sum u_n$?

c) Justifier l'existence d'un réel strictement positif D (indépendant de n) tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k u_k \leqslant D \times \sqrt{n}$.

4.a) Établir pour tout entier naturel n, la relation : $\displaystyle 2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice sans préparation S40

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.
Déterminer toutes les fonctions g continues et strictement monotones de $]0, 1[$ sur $g(]0, 1[)$ telles que la variable aléatoire réelle $Y = g(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

HEC 2012 S 40 Correction de l'exercice principal

Q1 $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont deux suites de réels.

R1 On suppose que $\exists p\in [\![n_0,+\infty[\![$, $\forall n\in [\![p,+\infty[\![$, $0\leq u_n\leq v_n$.

. Si la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n converge.

. Si la série de terme général u_n diverge, la série de terme général v_n diverge.

R2 On suppose que $u_n \sim v_n$ et que l'une des deux suites a, à partir d'un certain rang, des termes positifs ou nuls.

Alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

R3 On suppose que $\exists p\in [\![n_0,+\infty[\![$, $\forall n\in [\![p,+\infty[\![$, $u_n\geq 0$ et $v_n\geq 0$. On suppose aussi que $u_n=o(v_n)$.

Si la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n converge.

Si la série de terme général u_n diverge, la série de terme général v_n diverge.

Q2

```
Program S40;
var n,k:integer; u,s:real;
begin
write ('Donner n. n = ');readln(n);
u:=1; S:=1;
For k:=1 to n do
    begin
    u:=(k+k)/(k+k+3)*u;
    S:=S+u;
    end;
writeln ('S',n,'=',S);
end.
```

Le programme ne pose aucun problème si l'on pose $\forall k\in\mathbb{N}$, $S_k=\sum_{i=0}^{k}u_i$ et si l'on remarque que :

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $u_k=\dfrac{2k}{2k+3}u_{k-1}$ et

$S_k=S_{k-1}+u_k$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{2k}{2k+3}=\dfrac{k+k}{k+k+3}$ ce qui remplace deux multiplications par deux additions...

▲ La division est effectuée avant la multiplication...

$S_{100}\simeq 2{,}736\ 428\ 571$

$S_{500}\simeq 2{,}881\ 307\ 119$

$S_{1000}\simeq 2{,}915\ 998\ 602$

$S_{10000}\simeq 2{,}973\ 415\ 518$

Q3) a) $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\ln v_n = \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}\right) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right)$.

$\ln v_n = \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{2n+5}{2n+2}\right)$.

$\ln v_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{2n+5}{2(n+1)}\right)$.

$\ln v_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+5}{2(n+1)}\right)\right) = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{2n+5}{2n}\right)$.

Finalement $\ln v_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right)$.

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\ln\left(1+\frac{5}{2n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{5}{2n} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Alors $\ln v_n \underset{n \to +\infty}{=} (\alpha+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) - \frac{5}{2n} + \frac{1}{2}\,\frac{25}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\ln v_n \underset{n \to +\infty}{=} \left(\alpha+1-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{25}{8} - \frac{\alpha+1}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$\ln v_n \underset{n \to +\infty}{=} \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{8}(25 - 4(\alpha+1))\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. $\ln v_n \underset{n \to +\infty}{=} \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} + \frac{21-4\alpha}{8} \times \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

1er cas $\alpha - \frac{3}{2} \neq 0$. Alors $\ln v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{n}$; $\frac{1}{\alpha - \frac{3}{2}} \ln v_n \sim \frac{1}{n}$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \geq 0$. La divergence de la série de terme général $\frac{1}{n}$ et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\frac{1}{\alpha - \frac{3}{2}} \ln v_n$ diverge. Alors la série de terme général $\ln v_n$ diverge.

2ème cas. $\alpha - \frac{3}{2} = 0$.

$\alpha = \frac{3}{2}$ et $\frac{21-4\alpha}{8} = \frac{21-6}{8} = \frac{15}{8}$. Donc $\ln v_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{15}{8} \times \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Alors
- $\ln v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{15}{8}\times\frac{1}{n^2}$
- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{15}{8}\times\frac{1}{n^2}\geq 0$
- la série de terme général $\frac{15}{8}\times\frac{1}{n^2}$ converge (cours !)

les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\ln v_n$ converge.

<u>Finalement la série de terme général $\ln v_n$ converge si et seulement si $\alpha=\frac{3}{2}$.</u> $\alpha_0=\frac{3}{2}$!

D) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln v_k=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{(k+1)^\alpha u_{k+1}}{k^\alpha u_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left((k+1)^\alpha u_{k+1}\right)-\ln\left(k^\alpha u_k\right)\right]$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln v_k=\ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right)-\ln\left(1^\alpha u_1\right)\underset{\underset{u_1=\frac{2}{5}}{\uparrow}}{=}\ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right)-\ln\frac{2}{5}.$$

<u>$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln v_k=\ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right)-\ln\frac{2}{5}$</u>

Je préfère : <u>$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \ln(n^\alpha u_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\ln v_k+\ln\frac{2}{5}$.</u>

Posons $\alpha=\alpha_0$. Alors la série de terme général $\ln v_k$ converge. Posons $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\ln v_k+\ln\frac{2}{5}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n^{\alpha_0}u_n)=S$. Par continuité de la fonction exponentielle en S il vient :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n^{\alpha_0}u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\ln(n^{\alpha_0}u_n)}=e^S$. Comme $e^S\neq 0$: $n^{\alpha_0}u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}e^S$.

Donc $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e^S}{n^{\alpha_0}}$. Posons $C=e^S$. <u>$C>0$ et $u_n\sim\frac{C}{n^{\alpha_0}}$.</u>

De plus $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{C}{n^{\alpha_0}}>0$ et la série de terme général $\frac{C}{n^{\alpha_0}}$ converge car $\alpha_0>1$.

les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que

<u>la série de terme général u_n converge.</u>

c] $u_\ell \underset{\ell\to+\infty}{\sim} \frac{c}{\ell^{4/2}} = \frac{c}{\ell^{3/2}}$ donc $\ell^{3/2} u_\ell \underset{\ell\to+\infty}{\sim} c$. $\sqrt{\ell}\,\ell u_\ell \underset{\ell\to+\infty}{\sim} c$; $\ell u_\ell \underset{\ell\to+\infty}{\sim} \frac{c}{\sqrt{\ell}}$.

$\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{\ell} - \sqrt{\ell-1} = \frac{\ell-(\ell-1)}{\sqrt{\ell}+\sqrt{\ell-1}} = \frac{1}{\sqrt{\ell}+\sqrt{\ell-1}} = \frac{1}{\sqrt{\ell}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{\ell}}\right)}$.

$\lim\limits_{\ell\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{\ell}}\right) = 2$ donc $\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell-1} \underset{\ell\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\ell}}$. $2c\left(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell-1}\right) \underset{\ell\to+\infty}{\sim} \frac{c}{\sqrt{\ell}} \underset{\ell\to+\infty}{\sim} \ell u_\ell$.

Alors $\lim\limits_{\ell\to+\infty} \frac{\ell u_\ell}{2c(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell-1})} = 1$ car $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $2c(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell-1}) \neq 0$.

Ainsi la suite $\left(\frac{\ell u_\ell}{2c(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell-1})}\right)_{\ell\geq 1}$ est convergente. Elle est donc bornée.

$\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\ell u_\ell}{2c(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell-1})} = \left|\frac{\ell u_\ell}{2c(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell-1})}\right| \leq M$.

$\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $2c\left(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell-1}\right) > 0$.

Alors $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\ell u_\ell \leq 2cM\left(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell-1}\right)$

Posons $D = 2cM$. $D > 0$ et $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\ell u_\ell \leq D(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell-1})$.

Mieux $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\ell u_\ell \leq D(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell-1})$ (Pour $\ell=0$, $\ell u_\ell = 0$ et $D(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell-1}) = D > 0$).

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{\ell=0}^{n} \ell u_\ell \leq \sum\limits_{\ell=0}^{n} D(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell-1}) = D \sum\limits_{\ell=0}^{n}(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell-1}) = D\sqrt{n}$.

Ainsi $\exists D \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{\ell=0}^{n} \ell u_\ell \leq D\sqrt{n}$.

Q4 a] $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $u_{\ell+1} = \frac{2\ell+2}{2\ell+5} u_\ell$; $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $(2\ell+5)u_{\ell+1} = (2\ell+2)u_\ell$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$2\sum_{\ell=1}^{n+1} \ell u_\ell + 3\sum_{\ell=1}^{n+1} u_\ell = \sum_{\ell=1}^{n+1}(2\ell+3)u_\ell \underset{\ell \leftarrow \ell+1}{=} \sum_{\ell=0}^{n}(2\ell+5)u_{\ell+1} = \sum_{\ell=0}^{n}(2\ell+2)u_\ell = 2\sum_{\ell=0}^{n} \ell u_\ell + 2\sum_{\ell=0}^{n} u_\ell.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $2\sum\limits_{\ell=1}^{n+1} \ell u_\ell + 3\sum\limits_{\ell=1}^{n+1} u_\ell = 2\sum\limits_{\ell=0}^{n} \ell u_\ell + 2\sum\limits_{\ell=0}^{n} u_\ell$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$

Alors $3\sum_{k=0}^{n+1} u_k - 3u_0 - 2\sum_{k=0}^{n} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k - 2\sum_{k=0}^{n+1} k u_k = -2(n+1)u_{n+1}$. (*)

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{n^{3/2}}$; $n u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{\sqrt{n}}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} (n u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{c}{\sqrt{n}} = 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} (-2(n+1)u_{n+1}) = 0$.

La série de terme général u_k converge. Posons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (*) il vient : $3S - 3u_0 - 2S = 0$. $S = 3u_0 = 3$.

Ainsi $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 3$ ou $\underline{\underline{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 3}}$.

Exercice. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général u_n converge. Montrer que si la série de terme général u_n converge : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{b-1}{b-1-a}$.

K..

Question 13 **HEC 2012-13-S40** $\boxed{\text{F 2}}$

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

Déterminer toutes les fonctions g continues et strictement monotones de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)$ telles que la variable aléatoire $Y = g(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

Question de cours. *Comparaison des séries à termes positifs.*

• __Analyse.__. Soit g une application continue et strictement monotone de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

1) $I = g(]0,1[)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2) g définit une bijection de $]0,1[$ sur I

supposons encore que $Y = g(X) = g \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Notons F_Y (resp. F_X) la fonction de répartition de Y (resp. X)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[. \end{cases}$

$\forall x \in]0,1[$, $F_Y(g(x)) = P(Y \leqslant g(x)) = P(g \circ X \leqslant g(x))$.

__1er cas.__. g est strictement croissante sur $]0,1[$.

soit $x \in]0,1[$, $F_Y(g(x)) = P(g \circ X \leqslant g(x)) = P(X \leqslant x) = F_X(x) \overset{x \in]0,1[}{=} x$

de plus $F_Y(g(x)) = 0$ ou $1 - e^{-g(x)}$. Donc $x = 0$ ou $x = 1 - e^{-g(x)}$.

Or $x \in]0,1[$. Ainsi $x = 1 - e^{-g(x)}$. $e^{-g(x)} = 1 - x$; $-g(x) = \underset{x \in]0,1[}{\ln(1-x)}$; $g(x) = -\ln(1-x)$.

__$\forall x \in]0,1[$, $g(x) = -\ln(1-x)$.__

__2ième cas.__. g est strictement décroissante sur $]0,1[$.

soit $x \in]0,1[$, $F_Y(g(x)) = P(g \circ X \leqslant g(x)) = P(X \geqslant x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leqslant x)$

Alors $F_Y(g(x)) = 1 - x$ car $x \in]0,1[$. Or $F_Y(g(x)) = 0$ ou $1 - e^{-g(x)}$.

comme $x \neq 1$: $1 - x = F_Y(g(x)) = 1 - e^{-g(x)}$; $x = e^{-g(x)}$; $\ln x = -g(x)$.

__$\forall x \in]0,1[$, $g(x) = -\ln(x)$.__

• __Synthèse.__ Posons $\forall x \in]0,1[$, $g_1(x) = -\ln(1-x)$ et $g_2(x) = -\ln x$.

Notons que g_1 et g_2 sont continues et strictement monotones

sur $]0,1[$ et que, $g_1 \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $g_2 \circ X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Posons $Y_1 = g_1 \circ X$ et $Y_2 = g_2 \circ X$.

$u : x \to 1-x$ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$, $\forall x \in]0,1[$, $u(x) \in]0,1[$,

$-\ln$ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$.

Par composition g_1 est continue et strictement croissante sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$, $g_1(x) = -\ln(1-x) \in]0,+\infty[$. Alors $Y_1 = g_1 \circ X$ prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$.

Soit F_{Y_1} la fonction de répartition de Y_1. $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_{Y_1}(x) = 0$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

$F_{Y_1}(x) = P(g_1 \circ X \leq x) = P(-\ln(1-X) \leq x) = P(\ln(1-X) \geq -x) = P(1-X \geq e^{-x})$.

$$F_{Y_1}(x) = P(X \leq 1-e^{-x}) = 1-e^{-x} \quad \left\{\begin{array}{l} 1-e^{-x} \in]0,1[\text{ car } x \in]0,+\infty[\\ X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[) \end{array}\right.$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ou $F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. g_1 est solution.

$\forall x \in]0,1[$, $g_2(x) = -\ln x$. g_2 est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$, $g_2(x) = -\ln x = -\ln(1-(1-x)) = g_1(1-x)$. $Y_2 = g_1(1-X)$.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$. Rappelons alors que $1-X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$. Mais alors, d'après ce qui précède (" $X \leftarrow 1-X$ "!), $g_1(1-X) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. g_2 est solution.

Les fonctions g continues et strictement monotones de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)$ telles que la variable aléatoire $Y = g(X)$ suit la loi exponentielle sont les fonctions g_1 et g_2 définies par $\forall x \in]0,1[$, $g_1(x) = -\ln(1-x)$ et $g_2(x) = -\ln x$.

Exercice principal S42

1. Question de cours : Définition de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y, prenant chacune au moins deux valeurs avec une probabilité strictement positive. Indiquer dans quels cas $\rho_{X,Y}$ vaut 1 ou -1.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

2. Pour $r \in \mathbb{R}$, soit M_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & r & \cdots & r \\ r & 1 & r & \cdots & r \\ r & r & 1 & \cdots & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & r & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $(1-r)$ est une valeur propre de M_r et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b) Trouver une matrice diagonale semblable à M_r.

c) Pour quelles valeurs de r, l'application $(x, y) \mapsto {}^tXM_rY$ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$? (X et Y désignent les matrices-colonnes dont les composantes sont celles des vecteurs x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$)

3. Soit $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$, n variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et possédant toutes une variance égale à 1. On pose : $Z = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$.

a) Calculer pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la variance $V(Z_1 + \alpha Z)$ et la covariance $\mathrm{Cov}(Z_1 + \alpha Z, Z_2 + \alpha Z)$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe un réel c_α tel que la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire $\big(c_\alpha(Z_1 + \alpha Z), \cdots, c_\alpha(Z_n + \alpha Z)\big)$ soit égale à une matrice M_r définie dans la question 2.

4. Déduire des résultats précédents que M_r est la matrice de variance-covariance d'un vecteur aléatoire discret *si et seulement si* on a : $\dfrac{1}{1-n} \leqslant r \leqslant 1$.

Exercice sans préparation S42

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

1. Montrer que si $\alpha = 2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.
2. Montrer que si $0 \leqslant \alpha < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

HEC 2012 S42 Correction de l'exercice principal

Q1 $\mathrm{cov}(X,Y) = E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$ ou $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}. \qquad |\rho_{X,Y}| \leq 1.$$

$\rho_{X,Y} = 1$ ou -1 si et seulement si X (resp. Y) est une fonction quasi-affine de Y (resp. X).

$\rho_{X,Y} = 1$ ou $-1 \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P(X = aY + b) = 1$.

$\rho_{X,Y} = 1$ ou $-1 \iff \exists (a',b') \in \mathbb{R}^2,\ P(Y = a'X + b') = 1$.

Q2 Dans ce qui suit nous notons J_r la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à r.

a) $M_r = (1-r)I_n + J_r$; $M_r - (1-r)I_n = J_r = \begin{pmatrix} r & \cdots & r \\ r & \cdots & r \\ \vdots & & \vdots \\ r & \cdots & r \end{pmatrix}$.

Toutes les colonnes de J_r sont égales à $\begin{pmatrix} r \\ r \\ \vdots \\ r \end{pmatrix}$.

1er cas $r = 0$. Alors $1 - r = 1$ et $M_r = I_n$.

Donc $1-r$ est valeur propre de M_r et $\dim SEP(M_r, 1-r) = n$.

2e cas $r \neq 0$. Alors $\mathrm{rg}\, J_r = 1 < n$. $\mathrm{rg}(M_r - (1-r)I_n) = 1 < n$.

Ainsi $M_r - (1-r)I_n$ n'est pas inversible et $1-r$ est valeur propre de M_r.

De plus $\dim SEP(M_r, 1-r) = n - \mathrm{rg}(M_r - (1-r)I_n) = n - 1$.

Finalement $1-r$ est valeur propre de M_r et $\dim SEP(M_r, 1-r) = \begin{cases} n & \text{si } r = 0 \\ n-1 & \text{si } r \neq 0 \end{cases}$.

b) <u>1er cas</u>.. $r=0$. $M_r = I_n$. Alors M_r est semblable (!) à la matrice diagonale I_n !

<u>2ème cas</u>.. $r \neq 0$ M_r est symétrique et à coefficients réels donc M_r est diagonalisable.
$1-r$ est valeur propre de M_r et $\dim SEP(M_r, 1-r) = n-1$.

Alors M_r admet exactement deux valeurs propres. Ainsi il existe un réel α distinct de $1-r$ tel que $Sp\, M_r = \{1-r, \alpha\}$.

$M_{n,1}(\mathbb{R}) = SEP(M_r, 1-r) \oplus SEP(M_r, \alpha)$ et ces deux sous-espaces propres sont orthogonaux.

Ainsi $SEP(M_r, \alpha) = (SEP(M_r, 1-r))^{\perp}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$M_r X = (1-r)X \iff \begin{cases} x_1 + rx_2 + \cdots + rx_n = (1-r)x_1 \\ rx_1 + x_2 + rx_3 + \cdots + rx_n = (1-r)x_2 \\ \quad \cdots \\ rx_1 + rx_2 + \cdots + rx_{n-1} + x_n = (1-r)x_n \end{cases} \iff r(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0 \iff x_1+x_2+\cdots+x_n=0.$$

$SEP(M_r, 1-r)$ est l'hyperplan de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ d'équation $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ dans la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est orthonormée (pour le produit scalaire canonique ...).

Alors $(SEP(M_r, 1-r))^{\perp}$ est la droite vectorielle de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors $U \in SEP(M_r, \alpha)$ et $\alpha U = AU = \begin{pmatrix} 1+(n-1)r \\ 1+(n-1)r \\ \vdots \\ 1+(n-1)r \end{pmatrix} = (1+(n-1)r)U$.

Comme $U \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$: $\alpha = 1+(n-1)r$.

Ainsi $Sp\, M_r = \{1-r, 1+(n-1)r\}$, $\dim SEP(M_r, 1-r) = n-1$ et $\dim SEP(M_r, 1+(n-1)r) = 1$

Alors M_r est semblable à la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$, $Diag(1-r, 1-r, \ldots, 1-r, 1+(n-1)r)$.

Notons que ceci est encore vrai pour $r=0$.

<u>M_r est semblable à $Diag(1-r, 1-r, \ldots, 1-r, 1+(n-1)r)$ et ceci pour tout r dans $\mathbb{R}$.</u>

c) • Par définition φ est une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3$. Notons X, Y, Z les matrices de x, y, z dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. $\lambda Y + Z$ est la matrice de $\lambda y + z$ dans cette même base.

$\varphi(x,\lambda y+z)={}^tXM_r(\lambda Y+Z)=\lambda\,{}^tXM_rY+{}^tXM_rZ=\lambda\varphi(x,y)+\varphi(x,z)$. M_r est symétrique.

$\varphi(x,y)={}^tXM_rY=\langle X,M_rY\rangle=\langle M_rY,X\rangle={}^t(M_rY)X={}^tY\,{}^tM_rX={}^tYM_rX=\varphi(y,x)$.

Ainsi $\forall(x,y,z)\in(\mathbb{R}^n)^3,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \varphi(x,\lambda y+z)=\lambda\varphi(x,y)+\varphi(x,z)$

et $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2,\ \varphi(x,y)=\varphi(y,x)$.

Ceci suffit pour dire que <u>φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$.</u>

* Supposons que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Soit λ une valeur propre de M_r et soit X_λ un vecteur propre associé.

Soit x_λ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de matrice X_λ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$X_\lambda\neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $x_\lambda\neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi $\varphi(x_\lambda,x_\lambda)>0$ car φ est un produit scalaire.

$0<\varphi(x_\lambda,x_\lambda)={}^tX_\lambda M_rX_\lambda={}^tX_\lambda(\lambda X_\lambda)=\lambda\,{}^tX_\lambda X_\lambda=\lambda\|X_\lambda\|^2$ et $\|X_\lambda\|^2>0$ car $X_\lambda\neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

Alors $\lambda>0$. Or $\mathrm{Sp}\,M_r=\{1-r,\ 1+(n-1)r\}$ (même si $r=0$!).

Ainsi $1-r>0$ et $1+(n-1)r>0$ donc $r<1$ et $r>-\frac{1}{n-1}$. <u>$\frac{1}{1-n}<r<1$</u>

* Réciproquement supposons que $\frac{1}{1-n}<r<1$.

Alors $1-r>0$ et $1+(n-1)r>0$. Les valeurs propres de M_r sont strictement positives.

Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Comme φ est bilinéaire symétrique il ne reste plus qu'à montrer que :

$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \varphi(x,x)\geq 0$ et $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \varphi(x,x)=0\Rightarrow x=0_{\mathbb{R}^n}$.

Notons que $\varphi(0_{\mathbb{R}^n},0_{\mathbb{R}^n})=0\geq 0$.

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^n-\{0_{\mathbb{R}^n}\},\ \varphi(x,x)>0$.

Soit $x\in\mathbb{R}^n-\{0\}$. Soit X sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. $X\neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\varphi(x,x)={}^tXM_rX$. Montrons que ${}^tXM_rX>0$.

Si $r=0$: ${}^tXM_rX={}^tXI_nX={}^tXX=\|X\|^2>0$ car $X\neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Supposons $r\neq 0$.

<u>Version 1.</u> On considère que c'est du cours. La matrice M_r est symétrique, à coefficients réels et à valeurs propres strictement positives donc pour tout élément Z de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ différent de $0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$, ${}^tZ M_r Z > 0$.

Alors ${}^tX M_r X > 0$ car $X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

<u>Version 2..</u> On redémontre. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ une base orthonormée de $SEP(M_r, 1-r)$ et (X_n) une base orthonormée de $SEP(M_r, 1+(n-1)r)$.

Comme $SEP(M_r, 1-r)$ et $SEP(M_r, 1+(n-1)r)$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M_r associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ avec $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 1-r$ et $\alpha_n = 1+(n-1)r$.

Soit $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ la famille des coordonnées de X dans cette base.

$X = \sum_{k=1}^{n} \beta_k X_k$. $M_r X = \sum_{k=1}^{n} \beta_k M_r X_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \alpha_k X_k$.

${}^tX M_r X = \langle X, M_r X\rangle = \sum_{k=1}^{n} \beta_k (\beta_k \alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 \alpha_k$ car $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base orthonormée.

Or par hypothèse $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\alpha_k = 1-r > 0$ et $\alpha_n = 1+(n-1)r > 0$.

Alors ${}^tX M_r X = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 \alpha_k \geqslant 0$.

Supposons que ${}^tX M_r X = 0$. Alors $\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 \alpha_k = 0$ avec $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\beta_k^2 \alpha_k \geqslant 0$

donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\beta_k^2 \alpha_k = 0$ et $\alpha_k > 0$. Alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\beta_k^2 = 0$.

Ainsi $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\beta_k = 0$. Alors $X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$!!

Finalement ${}^tX M_r X \geqslant 0$ et ${}^tX M_r X \neq 0$. Alors ${}^tX M_r X > 0$. C'est ce qu'il fallait démontrer pour dire que φ est un produit scalaire.

<u>Conclusion..</u> <u>φ est un produit scalaire si et seulement si $\frac{1}{1-n} < r < 1$</u>

<u>Remarques..</u> 1.. Si $\frac{1}{1-n} < r < 1$, φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et M_r est sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2.. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire si et seulement si elle est symétrique à valeurs propres strictement positives.

R.

(Q3) a) Remarques 1. $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont indépendantes donc $V(\sum_{k=1}^{n} Z_k) = \sum_{k=1}^{n} V(Z_k)$.

Or $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $V(Z_k) = 1$. donc $V(\sum_{k=1}^{n} Z_k) = n$.

$V(Z) = V(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k) = \frac{1}{n^2} V(\sum_{k=1}^{n} Z_k) = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n}$. $\underline{\underline{V(Z) = \frac{1}{n}}}$.

2. Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{cov}(Z_i, Z) = \mathrm{cov}(Z_i, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{cov}(Z_i, Z_k)$.

Si $k \in [\![1,n]\!] - \{i\}$, Z_i et Z_k sont indépendantes donc $\mathrm{cov}(Z_i, Z_k) = 0$.

Alors $\mathrm{cov}(Z_i, Z) = \frac{1}{n}\mathrm{cov}(Z_i, Z_i) = \frac{1}{n} V(Z_i) = \frac{1}{n}$.

$\underline{\underline{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathrm{cov}(Z_i, Z) = \frac{1}{n}}}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Ne négligeons pas... soit $\underline{i} \in [\![1,n]\!]$ et $\underline{j} \in [\![1,n]\!] - \{i\}$.

$V(Z_i + \alpha Z) = \mathrm{cov}(Z_i + \alpha Z, Z_i + \alpha Z) = \mathrm{cov}(Z_i, Z_i) + \alpha \mathrm{cov}(Z_i, Z) + \alpha \mathrm{cov}(Z, Z_i) + \alpha^2 \mathrm{cov}(Z, Z)$.

$V(Z_i + \alpha Z) = 1 + \alpha \times \frac{1}{n} + \alpha \times \frac{1}{n} + \alpha^2 \times \frac{1}{n} = 1 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{n}$.

$\mathrm{cov}(Z_i + \alpha Z, Z_j + \alpha Z) = \underbrace{\mathrm{cov}(Z_i, Z_j)}_{=0 \text{ car } i \neq j} + \alpha \mathrm{cov}(Z_i, Z) + \alpha \mathrm{cov}(Z, Z_j) + \alpha^2 \mathrm{cov}(Z, Z)$.

$\mathrm{cov}(Z_i + \alpha Z, Z_j + \alpha Z) = 0 + \alpha \times \frac{1}{n} + \alpha \times \frac{1}{n} + \alpha^2 \times \frac{1}{n} = \frac{2\alpha + \alpha^2}{n}$.

$\underline{\underline{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall i \in [\![1,n]\!],\ V(Z_i + \alpha Z) = \mathrm{cov}(Z_i + \alpha Z, Z_i + \alpha Z) = 1 + \frac{2\alpha + \alpha^2}{n}}}$.

$\underline{\underline{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \mathrm{cov}(Z_i + \alpha Z, Z_j + \alpha Z) = \frac{2\alpha + \alpha^2}{n}}}$.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $1 + \frac{2\alpha + \alpha^2}{n} = \frac{(\alpha+1)^2 - 1}{n} + 1 = \frac{(\alpha+1)^2 + (n-1)}{n} \overset{n \geq 2}{>} 0$.

Posons $c_\alpha = \dfrac{1}{\left(1 + \frac{2\alpha + \alpha^2}{n}\right)^{1/2}}$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $T_i = c_\alpha (Z_i + \alpha Z)$.

$\mathrm{cov}(T_i, T_i) = c_\alpha^2 \mathrm{cov}(Z_i + \alpha Z, Z_i + \alpha Z) = \dfrac{1}{\left(1 + \frac{2\alpha + \alpha^2}{n}\right)} \times \left(1 + \frac{2\alpha + \alpha^2}{n}\right) = 1$ et ceci

pour tout i dans $[\![1,n]\!]$.

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \Rightarrow \mathrm{cov}(T_i,T_j)= c_\alpha^2 \mathrm{cov}(Z_i+\alpha Z, Z_j+\alpha Z)= \dfrac{1}{1+\frac{2\alpha+\alpha^2}{n}} \times \dfrac{2\alpha+\alpha^2}{n}.$

Posons $r= \dfrac{1}{1+\frac{2\alpha+\alpha^2}{n}} \times \dfrac{2\alpha+\alpha^2}{n}.$

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ \mathrm{cov}(T_i,T_j)= \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ r & \text{si } i\neq j \end{cases}$. Alors la matrice de covariance

du vecteur aléatoire $(T_1,T_2,\dots,T_n)$ donc du vecteur aléatoire $(c_\alpha(Z_1+\alpha Z), c_\alpha(Z_2+\alpha Z),\dots,c_\alpha(Z_n+\alpha Z))$

est M_r.

<u>Pour tout α dans $\mathbb{R}$, il existe un réel c_α tel que la matrice de covariance du vecteur aléatoire $(c_\alpha(Z_1+\alpha Z), c_\alpha(Z_2+\alpha Z),\dots,c_\alpha(Z_n+\alpha Z))$ soit égale à une matrice M_r définie dans Q2.</u>

(Q4) <u>Remarque</u>.- dans Q2 c) nous avons redémontré que :

$\left(\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ X\neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})},\ {}^tX M_r X>0\right) \iff \mathrm{Sp}\, M_r\subset \mathbb{R}_+^* \iff \dfrac{1}{1-n}<r<1.$

le cours ou une démonstration semblable donne :

<u>$\left(\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX M_r X\geqslant 0\right) \iff \mathrm{Sp}\, M_r\subset \mathbb{R}_+ \iff \dfrac{1}{1-n}\leqslant r\leqslant 1.$</u>

* Supposons que M_r soit la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire $(W_1,W_2,\dots,W_n)$. Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $W=\sum_{k=1}^{n} x_k W_k$.

Posons $M_r=(m_{ij})$. $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!],\ m_{ij}=\mathrm{cov}(W_i,W_j)$.

$${}^tX M_r X= \sum_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n m_{ij}x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j m_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \mathrm{cov}(W_i,W_j).$$

$${}^tX M_r X = \sum_{i=1}^n x_i \mathrm{cov}\Big(W_i, \sum_{j=1}^n x_j W_j\Big) = \mathrm{cov}\Big(\sum_{i=1}^n x_i W_i, \sum_{j=1}^n x_j W_j\Big)=\mathrm{cov}(W,W)$$

donc ${}^tX M_r X=\mathrm{cov}(W,W)=V(W)\geqslant 0$.

Ainsi $\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX M_r X\geqslant 0$. $\mathrm{Sp}\, M_r\subset \mathbb{R}_+$. Ainsi $\dfrac{1}{1-n}\leqslant r\leqslant 1$.

* Réciproquement supposons que $\frac{1}{1-n} \leq r \leq 1$.

Soit $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ n variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et possédant toutes une variance égale à 1.

1er cas.. $r = 1$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $\text{cov}(Z_i, Z_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $\quad$ * $M_r = I_n$

* la matrice de covariance du vecteur aléatoire $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ est I_n.

donc M_r est la matrice de variance d'un vecteur aléatoire discret

2ème cas.. $r \neq 1$ donc $\frac{1}{1-n} \leq r < 1$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour $c_\alpha = \frac{1}{1 + (2\alpha + \alpha^2)/n}$. Nous avons vu que la matrice de covariance du vecteur aléatoire $V_\alpha = (c_\alpha(Z_1 + \alpha Z), c_\alpha(Z_2 + \alpha Z), \dots, c_\alpha(Z_n + \alpha Z))$ est M_{r_α} avec

$r_\alpha = \frac{1}{1 + (2\alpha + \alpha^2)/n} \cdot \frac{2\alpha + \alpha^2}{n}$. Cherchons donc α tel que $r_\alpha = r$.

$r_\alpha = r \iff \frac{2\alpha + \alpha^2}{n + 2\alpha + \alpha^2} = r \iff 2\alpha + \alpha^2 = r(2\alpha + \alpha^2) + rn \iff (r-1)(2\alpha + \alpha^2) + rn = 0$.

$r_\alpha = r \underset{r \neq 1}{\iff} \alpha^2 + 2\alpha + \frac{rn}{r-1} = 0 \iff (\alpha+1)^2 = \frac{-rn}{r-1} + 1 \iff (\alpha+1)^2 = \frac{rn + 1 - r}{1-r}$

$r_\alpha = r \iff (\alpha+1)^2 = \frac{1-(1-n)r}{1-r}$. Or $r < 1$ donc $1 - r > 0$.

de plus $\frac{1}{1-n} \leq r$; $\frac{1}{n-1} \geq -r$ et $n - 1 \geq 0$; $1 \geq -(n-1)r$; $1 + (n-1)r \geq 0$; $1 - (1-n)r \geq 0$.

Alors $\frac{1-(1-n)r}{1-r} \geq 0$.

Pour $\alpha = -1 + \sqrt{\frac{1-(1-n)r}{1-r}}$. Alors $(\alpha+1)^2 = \frac{1-(1-n)r}{1-r}$. Ainsi $M_{r_\alpha} = M_r$.

R.

Pour finir si $\alpha = -1 + \sqrt{\dfrac{1-(1-n)r}{1-r}}$, en posant $c_\alpha = \dfrac{1}{1+(2\alpha+\alpha^2)/n}$ on peut dire que $(c_\alpha(Z_1+\alpha Z), c_\alpha(Z_2+\alpha Z), \dots, c_\alpha(Z_n+\alpha Z))$ est un vecteur aléatoire discret dont la matrice de covariance est Π_r. Ceci achève de montrer que

<u>Π_r est la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire discret si et seulement si on a</u>

<u>$\dfrac{1}{1-n} \leq r \leq 1$.</u>

R..

Question 14 **HEC 2012-14-S42** **F1**

α est un réel positif ou nul. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

Q1. Montrer que si $\alpha = 2$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

Q2. Montrer que si $0 \leqslant \alpha < 1$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Question de cours. *Définition de la covariance et du coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y, prenant chacune au moins deux valeurs avec une probabilité strictement positive. Indiquer dans quels cas $\rho_{X,Y}$ vaut 1 ou -1*

Q1 Ici $\alpha = 2$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln u_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln u_n = n \times \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)$. Posons $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = \ln(1+t^2)$.

f est continue sur $[0,1]$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = I$ où $I = \int_0^1 f(t)\,dt$.

Notons que f est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$. Ainsi $I > 0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right) = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)\right) = +\infty$.

$\lim_{n\to+\infty}(\ln u_n) = +\infty$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\ln u_n}\right) = +\infty$. $\underline{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Q2 Ici $0 \leqslant \alpha < 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right) \geqslant 1$.

Alors $0 \leqslant \ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^\alpha}{n^2}\right) \underset{(1)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^2} \underset{(2),\ \alpha\geqslant 0}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^\alpha}{n^2} = n \times \frac{n^\alpha}{n^2} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leqslant x-1$.

De plus $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}} = 0$ car $1-\alpha > 0$. Donc par encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty}(\ln u_n) = 0$.

Par continuité de la fonction exponentielle en 0 il vient $\lim_{n\to+\infty} e^{\ln u_n} = e^0$.

Ainsi $\underline{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

<u>Exercice..</u> Etudier $\lim_{n\to+\infty} u_n$ pour tout $\underline{\alpha \in \mathbb{R}}$.

HEC 2012 S 8

Exercice principal S8

1. Question de cours : Définition et propriétés des fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.

Pour toute partie $A \subseteq \mathbb{N}$, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$.

2.a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série de terme général $\dfrac{\mathbf{1}_A(k)x^k}{k!}$ est convergente.

On pose alors : $S_x(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_A(k)x^k}{k!}$.

b) On suppose que $A \subseteq B$. Comparer $S_x(A)$ et $S_x(B)$.

c) On suppose que $A \cap B = \emptyset$. Exprimer $S_x(A \cup B)$ en fonction de $S_x(A)$ et $S_x(B)$.

d) Calculer $S_x(\emptyset)$, $S_x(\mathbb{N})$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_x(\{p\})$.

3. On suppose désormais que $x \in]0, \ln 2[$.

a) Établir pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'inégalité stricte : $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^m}{m!}$.

b) Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $A \cap B = \emptyset$.
Montrer que si A n'est pas vide et si le plus petit élément m de $A \cup B$ appartient à A, alors :

$$S_x(B) < \frac{x^m}{m!} \leqslant S_x(A)$$

En déduire que si $S_x(A) = S_x(B)$, alors : $A = B = \emptyset$.

c) Montrer que l'application $A \mapsto S_x(A)$ est injective.

Exercice sans préparation S8

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $]0, 1]$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} U_i^{1/n}$ et $Y_n = (\mathrm{e}X_n)^{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $\big(\ln(Y_n)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

(Q1) . Soit A une partie de $\mathbb{N}$. $\mathbb{1}_A$ est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{N},\ \mathbb{1}_A(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in A\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

. A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$.

→ $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1-\mathbb{1}_A$

→ $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$

→ $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$

→ $A=B \iff \mathbb{1}_A=\mathbb{1}_B$.

(Q2) a) Soit $x\in\,]0,+\infty[$. Soit A une partie de $\mathbb{N}$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ 0\leq \mathbb{1}_A(k)\leq 1$. $\forall k\in\mathbb{N},\ 0\leq \dfrac{\mathbb{1}_A(k)x^k}{k!}\leq \dfrac{x^k}{k!}$ et la série de terme général $\dfrac{x^k}{k!}$ converge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent la convergence de la série de terme général $\dfrac{\mathbb{1}_A(k)\,x^k}{k!}$ converge.

b) A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$. On suppose que $A\subset B$. Soit $x\in\,]0,+\infty[$.

Soit $k\in\mathbb{N}$. Si $k\in A$ alors $k\in B$ et $\mathbb{1}_A(k)=1\leq 1=\mathbb{1}_B(k)$. Si $k\in\bar{A}$, $\mathbb{1}_A(k)=0\leq\mathbb{1}_B(k)$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{1}_A(k)\leq\mathbb{1}_B(k)$ et $\dfrac{x^k}{k!}\geq 0$. $\forall k\in\mathbb{N},\ \dfrac{\mathbb{1}_A(k)x^k}{k!}\leq\dfrac{\mathbb{1}_B(k)x^k}{k!}$.

Alors $S_x(A)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_A(k)x^k}{k!}\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_B(k)x^k}{k!}=S_x(B)$.

Si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $A\subset B$: $\forall x\in\,]0,+\infty[,\ S_x(A)\leq S_x(B)$.

c) Soient A et B deux parties disjointes de $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{1}_{A\cup B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_{A\cap B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\underbrace{\mathbb{1}_\emptyset}_{=0}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B.$$

Alors $\forall k\in\mathbb{N},\ \dfrac{\mathbb{1}_{A\cup B}(k)x^k}{k!}=\dfrac{\mathbb{1}_A(k)x^k}{k!}+\dfrac{\mathbb{1}_B(k)x^k}{k!}$.

Donc $S_x(A\cup B)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_{A\cup B}(k)x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_A(k)x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_B(k)x^k}{k!}=S_x(A)+S_x(B)$.

$S_x(A\cup B)=S_x(A)+S_x(B)$ lorsque A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}$.

d) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{1}_\phi(k)=0$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(k)=1$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $S_x(\phi)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{0 \times x^k}{k!}=0$ et $S_x(\mathbb{N})=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1\times x^k}{k!}=e^x$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $S_x(\phi)=0$ et $S_x(\mathbb{N})=e^x$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{1}_{\{p\}}(k)=\begin{cases}1 \text{ si } k=p\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $S_x(\{p\})=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_{\{p\}}(k)\, x^k}{k!}=\frac{x^p}{p!}$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $S_x(\{p\})=\frac{x^p}{p!}$ et ceci pour tout $p \in \mathbb{N}$.

(Q3) Dans toute cette question $x \in]0, \ln 2[$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\varphi : x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(k)}=\varphi$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(k)}(0)=\varphi(0)=1$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre n à φ donne :

$$\left|\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)\right| \leq \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{t\in[0,x]}\left|\varphi^{(n+1)}(t)\right| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\max_{t\in[0,x]} e^t=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x.$$

$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x.$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\right|=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|=\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\leq\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x=\frac{x^n}{n!}\,\frac{x}{n+1}e^x.$$

1er cas : $n \geq 1$. Alors $\frac{x}{n+1}e^x \leq \frac{x}{2}e^x < x < \ln 2 < 1$.
($0<x<\ln 2$ donc $x>0$ et $e^x<2$)

Ainsi $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}<\frac{x^n}{n!}$.

2ème cas : $n=0$

$x<\ln 2$ donc $e^x<2$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}-1=e^x-1<2-1=1=\frac{x^0}{0!}=\frac{x^n}{n!}.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^n}{n!}$.

b) Soit A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}$.

• Supposons que $A \neq \emptyset$ et que $n = \min(A \cup B) \in A$.

$\forall k \in A \cup B$, $n \leq k$. Donc $\forall k \in B$, $n \leq k$. Or $n \in A$ et $A \cap B = \emptyset$ donc $n \notin B$.

Ainsi $\forall k \in B$, $n+1 \leq k$. donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $k \notin B$. $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{1}_B(k) = 0$.

$$S_x(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_B(k) x^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_B(k) x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^n}{n!}.$$

$n \in A$ donc $\{n\} \subset A$. Alors $S_x(\{n\}) \leq S_x(A)$. Ainsi $\frac{x^n}{n!} \leq S_x(A)$.

Finalement $S_x(B) < \frac{x^n}{n!} \leq S_x(A)$. Retenons que $S_x(B) \neq S_x(A)$!

• Ici on a toujours $A \cap B = \emptyset$ et on suppose que $S_x(A) = S_x(B)$.

Montrons par l'absurde que $A \cup B = \emptyset$. Supposons que $A \cup B \neq \emptyset$.

$A \cup B$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Posons $n = \min(A \cup B)$.

1er cas.. $n \in A$. Alors $A \neq \emptyset$ et $n = \min(A \cup B) \in A$.

Ce qui précède donne $S_x(B) \neq S_x(A)$. Ce qui n'est pas.

2e cas.. $n \in B$. Alors $B \neq \emptyset$ et $n = \min(A \cup B) \in B$.

Ce qui précède donne $S_x(A) \neq S_x(B)$. Ce qui n'est pas.

Ainsi $A \cup B = \emptyset$. Alors $A = B = \emptyset$.

Si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}$ telles que $S_x(A) = S_x(B)$: $A = B = \emptyset$.

c) Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $S_x(A) = S_x(B)$. Montrons que $A = B$.

Posons $A' = A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{A \cap B}$ et $B' = B \setminus (A \cap B) = B \cap (\overline{A \cap B})$.

Observons que : 1) $A' \cap B' = \emptyset$;

2) $A = A' \cup (A \cap B)$ et $A' \cap (A \cap B) = \emptyset$;

3) $B = B' \cup (A \cap B)$ et $B' \cap (A \cap B) = \emptyset$.

Alors $S_x(A) = S_x(A') + S_x(A \cap B)$ et $S_x(B) = S_x(B') + S_x(A \cap B)$ (d'après q 2 c)).

Comme $S_x(A) = S_x(B)$: $S_x(A') = S_x(B')$.

Or $A' \cap B' = \emptyset$ donc b) montre que $A' = B' = \emptyset$.

Alors $A = A \cap B$ et $B = A \cap B$ donc $A = B$. Ainsi $S_x(A) = S_x(B)$ donne $A = B$.

<u>L'application "$A \mapsto S_x(A)$" de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, qui à toute partie A de $\mathbb{N}$ associe $S_x(A)$, est injective.</u>

R..

Question 1 **HEC 2012-1-S7** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $]0,1]$.

On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $X_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} U_i^{\frac{1}{n}}$ et $Y_n = (e\,X_n)^{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $(\ln Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Question de cours. *Définition et proppriétés des fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\ln Y_n = \ln\left((eX_n)^{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}\,[\ln e + \ln X_n] = \sqrt{n}\,[1 + \ln \prod_{i=1}^{n} U_i^{1/n}]$

$\ln Y_n = \sqrt{n}\left[1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln U_i\right] = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln U_i + n\right] = \frac{S_n + n}{\sqrt{n}}$ où $S_n = \sum_{i=1}^{n} \ln U_i$.

Posons $T = \ln U_1$. Utilisons le théorème de transfert pour montrer l'existence de $E(T)$ et $V(T)$ et les calculer.

Posons $\forall t \in]0,1]$, $f(t) = 1$ et $\forall t \in \mathbb{R} -]0,1]$, $f(t) = 0$.

- f est une densité de U_1 ;
- U_1 prend ses valeurs dans $]0,1]$;
- $\ln$ est continue sur $]0,1]$;

Alors $E(\ln U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ est absolument convergente.

$t \mapsto \ln t\, f(t)$ est continue sur $]0,1]$.

$\forall \varepsilon \in]0,1]$, $\int_\varepsilon^1 \ln t\, f(t)\,dt = \int_\varepsilon^1 \ln t\,dt = [t\ln t - t]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon$.

$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln t\, f(t)\,dt = -1$. Donc $\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ converge et vaut -1

Alors $\int_0^1 -\ln t\, f(t)\,dt$ converge également donc $\int_0^1 |\ln t\, f(t)|\,dt$ converge.

$\int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt$ converge absolument donc $E(\ln U_1)$ existe.

$E(T)$ existe et $E(T) = E(\ln U_1) = \int_0^1 \ln t\, f(t)\,dt = -1$.

$T^2 = (\ln U_1)^2 = \ln^2 U_1$.

- f est une densité de U_1
- U_1 prend ses valeurs dans $]0,1]$
- $\ln^2$ est continue sur $]0,1]$.

Alors $E(\ln^2 U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln^2 t\, f(t)\,dt$ est absolument convergente.

$\forall t \in]0,1]$, $\ln^2 t\, f(t) = \ln^2 t \geq 0$.

Donc $E(\ln^2 U_1)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \ln^2 t\, dt$ converge.

Soit $\varepsilon \in]0,1]$. $\int_\varepsilon^1 \ln^2 t\,dt = [t \ln^2 t]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 t \times 2 \times \frac{1}{t} \times \ln t\,dt = -\varepsilon \ln^2 \varepsilon - 2\int_\varepsilon^1 \ln t\,dt$.

$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln^2 t\,dt = 0 - 2\int_0^1 \ln t\,dt = 2$. $\int_0^1 \ln^2 t\,dt$ existe et vaut 2.

Alors $E((\ln U_1)^2)$ existe et $E((\ln U_1)^2) = \int_0^1 \ln^2 t\, f(t)\,dt = \int_0^1 \ln^2 t\,dt = 2$.

$E(T^2)$ existe et vaut 2 donc $V(T)$ existe et vaut $2 - 1^2$ c'est à dire 1.

Appliquons alors le théorème de la limite centrée.

1° $(\ln U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes car $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes

2° Toutes les variables aléatoires de la suite $(\ln U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi.

3° Les variables aléatoires de cette suite ont pour espérance -1 et pour variance 1 ($1>0$!).

Alors la suite de terme général $\dfrac{\sum_{i=1}^n \ln U_i - E(\sum_{i=1}^n \ln U_i)}{\sqrt{V(\sum_{i=1}^n \ln U_i)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\sum_{i=1}^n \ln U_i = S_n$. $E(\sum_{i=1}^n \ln U_i) = \sum_{i=1}^n E(\ln U_i) = \sum_{i=1}^n (-1) = -n$.

$V(\sum_{i=1}^n \ln U_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^n V(\ln U_i)}_{\text{par indépendance}} = \sum_{i=1}^n 1 = n$.

Alors $$\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln U_i - E(\sum_{i=1}^{n} \ln U_i)}{\sqrt{V(\sum_{i=1}^{n} \ln U_i)}} = \frac{S_n - (-n)}{\sqrt{n}} = \frac{S_n + n}{\sqrt{n}} = \ln Y_n.$$

Ainsi la suite $(\ln Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

<u>Remarque</u>.. Pour calculer l'espérance et la variance de $\ln U_1$ on aurait pu remarquer que $-\ln U_1$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Ainsi $E(-\ln U_1) = \frac{1}{1}$ et $V(-\ln U_1) = \frac{1}{1^2}$.

Alors $E(\ln U_1) = -1$ et $V(\ln U_1) = 1$.

Notons qu'alors $-S_n$ suit la loi gamma de paramètre n ou la loi gamma de paramètres 1 et n...

HEC 2012 S9

Exercice principal S9

1. Question de cours : Sommes de Riemann.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n ; on effectue dans cette urne des tirages aléatoires successifs d'une boule avec remise. On note $X_1, X_2, \ldots,$ les numéros successifs obtenus et on suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note Y le rang du premier tirage pour lequel le numéro de la boule tirée est supérieur ou égal à X_1, sous réserve qu'un tel numéro existe.

2. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose : $B_k = [X_k < X_1]$.

a) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P[B_2 \cap B_3 \cap \ldots \cap B_k]$.

b) Montrer que $P\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} B_k\right) = 0$.

c) Que peut-on dire de l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels $Y(\omega)$ existe ? On admet désormais que cet ensemble est confondu avec Ω.

3.a) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a : $P[Y = m+1] = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}$.

b) Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ donnée par : $E(Y) = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

4. On ne considère plus l'entier n fixé et on note désormais $Y^{(n)}$ la variable aléatoire notée précédemment Y.

a) Calculer pour tout entier $m \geqslant 1$, $\lim_{n \to +\infty} P[Y^{(n)} = m+1]$.

b) En déduire que la suite $(Y^{(n)})_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire discrète qui n'a pas d'espérance.

$n \geqslant 2$!

Exercice sans préparation S9

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $U = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.

On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer les valeurs propres de A.

2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A n'est pas nécessairement diagonalisable.

HEC 2012 S9 Correction de l'exercice.

(Q1) f est une fonction numérique continue sur le segment $[a,b]$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\times\frac{b-a}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\times\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(t)\,dt$$

Si $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ on a encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=p}^{n-q}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(t)\,dt$

Remarque .. La dernière somme écrite est définie pour n assez grand.

soit $k\in[\![2,+\infty[\![$

(Q2) a) Posons pour simplifier les écritures $S_\ell=B_2\cap B_3\cap\dots\cap B_\ell$. $(\{X_1=i\})_{1\leq i\leq n}$ est un système complet d'évènements. La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$P(S_\ell)=\sum_{i=1}^{n}P(\{X_1=i\}\cap S_\ell)=\sum_{i=1}^{n}P(\{X_1=i\}\cap\{X_2<X_1\}\cap\dots\cap\{X_\ell<X_1\}).$$

$$P(S_\ell)=\sum_{i=1}^{n}P(\{X_1=i\}\cap\{X_2<i\}\cap\dots\cap\{X_\ell<i\})\underset{\uparrow}{=}\sum_{i=1}^{n}P(X_1=i)P(X_2<i)\cdots P(X_\ell<i)$$

$X_1,X_2,\dots,X_\ell$ sont indépendantes car les tirages se font avec remise.

Or pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, X_j suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

Donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $P(X_1=i)=\frac{1}{n}$ et $\forall j\in[\![2,k]\!]$, $P(X_j<i)=\frac{i-1}{n}$.

Donc $\displaystyle P(S_\ell)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}.$ $\quad\underline{\displaystyle P(B_2\cap B_3\cap\dots\cap B_\ell)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}}$

b) Le corollaire du théorème de la limite monotone indique que $\displaystyle P\left(\bigcap_{\ell=2}^{+\infty}B_\ell\right)=\lim_{k\to+\infty}P\left(\bigcap_{\ell=2}^{k}B_\ell\right).$

Alors $\displaystyle P\left(\bigcap_{\ell=2}^{+\infty}B_\ell\right)=\lim_{k\to+\infty}P(B_2\cap B_3\cap\dots\cap B_k)=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\right).$

Or pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\left|\frac{i-1}{n}\right|<1$ donc pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}=0.$

Ainsi $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\right)=0$. Donc $\displaystyle P\left(\bigcap_{\ell=1}^{+\infty}B_\ell\right)=0.$

Ou $\displaystyle P\left(\bigcap_{\ell=2}^{+\infty}B_\ell\right)=0.$

c) Posons $S=\{\omega\in\Omega\mid Y(\omega)\text{ existe}\}$. $\overline{S}=\{\omega\in\Omega\mid\forall k\in[\![2,+\infty[\![,\ X_k(\omega)<X_1(\omega)\}$.

$\bar{S} = \{\omega \in \Omega \mid \forall k \in [\![2, +\infty[\![, \omega \in B_k\} = \bigcap_{k=2}^{+\infty} B_k$.

Alors $\bar{S}$ est un événement de probabilité nulle.

Donc S est un événement de probabilité égale à 1. S est un événement presque sûr.

<u>$\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega)$ finie$\}$ est un événement presque sûr.</u>

(Q3) <u>a)</u> Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. $n+1 \geqslant 3$. La formule des probabilités totales donne, avec le système complet d'événements $(\{X_1 = j\})_{j \in [\![1,n]\!]}$: $P(Y = n+1) = \sum_{j=1}^{n} P(\{X_1 = j\} \cap \{Y = n+1\})$.

$P(Y = n+1) = \sum_{j=1}^{n} P(\{X_1 = j\} \cap \{X_2 < j\} \cap \ldots \cap \{X_n < j\} \cap \{X_{n+1} \geqslant j\})$. Par indépendance il vient :

$$P(Y = n+1) = \sum_{j=1}^{n} P(X_1 = j)\, P(X_2 < j) \cdots P(X_n < j)\, P(X_{n+1} \geqslant j).$$

$$P(Y = n+1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \times \left(\frac{j-1}{n}\right)^{n-1} \left(\frac{n-(j-1)}{n}\right) \underset{i=j-1}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^{n-1} \left(\frac{n-i}{n}\right).$$

$$\underline{P(Y = n+1) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{n-1} \text{ pour tout } n \in [\![3, +\infty[\![.}$$

$$P(Y = 1+1) = P(Y = 2) = \sum_{j=1}^{n} P(\{X_1 = j\} \cap \{Y = 2\}) = \sum_{j=1}^{n} P(\{X_1 = j\} \cap \{X_2 \geqslant j\})$$

$$P(Y = 1+1) = P(Y = 2) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} P(X_1 = j)\, P(X_2 \geqslant j)}_{\text{Indépendance de } X_1 \text{ et } X_2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{n-(j-1)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{n}.$$

$$\underline{P(Y = 2) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)}$$

Si l'on accepte de dire que $0^0 = 1$ on peut dire que :

$$\underline{\forall m \in [\![1, +\infty[\![, \quad P(Y = n+1) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{n-1}.}$$

<u>Remarque</u>.. $P(Y = 2) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$. <u>$P(Y = 2) = \frac{n+1}{2n}$.</u>

b] $E(Y)$ existe si la série de terme général $(n+1)P(Y=n+1)$ est absolument convergente.
Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)P(Y=n+1) \geqslant 0$. Ainsi $E(Y)$ existe si la série de terme général $(n+1)P(Y=n+1)$ ou $nP(Y=n+1)+P(Y=n+1)$ converge.
Or la série de terme général $P(Y=n+1)$ converge. Ainsi $E(Y)$ existe dès que la série de terme général $nP(Y=n+1)$ converge.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $nP(Y=n+1) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) \underbrace{n\left(\frac{i}{n}\right)^{n-1}}_{\text{dérivée}}$.

Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\left|\frac{i}{n}\right| < 1$ donc la série géométrique dérivée $n\left(\frac{i}{n}\right)^{n-1}$ est convergente.

Alors la série de terme général $nP(Y=n+1)$ est convergente comme combinaison linéaire de n séries convergentes.

Ceci achève de montrer que $E(Y)$ existe.

Notons que $\sum_{n=1}^{+\infty} nP(Y=n+1) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(1-\frac{i}{n}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{i}{n}\right)^{n-1}\right]$ (la somme d'une combinaison linéaire de séries convergentes est la combinaison linéaire des sommes).

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} nP(Y=n+1) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{i}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\frac{n-i}{n}} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n-i} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$.

Avec la convention proposée dans Q2 c] $Y(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

Alors $E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)P(Y=n+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(Y=n+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n+1)$ (les deux séries convergent).

$E(Y) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} + 1$. $\quad \underline{\underline{E(Y) = 1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}}}$.

Q4 a] Soit $m \in [\![1, +\infty[\![$. $\quad \forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $P(Y^{(n)} = m+1) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}$.

Posons $\forall t \in [0,1]$, $f_m(t) = (1-t)t^{m-1}$.

f_m est continue sur $[0,1]$. Q1 donne alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{1-0}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_m\left(0 + i\frac{1-0}{n}\right) = \int_0^1 f_m(t)\,dt$.

donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_m\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f_m(t)\,dt = \int_0^1 (1-t)t^{m-1}\,dt = \left[\frac{t^m}{m} - \frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$.

Alors $\underline{\underline{\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}}}$.

Ainsi $\forall n \in [\![1,+\infty[\![$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Y^{(n)}=n+1)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$.

b) Notons que $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Y^{(n)}=k)=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

Posons $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $g(k)=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.

1) $[\![2,+\infty[\![$ est dénombrable.

2) $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $g(k)=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{1}{(k-1)k}\in[0,1]$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=2}^{n} g(k)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$. Ainsi la série de terme général $g(k)$ converge et $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} g(k)=1$.

Par conséquent g est la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

$(Y^{(n)})_{n\geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire discrète Z dont la loi de probabilité est g.

$kg(k)=\frac{1}{k-1}$ pour tout k dans $[\![2,+\infty[\![$. Alors la série de terme général $kg(k)$ diverge. Ainsi Z n'a pas d'espérance.

R..

Question 2 **HEC 2012-2-S9** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit $U = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On suppose $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

Q1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer les valeurs propres de A

Q2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A n'est pas nécessairement diagonalisable.

Question de cours. *Sommes de Riemann.*

Q1 Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A est symétrique donc <u>A est diagonalisable</u>.

qui peut le plus peut le moins. Pour donner plus d'épaisseur à Q2 nous allons chercher les valeurs propres de A dans le cas général c'est à dire avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notons $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour tout j dans $[\![1, n]\!]$ notons $C_j(A)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1(A), C_2(A), \ldots C_n(A)) = \dim \operatorname{Vect}\left(a_1 E_n, a_2 E_n, \ldots, a_{n-1} E_n, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right)$.

Comme $a_1 \neq 0$: $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}\left(E_n, a_2 E_n, \ldots, a_{n-1} E_n, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right) = \dim \operatorname{Vect}\left(E_n, \sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right)$.

Finalement $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(E_n, V)$ avec $V = \sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} a_k E_k$. Montrons que (E_n, V) est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\alpha E_n + \beta V = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

$\alpha E_n + \sum_{k=1}^{n-1} \beta a_k E_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. La liberté de $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ donne : $\alpha = \beta a_1 = \beta a_2 = \cdots = \beta a_{n-1} = 0$.

Comme $a_1 \neq 0$: $\alpha = \beta = 0$. Ceci achève de montrer que (E_n, V) est libre.

Alors $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(E_n, V) = 2 < n$. A n'est pas inversible donc <u>0 est valeur propre de A</u>.

De plus <u>$\dim SEP(A, 0) = n - \operatorname{rg} A = n - 2$</u>.

<u>0 est valeur propre de A et $\dim SEP(A, 0) = n - 2$</u>. Cherchons les valeurs propres non nulles de A. Soit $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} a_1 x_n = \lambda x_1 \\ a_2 x_n = \lambda x_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n-1} x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \dfrac{a_k}{\lambda} x_n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i \times \frac{a_i}{\lambda} x_n + a_n x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \dfrac{a_k}{\lambda} x_n \\ \text{et} \\ \left(\lambda^2 - a_n \lambda - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2\right) x_n = 0 \end{cases}$$

1er cas.. $\lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$.

Alors $AX = \lambda X \iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \dfrac{a_k}{\lambda} x_n \\ \text{et} \\ x_n = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \iff X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Donc λ n'est pas valeur propre de A.

2ième cas.. $\lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$.

$AX = \lambda X \iff \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \dfrac{a_k}{\lambda} x_n$.

$X_0 = \begin{pmatrix} a_1/\lambda \\ a_2/\lambda \\ \vdots \\ a_{n-1}/\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX_0 = \lambda X_0$. De plus $AX = \lambda X \iff X = x_n X_0$.

Ainsi λ est valeur propre de A et $SEP(A, \lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a_1/\lambda \\ a_2/\lambda \\ \vdots \\ a_{n-1}/\lambda \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi
- 1) les sous-espaces propres associés à des valeurs propres non nulles de A, s'il en existe, sont des droites vectorielles
- 2) Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda \in \mathrm{sp}\, A \iff \lambda^2 - a_n\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$ (1)

Supposons de nouveau que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. (1) $\iff \left(\lambda - \dfrac{a_n}{2}\right)^2 = \dfrac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2$.

(1) $\iff \lambda = \dfrac{a_n}{2} + \sqrt{\dfrac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$ ou $\lambda = \dfrac{a_n}{2} - \sqrt{\dfrac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$.

$0^2 - 0 \times \lambda - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 > 0$ car $a_1 \neq 0$ donc 0 n'est pas solution de (1)

Alors $\dfrac{a_n}{2} + \sqrt{\dfrac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$ et $\dfrac{a_n}{2} - \sqrt{\dfrac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$ sont deux réels non nuls.

De plus ces réels sont distincts car $\sqrt{\dfrac{a_n^2}{4} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2} > 0$.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, A admet exactement trois valeurs propres distinctes qui sont :

$0,\ \frac{a_n}{2}+\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}$ et $\frac{a_n}{2}-\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2}$. Ceci achève Q1.

(Q2) Supposons $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

0 solution de (1) $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$.

- Si $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$ la seule solution non nulle de (1) est a_n.

Alors $Sp\,A=\{0,a_n\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,a_n)=n-2+1=n-1<n$.

Ainsi A n'est pas diagonalisable.

- Supposons $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$. 0 n'est pas solution de (1).

Le discriminant de (1) est $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2$.

1er cas : $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2=0$. (1) admet une solution et une seule : $\frac{a_n}{2}$

Alors $Sp\,A=\{0,\frac{a_n}{2}\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,\frac{a_n}{2})=n-2+1=n-1<n$.

A n'est pas diagonalisable.

2ème cas : $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$ (1) admet deux solutions distinctes λ_1 et λ_2 et ces solutions ne sont pas nulles.

Alors $Sp\,A=\{0,\lambda_1,\lambda_2\}$ et $\dim SEP(A,0)+\dim SEP(A,\lambda_1)+\dim SEP(A,\lambda_2)=n-2+1+1=n$.

A est diagonalisable.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$: A est diagonalisable si et seulement si $\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$ et $a_n^2+4\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2\neq 0$

Par exemple

pour $a_1=i$, $a_2=a_3=\dots=a_{n-1}=0$ et $a_n=2$: A n'est pas diagonalisable.

Ainsi si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, A n'est pas nécessairement diagonalisable.

Exercice principal S12

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite de densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, et de fonction de répartition Φ.

2. Montrer que X admet des moments de tous ordres et établir pour tout entier naturel n, la formule :

$$E(X^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{(2p)!}{2^p p!} & \text{si } n = 2p \text{ est pair } (p \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

3.a) Montrer que pour tout $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x) \Phi(ax) dx$ est convergente. On note alors pour tout $a > 0$: $F(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x) \Phi(ax) dx$.

b) Exprimer pour tout $a > 0$, $F(a)$ en fonction de a.

4. Soit a un réel strictement positif fixé. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2f(x)\Phi(ax)$.

a) Vérifier que g peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire Y.

b) Calculer $E(Y^2)$ et exprimer la variance $V(Y)$ en fonction de a.

Exercice sans préparation S12

Soit $E(\langle , \rangle)$ un espace euclidien et soit f un endomorphisme symétrique de E. On suppose l'existence d'une constante réelle $\alpha \geqslant 0$ telle que $\forall x \in E, \| f(x) \| = \alpha \| x \|$.
Montrer que $f^2 = \alpha^2 \, \mathrm{id}_E$.

(Q1) Soit X une variable aléatoire à densité de densité f. Soit F_X sa fonction de répartition

1° $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

2° F_X est une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$

3° $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

4° F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points

5° 2°, 3° et 4° caractérisent les fonctions de répartition des variables aléatoires à densité.

6° Si f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini D de points : F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $F_X'(x) = f(x)$.

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\lim_{x \to +\infty} (x^2 x^n f(x)) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}}{e^{x^2/2}} \right] = 0$ par croissance comparée

Alors 1° $x^n f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 2° $\forall x \in [1,+\infty[$, $x^n f(x) \geqslant 0$ et $\frac{1}{x^2} \geqslant 0$ 3° $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge.

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives

montrent que $\int_1^{+\infty} t^n f(t)\,dt$, et même $\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt$, convergent.

$t \mapsto t^n f(t)$ a la parité de n alors $\int_{-\infty}^{0} t^n f(t)\,dt$ converge également.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,dt$ converge. Notons que cette intégrale est même

absolument convergente car $t \mapsto t^n f(t)$ garde un signe constant sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0,+\infty[$.

Donc <u>pour tout $n \in \mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre n.</u>

On peut aussi dire que <u>$E(X^n)$ existe pour tout n dans $\mathbb{N}$.</u>

Soit $p \in \mathbb{N}$.

- $t \mapsto t^{2p+1} f(t)$ est impaire sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1} f(t)\,dt = 0$. $\underline{E(X^{2p+1}) = 0}$.

- $t \mapsto t^{2p} f(t)$ est paire sur $\mathbb{R}$.

Alors $E(X^{2p}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} t^{2p} f(t)\,dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2/2}\,dt$.

Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}$, $\underline{E(X^{2p}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} I_p}$ avec $I_p = \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2/2}\,dt$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t^{2p+1}$ et $v(t) = -e^{-t^2/2}$.

u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = (2p+1)t^{2p}$ et $v'(t) = te^{-t^2/2}$.

ceci justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $A \in \mathbb{R}^+$.

$$\int_0^A t^{2p+2} e^{-t^2/2}\,dt = \int_0^A t^{2p+1}(te^{-t^2/2})\,dt = \left[t^{2p+1}(-e^{-t^2/2})\right]_0^A - \int_0^A (2p+1)t^{2p}(-e^{-t^2/2})\,dt.$$

$$\int_0^A t^{2p+2} e^{-t^2/2}\,dt = -\frac{A^{2p+1}}{e^{A^2/2}} + (2p+1)\int_0^A t^{2p} e^{-t^2/2}\,dt \quad (*).$$

$\lim_{A \to +\infty} \frac{A^{2p+1}}{e^{A^2/2}} = \lim_{A \to +\infty} \left(2^{\frac{2p+1}{2}} \frac{(A^2/2)^{\frac{2p+1}{2}}}{e^{A^2/2}} \right) = 0$ par croissance comparée. En faisant

tendre A vers $+\infty$ dans $(*)$ il vient $\underline{I_{p+1} = (2p+1) I_p}$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $(2p+2) I_{p+1} = (2p+2)(2p+1) I_p = \frac{(2p+2)!}{(2p)!} I_p$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $\frac{(2p+2)!}{(2p)!} I_p = 2(p+1) I_{p+1} = 2\frac{(p+1)!}{p!} I_{p+1} = \frac{2^{p+1}(p+1)!}{2^p\, p!} I_{p+1}$.

Donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\frac{2^{p+1}(p+1)!}{(2p+2)!} I_{p+1} = \frac{2^p p!}{(2p)!} I_p$. Alors $\left(\frac{2^p p!}{(2p)!} I_p\right)$ est constante.

Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}$, $\frac{2^p p!}{(2p)!} I_p = \frac{2^0\, 0!}{(2\times 0)!} I_0 = I_0$. $\underline{\underline{\forall p \in \mathbb{N}, I_p = \frac{(2p)!}{2^p\, p!} I_0}}$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $E(X^{2p}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} I_p = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2p)!}{2^p p!} I_0 = \frac{(2p)!}{2^p p!} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} I_0 = \frac{(2p)!}{2^p p!} \underbrace{E(X^0)}_{E(X_0)=1} = \frac{(2p)!}{2^p p!}$.

$\forall p\in\mathbb{N},\quad E(X^{2p}) = \dfrac{(2p)!}{2^p\, p!}$ et $E(X^{2p+1}) = 0$.

Q3 a) Soit $a\in\,]0,+\infty[$. $x\mapsto x f(x)\phi(ax)$ est continue sur $\mathbb{R}$ ($x\mapsto x$, $x\mapsto f(x)$ et $x\mapsto \phi(ax)$ sont continues sur $\mathbb{R}$).

$\forall x\in[0,+\infty[$, $0\leq x f(x)$ et $0\leq \phi(ax)\leq 1$.

$\forall x\in[0,+\infty[$, $0\leq x f(x)\phi(ax)\leq x f(x)$. De plus $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge car $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge puisque X possède une espérance. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_0^{+\infty} x f(x)\phi(ax)\,dx$ est convergente.

b) Soit $a\in\,]0,+\infty[$. $\psi : x\mapsto \phi(ax)$ et $x\mapsto -f(x)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (ϕ et f sont C^1 sur $\mathbb{R}$).

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\psi'(x) = a\,\phi'(ax) = a\,f(ax)$ et $v'(x) = -f'(x) = x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} = x f(x)$.

Ceci justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $A\in\mathbb{R}^+$.

$$\int_0^A x f(x)\phi(ax)\,dx = \Big[-f(x)\phi(ax)\Big]_0^A - \int_0^A (-f(x))\,a\,f(ax)\,dx.$$

$$\int_0^A x f(x)\phi(ax)\,dx = f(0)\phi(0) - f(A)\phi(aA) + a\int_0^A f(x)f(ax)\,dx. \qquad (*)$$

$$\lim_{A\to+\infty}\big(f(A)\phi(aA)\big) = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-A^2/2}\phi(aA)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times 0\times 1 = 0.$$

$(*)$ montre alors que $\int_0^{+\infty} f(x)f(ax)\,dx$ converge (puisque $\int_0^{+\infty} x f(x)\phi(ax)\,dx$ converge) et que

$$\int_0^{+\infty} x f(x)\phi(ax)\,dx = \underbrace{f(0)}_{1/\sqrt{2\pi}}\ \underbrace{\phi(0)}_{1/2} + a\int_0^{+\infty} f(x)f(ax)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} + a\int_0^{+\infty} f(x)f(ax)\,dx.$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)f(ax) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{a^2x^2}{2}} = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}e^{-\frac{x^2}{2}(a^2+1)} = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ avec

$\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$.

$\sigma>0$ donc $x\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres 0 et σ^2.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt = 1$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt = \sqrt{2\pi}\,\sigma$.

Par parité $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma$.

Donc $\int_0^{+\infty} f(u)f(au)du = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sigma$.

Alors $\int_0^{+\infty} x f(x)\,\phi(ax)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(1+a\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[1+\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right]$.

$\forall a\in\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} x f(x)\phi(ax)dx$ converge et vaut $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[1+\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right]$ ... résultat qui vaut même pour $a=0$!

Q4 a) • g est continue sur $\mathbb{R}$ car f et ϕ sont continues sur $\mathbb{R}$...

• $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geqslant 0$ et $\phi(ax)\geqslant 0$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)\geqslant 0$.

• $\forall t\in\mathbb{R}$, $0\leqslant g(t)=2f(t)\phi(at)\leqslant 2f(t)$. Comme $\int_{-\infty}^{0} 2f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} 2f(t)dt$ convergent, les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\int_{-\infty}^{0} g(t)dt$ et de $\int_0^{+\infty} g(t)dt$. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge.

$\forall t\in\mathbb{R}$, $g(t)=2f(t)\phi(at)=2f(t)(1-\phi(-at))=2f(t)-2f(t)\phi(-at)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} 2f(t)dt$ converge et vaut 2.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(-at)dt$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 2-2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(-at)dt$.

$t\mapsto -t$ définit une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $t\mapsto -t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $u=-t$ dans ce qui suit.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(-at)dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(-u)\phi(au)(-du) \underset{\uparrow\, f \text{ est paire}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\phi(au)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(at)dt.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2 - 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(at)dt = 2 - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$. $2\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 2$. $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1$.

ceci achève de montrer que g est une densité de probabilité.

b) Pour gagner du temps prenons n dans $\mathbb{N}$ et montrons que Y possède un moment d'ordre n. Il s'agit de montrer que $\int_{-\infty} t^n g(t)dt$ est convergente ou absolument convergente...

$t \mapsto t^n g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\varphi(at) \leq 1$ et $2t^n f(t) \geq 0$ pour $t \in [0,+\infty[$.

• $\forall t \in [0,+\infty[$, $0 \leq |t^n g(t)| = t^n g(t) = t^n 2 f(t)\varphi(at) \leq 2t^n f(t)$.

De plus $\int_0^{+\infty} 2t^n f(t)dt$ converge car X possède un moment d'ordre n.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_0^{+\infty} |t^n g(t)|dt$ converge.

$\varphi(at) \leq 1$ et $2|t^n| \geq 0$ pour $t \in]-\infty,0]$

• $\forall t \in]-\infty,0]$, $0 \leq |t^n g(t)| = |t^n| 2f(t)\varphi(at) \leq 2|t|^n f(t) = 2(-1)^n t^n f(t)$.

De plus $\int_{-\infty}^{0} 2(-1)^n t^n f(t)dt$ converge car X possède un moment d'ordre n.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_{-\infty}^{0} |t^n g(t)|dt$ converge.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n g(t)|dt$ convergente. $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t)dt$ est absolument convergente... et convergente.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, Y possède un moment d'ordre n.

Ainsi $E(Y)$, $E(Y^2)$ et $V(Y)$ existent.

Soit $n \in \mathbb{N}$ (... pour gagner du temps).

$E(Y^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t)dt = \int_0^{+\infty} t^n g(t)dt + \int_{-\infty}^{0} t^n g(t)dt$. $t \mapsto -t$ définit une bijection strictement décroissante de $]-\infty,0[$ sur $]0,+\infty[$, de classe C^1. Cela autorise le changement de variable $u = -t$ dans ce qui suit.

R.

$$E(Y^n) = \int_0^{+\infty} t^n g(t)\,dt + \int_{+\infty}^{0} (-u)^n g(-u)(-du) = \int_0^{+\infty} t^n g(t)\,dt + (-1)^n \int_0^{+\infty} u^n g(-u)\,du .$$

$$\int_0^{+\infty} u^n g(-u)\,du = \int_0^{+\infty} t^n g(-t)\,dt = \int_0^{+\infty} 2t^n f(-t)\varphi(-at)\,dt \underset{f \text{ est paire}}{=} 2\int_0^{+\infty} t^n f(t)(1-\varphi(at))\,dt .$$

$$\int_0^{+\infty} u^n g(-u)\,du = 2\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt - \int_0^{+\infty} t^n\, 2f(t)\varphi(at)\,dt$$ car toutes les intégrales convergent.

$$\int_0^{+\infty} u^n g(-u)\,du = 2\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt - \int_0^{+\infty} t^n g(t)\,dt .$$ Alors :

$$E(Y^n) = \int_0^{+\infty} t^n g(t)\,dt + (-1)^n\left[2\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt - \int_0^{+\infty} t^n g(t)\,dt\right]$$

$$\underline{E(Y^n) = (1-(-1)^n)\int_0^{+\infty} 2t^n f(t)\varphi(at)\,dt + 2(-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt .}$$

Alors $E(Y^2) = 2\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,dt \underset{f \text{ est paire}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 1 + 0^2 = 1 .$

$$\underline{\underline{E(Y^2) = 1.}}$$

$$E(Y) = 2\int_0^{+\infty} 2t f(t)\varphi(at)\,dt - 2\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = 4F(a) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} (-t)e^{-t^2/2}\,dt$$

$\forall A \in \mathbb{R}^+$, $\int_0^A (-t)e^{-t^2/2}\,dt = \left[e^{-t^2/2}\right]_0^A = e^{-A^2/2} - 1 .$ $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A (-t)e^{-t^2/2}\,dt = -1$. $\int_0^{+\infty} (-t)e^{-t^2/2}\,dt = -1 .$

Alors $E(Y) = 4F(a) - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = 4\left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)\right) - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a^2+1}} .$

$$\underline{\underline{E(Y) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a^2+1}}}}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 1 - \frac{4a^2}{2\pi(a^2+1)} = 1 - \frac{2a^2}{\pi(a^2+1)} .$$

$\underline{\underline{V(Y) = 1 - \frac{2a^2}{\pi(a^2+1)}}}$ ... résultat qui vaut encore pour $a = 0$.

R..

Question 3 **HEC 2012-3-S12** $\boxed{\textbf{F 1}}$ **C. GRASSET**

f est un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien $(E, < .,. >)$.

On suppose l'existence d'une constante réelle α positive ou nulle telle que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \alpha\,\|x\|$.

Montrer que $f^2 = \alpha^2\ \mathrm{Id}_E$.

Question de cours *Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.*

Soit $(x,y) \in E^2$. $<x,y> = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right]$.

$<f(x),f(y)> = \frac{1}{2}\left[\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\|f(x+y)\|^2 - \alpha^2\|x\|^2 - \alpha^2\|y\|^2\right]$.

$<f(x),f(y)> = \frac{1}{2}\left[\alpha^2\|x+y\|^2 - \alpha^2\|x\|^2 - \alpha^2\|y\|^2\right] = \alpha^2\,\frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = \alpha^2 <x,y>$.

$\underline{\forall (x,y) \in E^2,\ <f(x),f(y)> = \alpha^2 <x,y>.}$ Posons $g = f^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_E$

$\forall (x,y) \in E^2,\ <g(x),y> = <f^2(x),y> - \alpha^2<x,y> = \underset{\uparrow f \text{ est symétrique}}{<f(x),f(y)>} - \alpha^2<x,y> = 0$.

$\forall x \in E, \forall y \in E, <g(x),y> = 0$. $\forall x \in E,\ g(x) \in E^\perp = \{0_E\}$. $\forall x \in E,\ g(x) = 0_E$. $g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi $f^2 - \alpha^2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\underline{\underline{f^2 = \alpha^2\mathrm{Id}_E}}$.

<u>Remarque</u>.. <u>Rapidement</u> une autre approche.

- f est symétrique donc f^2 est symétrique. Ainsi $g = f^2 - \alpha^2\mathrm{Id}_E$ est symétrique.
- $\forall x \in E,\ <g(x),x> = <f^2(x),x> - \alpha^2<x,x> = <f(x),f(x)> - \alpha^2\|x\|^2 = \|f(x)\|^2 - \alpha^2\|x\|^2 = 0$.

  $\forall x \in E,\ <g(x),x> = 0$. Ceci montre que g est antisymétrique (classique !).

Alors g est symétrique et antisymétrique donc g est l'endomorphisme nul.

On retrouve ainsi $f^2 = \alpha^2\mathrm{Id}_E$.

Exercice principal S16

1. Question de cours : Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, dans le cas où les deux variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et dans le cas où elles possèdent une densité.

2. Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent respectivement la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (d'espérance $1/\lambda$) et la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ (d'espérance $1/\mu$).

a) Donner une densité de $-Y$.

b) On pose $D = Z - Y$. Donner une densité de D.

c) Calculer $P(Y \leqslant Z)$.

Pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, strictement positives et telles que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k suit la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

3. On pose : $U = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Identifier la loi de U.

b) Soit j un entier donné de $[\![1, n]\!]$. En utilisant la variable aléatoire $Z_j = \inf_{i \in [\![1,n]\!], i \neq j} X_i$, calculer $P(U = X_j)$.

c) La variable aléatoire $X_j - U$ est-elle à densité ? discrète ?

4. On pose : $V = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $X'_j = -\dfrac{1}{\theta}\ln(1 - \mathrm{e}^{-\theta X_j})$.

a) Montrer que les variables aléatoires $X'_1, X'_2, \ldots, X'_n$ sont indépendantes et suivent chacune la même loi que les variables aléatoires X_j.

b) En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $P(V = X_i) = \dfrac{1}{n}$.

Exercice sans préparation S16

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n le polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par $P_n(X) = X^n + 1$.
Pour quelles valeurs de n, P_n est-il divisible par $X^2 + 1$?

R.

(Q1) • X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1° X+Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

2° $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X+Y=n) = \sum_{i=0}^{n} P(X=i)P(Y=n-i) = \sum_{j=0}^{n} P(X=n-j)P(Y=j)$.

• X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

f_X (resp. f_Y) est une densité de X (resp. Y).

R1 Si $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt$ (ou $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t)\,dt$) est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points : X+Y est une variable aléatoire à densité de densité h.

R2 Si f_X (resp. f_Y) est bornée : X+Y est une variable aléatoire à densité et $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt$ (ou $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t)\,dt$) en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

(Q2) Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ f_Y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $f_Z(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_Y est une densité de Y et f_Z est une densité de Z ($Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$).

a) -Y est une variable aléatoire à densité et $f_{-Y} : t \mapsto f_Y(-t)$ en est une densité

$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{-Y}(t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda t} & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) • Z et -Y sont indépendantes car Z et Y sont indépendantes.

• Z et -Y sont deux variables aléatoires à densité, de densités respectives f_Z et f_{-Y}

• $\forall t \in]-\infty, 0[,\ f_Z(t) = 0$ et $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leq f_Z(t) = \mu e^{-\mu t} \leq \mu$ donc f_Z est bornée sur $\mathbb{R}$.

Alors
1° $D = Z - Y$ est une variable aléatoire à densité.
2° $f_D : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) f_{-Y}(x-t)\,dt$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $f_D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t)\, f_{-Y}(x-t)\,dt = \int_0^{+\infty}\mu e^{-\mu t} f_{-Y}(x-t)\,dt = \int_{\max(x,0)}^{+\infty} \mu e^{-\mu t}\lambda e^{\lambda(x-t)}dt$

$f_{-Y}(x-t)=\begin{cases}0 & \text{si } x-t>0\\ \lambda e^{\lambda(x-t)} & \text{si } x-t\leq 0\end{cases}$

Notons pour simplifier les écritures $\delta=\max(x,0)$.

$f_D(x)=\lambda\mu e^{\lambda x}\int_\delta^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t}dt.$

$f_D(x)=\lambda\mu e^{\lambda x}\ \frac{1}{\lambda+\mu}\int_\delta^{+\infty}(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}dt.$

Or $\int_\delta^{+\infty}(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}dt=\lim_{A\to+\infty}\int_\delta^{A}(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}dt=\lim_{A\to+\infty}\left[-e^{-(\lambda+\mu)t}\right]_\delta^A=\lim_{A\to+\infty}\left(e^{-(\lambda+\mu)\delta}-e^{-(\lambda+\mu)A}\right)=e^{-(\lambda+\mu)\delta}$

donc $f_D(x)=\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\,e^{\lambda x}e^{-(\lambda+\mu)\delta}$. Or $e^{\lambda x}e^{-(\lambda+\mu)\delta}\underset{\delta=\max(x,0)}{=}\begin{cases}e^{\lambda x}\times 1 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ e^{\lambda x}e^{-(\lambda+\mu)x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$

Alors $f_D(x)=\begin{cases}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{\lambda x} & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\mu x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$

c) $P(Y\leq Z)=P(Z-Y\geq 0)=\int_0^{+\infty} f_D(x)dx=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_0^{+\infty}\mu e^{-\mu x}dx=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_0^{+\infty}f_Z(x)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}f_Z(x)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\times 1$

$P(Y\leq Z)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$

(Q3) a) Notons F la fonction de répartition de $X_1,X_2,\dots,X_n$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\theta x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Soit F_U la fonction de répartition de U. $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_U(x)=P(U\leq x)=1-P(U>x)=1-P(\inf(X_1,X_2,\dots,X_n)>x)$.

$F_U(x)=1-P(\{X_1>x\}\cap\{X_2>x\}\cap\dots\cap\{X_n>x\})=1-P(X_1>x)P(X_2>x)\cdots P(X_n>x)=1-(1-F(x))^n.$

$\uparrow$ $X_1,X_2,\dots,X_n$ mutuellement indépendantes.

Si $x\in\,]-\infty,0[$, $F_U(x)=1-(1-0)^n=1-1=0$. Si $x\in[0,+\infty[$, $F_U(x)=1-\left(1-\left(1-e^{-\theta x}\right)\right)^n=1-e^{-n\theta x}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F_U(x)=\begin{cases}1-e^{-n\theta x} & \text{si } x\in[0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. Plus de doute $(n\theta>0)$:

U suit la loi exponentielle de paramètre $n\theta$.

b) Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre θ.

Alors a) permet de dire que Z_j suit la loi exponentielle de paramètre $(n-1)\theta$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes donc $Z_j = \inf\limits_{i \in [\![1,n]\!] - \{j\}} X_i$ et X_j sont indépendantes

de plus X_j suit la loi exponentielle de paramètre θ.

Alors Q2 permet de dire que $P(Z_j \geqslant X_j) = \dfrac{\theta}{\theta + (n-1)\theta} = \dfrac{1}{n}$.

$P(U = X_j) = P(\inf\limits_{i \in [\![1,n]\!]} X_i = X_j) = P(\{X_j \leqslant X_1\} \cap \{X_j \leqslant X_2\} \cap \dots \cap \{X_j \leqslant X_n\})$

$\{X_j \leqslant X_j\} = \Omega$!

$P(U = X_j) = P(\{X_j \leqslant X_1\} \cap \dots \cap \{X_j \leqslant X_{j-1}\} \cap \{X_j \leqslant X_{j+1}\} \cap \dots \cap \{X_j \leqslant X_n\})$

$P(U = X_j) = P(X_j \leqslant \inf\limits_{i \in [\![1,n]\!] - \{j\}} X_i) = P(X_j \leqslant Z_j) = P(Z_j \geqslant X_j) = \dfrac{1}{n}$.

$\underline{\underline{P(U = X_j) = \dfrac{1}{n}}}$.

c) $P(X_j - U = 0) = P(U = X_j) = \frac{1}{n} \neq 0$. Ainsi $\underline{\underline{X_j - U \text{ n'est pas une variable aléatoire à densité}}}$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $P(X_j - U = x) = 0$ car $\forall \omega \in \Omega$, $(X_j - U)(\omega) \geqslant 0$

Soit $x \in]0, +\infty[$.

$\forall \omega \in \Omega,\ X_j(\omega) - X_j(\omega) = 0 \neq x$

$P(X_j - U = x) = P(X_j - \inf(X_1, X_2, \dots, X_n) = x) = P(X_j - \inf(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n) = x)$

$P(X_j - U = x) = P(X_j - Z_j = x) = P(Z_j - X_j = x) = 0$ car $Z_j - X_j$ est une variable aléatoire à densité.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $P(X_j - U = x) = 0$ et $P(X_j - U = 0) = \frac{1}{n} < 1$ car $n \geqslant 2$.

Ainsi $\underline{\underline{X_j - U \text{ n'est pas une variable aléatoire discrète}}}$.

(Q4) a] Notons que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $P(X_j>0)=1$.

donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $P(1-e^{-\theta X_j}>0)=1$. cela justifie l'introduction de $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$ ma !

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes alors $-\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta X_1}), -\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta X_2}), \dots, -\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta X_n})$ sont indépendantes.

Ainsi $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$ sont indépendantes.

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$P(X'_j \leq x) = P(-\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta X_j}) \leq x) = P(\ln(1-e^{-\theta X_j}) \geq -\theta x) = P(1-e^{-\theta X_j} \geq e^{-\theta x})$.

$P(X'_j \leq x) = P(e^{-\theta X_j} \leq 1-e^{-\theta x})$

1er cas.. $x \leq 0$. Alors $1-e^{-\theta x} \leq 0$. donc $P(X'_j \leq x)=0$.

2ème cas.. $x>0$. alors $1-e^{-\theta x}>0$.

$P(X'_j \leq x) = P(-\theta X_j \leq \ln(1-e^{-\theta x})) = P(X_j \geq -\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta x}))$.

$P(X'_j \leq x) = 1-P(X_j < -\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta x})) = 1-P(X_j \leq -\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta x}))$

↑ X_j est une variable aléatoire à densité.

$P(X'_j \leq x) = 1-\left(1-e^{-\theta\left(-\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta x})\right)}\right) = 1-1+e^{\ln(1-e^{-\theta x})} = 1-e^{-\theta x}$.

↑ $X_j \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $-\frac{1}{\theta}\ln(1-e^{-\theta x}) \in \mathbb{R}_+$ et même $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X'_j \leq x) = \begin{cases} 1-e^{-\theta x} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ou $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X'_j \leq x) = \begin{cases} 1-e^{-\theta x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi X'_j suit la loi exponentielle de paramètre θ.

Alors $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$ suivent la loi exponentielle de paramètre θ donc ont même loi que X_j et ceci pour tout j dans $[\![1,n]\!]$.

b) $j \in [\![1,n]\!]$. D'après a) : $\frac{1}{n} = P(U = X_j) = P(\mathrm{Inf}(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_j) = P(\mathrm{Inf}(X'_1, X'_2, \dots, X'_n) = X'_j)$

Soit $\omega \in \Omega$. $\omega \in \{\mathrm{Inf}(X'_1, X'_2, \dots, X'_n) = X'_j\}$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!],\ X'_j(\omega) \leq X'_k(\omega)$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!],\ -\frac{1}{\theta} \ln(1 - e^{-\theta X_j(\omega)}) \leq -\frac{1}{\theta} \ln(1 - e^{-\theta X_k(\omega)})$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \ln(1 - e^{-\theta X_j(\omega)}) \geq \ln(1 - e^{-\theta X_k(\omega)})$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!],\ 1 - e^{-\theta X_j(\omega)} \geq 1 - e^{-\theta X_k(\omega)}$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!],\ e^{-\theta X_k(\omega)} \geq e^{-\theta X_j(\omega)}$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!],\ -\theta X_k(\omega) \geq -\theta X_j(\omega)$

$\Updownarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!],\ X_k(\omega) \leq X_j(\omega)$

$\Updownarrow$ $\omega \in \{\mathrm{Sup}(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_j\}$

$\Updownarrow$ $\omega \in \{V = X_j\}$

Donc $\{\mathrm{Inf}(X'_1, X'_2, \dots, X'_n) = X'_j\} = \{V = X_j\}$.

Alors $\frac{1}{n} = P(\mathrm{Inf}(X'_1, X'_2, \dots, X'_n) = X'_j) = P(V = X_j)$.

Donc $P(V = X_j) = \frac{1}{n}$ et ceci pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

<u>Remarque</u>.. Ça aurait été plus vite en remarquant que $x \mapsto -\frac{1}{\theta} \ln(1 - e^{-x\theta})$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ ...

R..

Question 4 **HEC 2012-4-S16** $\boxed{\text{F } 1^-}$ **P. KONIECZNY**

$n \in [\![2, +\infty[\![$. On considère le polynôme P_n de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par $P_n = X^n + 1$.

Pour quelles valeurs de n, P_n est-il divisible par $X^2 + 1$?

Question de cours. Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, dans le cas où les deux variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ *et dans le cas où elles possèdent une densité.*

$X^2+1=(X-i)(X+i)$. donc X^2+1 divise P_n si et seulement si i et $-i$ sont racines de P_n.

or $\forall z \in \mathbb{C}$, $P_n(\bar{z}) = \bar{z}^n + 1 = \overline{z^n} + 1 = \overline{z^n+1} = \overline{P_n(z)}$. donc si z est racine de P_n alors $\bar{z}$ est racine de P_n. Ainsi X^2+1 divise P_n si et seulement si i est racine de P_n autrement dit si et seulement si $i^n = -1$.

soit r le reste dans la division par 4 de n. $r \in \{0,1,2,3\}$ et $\exists q \in \mathbb{N}$, $n = 4q+r$.

$i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q i^r = 1^q i^r = i^r = \begin{cases} 1 \text{ si } r=0 \\ i \text{ si } r=1 \\ -1 \text{ si } r=2 \\ -i \text{ si } r=3 \end{cases}$. donc $i^n = -1 \iff r = 2$.

<u>X^2+1 divise P_n si et seulement si le reste dans la division de n par 4 est 2.</u>

<u>X^2+1 divise $P_n \iff n \equiv 2\ [4]$.</u>