

Sujet S 1163 - Exercice

- 1) Question de cours : Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ ($n \geq 2$). Donner un exemple d'une fonction non continue sur $\mathbb{R}^2$.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 . On définit la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt & \text{si } x \neq y \\ f(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

- 2) Exemple.

Dans cette question seulement, on suppose que f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

Déterminer la fonction g correspondante et montrer que g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

- 3) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$. Montrer que g est de classe C^1 sur D et calculer ses dérivées partielles du premier ordre sur D .
- 4) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que g admet des dérivées partielles du premier ordre en (a, a) et les exprimer en fonction de $f'(a)$, où f' désigne la dérivée de f .
- 5) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in D$.
- a) Montrer que :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) = \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y (y-t) (f'(t) - f'(a)) dt.$$

- b) En déduire que : $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| \leq \frac{1}{2} \sup \{ |f'(t) - f'(a)|, t \in S \}$ où S désigne le segment d'extrémités x et y .

- 6) Dédurre des questions précédentes que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Sujet S 1163 - Exercice sans préparation

Un joueur effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce qui donne Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $q = 1 - p$, $p \in]0, 1[$.

On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit la variable aléatoire N égale au rang d'apparition du premier Pile s'il existe et égale à 0 si Pile n'apparaît jamais.

On définit une variable aléatoire X de la façon suivante :

Si $N = n > 0$, le joueur dispose dans une urne n boules numérotées de 1 à n ; Il tire une boule de cette urne et X prend comme valeur le numéro de la boule tirée ;

Si $N = 0$, on pose $X = 0$.

- 1) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ sous forme de somme.

- 2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{p}{q} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^q \left(\sum_{n=k}^M t^{n-1} \right) dt$.

- 3) Etudier la limite de $\int_0^q \frac{t^M}{1-t} dt$ lorsque M tend vers $+\infty$. Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$.

(Q1) Soit une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. $A \in D_f$.

fonction continue en A si $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A)$.

fonction continue en A si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall X \in D_f, \|X - A\| < \eta \Rightarrow |f(X) - f(A)| < \varepsilon$.

• Posons $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Supposons que fonction continue en $A = (0, 0)$. Alors $\lim_{(x, y) \rightarrow A} f(x, y) = f(A) = 0$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = t$ et $v(t) = t$.

$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \lim_{t \rightarrow 0} v(t) = 0$. Alors par compatibilité $\lim_{t \rightarrow 0} f(u(t), v(t)) = 0$.

Or $\lim_{t \rightarrow 0} f(u(t), v(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \neq 0$!

Remarque.. $(x, y) \rightarrow \frac{xy}{x^2 + y^2}$ n'a pas de limite en $A = (0, 0)$ donc n'est pas prolongeable par continuité en A .

(Q2) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

supposons $x \neq y$. $g(x, y) = \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt = \frac{1}{y-x} \int_x^y t^2 dt = \frac{1}{y-x} \left[\frac{t^3}{3} \right] = \frac{y^3 - x^3}{3(y-x)} = \frac{1}{3} (x^2 + xy + y^2)$.

Si $x = y$: $g(x, y) = f(x) = x^2 = \frac{1}{3} (x^2 + xy + y^2) = \frac{1}{3} (x^2 + xy + y^2)$.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = \frac{1}{3} (x^2 + xy + y^2)$

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Si g admet un extremum local en un point A de $\mathbb{R}^2$, $\nabla g(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Recherchons les points critiques de g.

soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\nabla g(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(X) = \frac{\partial g}{\partial y}(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} (2x + y) = 0 \\ \frac{1}{3} (x + 2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 0 = x - 4x = -3x \end{cases}$

$\nabla g(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow x = y = 0$. $O = (0, 0)$ est le seul point critique de g.

$\forall X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(X) - g(O) = \frac{1}{3} (x^2 + xy + y^2) = \frac{1}{3} \left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + y^2 \right) = \frac{1}{3} \left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} y^2 \right) \geq 0$.

$\forall X \in \mathbb{R}^2, g(X) \geq g(O)$. g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ qui vaut 0 et

atteint en le seul point $O = (0, 0)$.

Q3) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Fat de classe $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}$. $\forall (u, y) \in D$, $g(u, y) = \frac{F(y) - F(u)}{y - u}$
 $(u, y) \rightarrow x$ et $(u, y) \rightarrow y$ sat de classe $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et Fat de classe $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par composition $(u, y) \rightarrow F(x)$ et $(u, y) \rightarrow F(y)$ sat de classe $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

Par différence $(u, y) \rightarrow F(y) - F(u)$ at de classe $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ dac sur D .

$(x, y) \rightarrow \frac{1}{y-x}$ at de classe $\mathcal{B}^1$ sur D comme fonction rationnelle.

Par produit $(u, y) \rightarrow \frac{F(y) - F(u)}{y - u}$ at de classe $\mathcal{B}^1$ sur D .

A $\forall (u, y) \in D$, $g(u, y) = \frac{1}{y-u} \int_u^y f(t) dt = \frac{F(y) - F(u)}{y-u}$. g at de classe $\mathcal{B}^1$ sur D .

Soit $(u, y) \in D$, $\frac{\partial g}{\partial u}(u, y) = -\frac{1}{(y-u)^2} (F(y) - F(u)) + \frac{1}{y-u} (-f(u))$.

$\forall (u, y) \in D$, $\frac{\partial g}{\partial u}(u, y) = -\frac{1}{(y-u)^2} \int_u^y f(t) dt - \frac{f(u)}{y-u}$.

$\forall (u, y) \in D$, $\frac{\partial g}{\partial y}(u, y) = -\frac{1}{(y-u)^2} (F(y) - F(u)) + \frac{1}{y-u} f(y) = -\frac{1}{(y-u)^2} \int_u^y f(t) dt + \frac{f(y)}{y-u}$.

Q4) a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $A = (a, a)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g_{A,1}(x) = g(x, a) = \begin{cases} \frac{1}{a-x} \int_x^a f(t) dt & \text{si } x \neq a \\ f(a) & \text{si } x = a \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}$, $\frac{g_{A,1}(x) - g_{A,1}(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt - f(a)}{x-a} = \frac{1}{(x-a)^2} [F(x) - F(a) - (x-a)f(a)]$

Fat de classe $\mathcal{B}^2$ sur $\mathbb{R}$ dac

$F(x) = F(a) + (x-a)F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} F''(a) + o((x-a)^2)$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a) - (x-a)F'(a) - \frac{(x-a)^2}{2} F''(a)}{(x-a)^2} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{(x-a)^2} [F(x) - F(a) - (x-a)F'(a)] - \frac{1}{2} F''(a) \right) = 0$.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_{A,1}(x) - g_{A,1}(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^2} [F(x) - F(a) - (x-a)F'(a)] = \frac{1}{2} F''(a) = \frac{1}{2} f'(a).$$

$$\text{Ainsi } \frac{\partial g}{\partial x}(A) \text{ existe et vaut } \frac{1}{2} f'(a).$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \text{ existe et vaut } \frac{1}{2} f'(a).$$

$$\text{De même } \forall a \in \mathbb{R}, \frac{\partial g}{\partial y}(a, a) \text{ existe et vaut } \frac{1}{2} f'(a).$$

Q5 a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in D$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) = \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y f(t) dt - \frac{f(a)}{y-x} - \frac{1}{2} f'(a) = \frac{1}{(y-x)^2} \left[\int_x^y f(t) dt - (y-x)f(a) - \frac{1}{2} f'(a)(y-x)^2 \right]$$

En intégrant par parties a deux fois :

$$\int_x^y (y-t)(f'(t) - f'(a)) dt = \int_x^y (y-t)f'(t) dt - f'(a) \int_x^y (y-t) dt = [(y-t)f(t)]_x^y - \int_x^y (y-t) dt - f'(a) \left[-\frac{(y-t)^2}{2} \right]_x^y$$

$$\int_x^y (y-t)(f'(t) - f'(a)) dt = -(y-x)f(x) + \int_x^y f(t) dt - \frac{(y-x)^2}{2} f'(a)$$

$$\int_x^y (y-t)(f'(t) - f'(a)) dt = \int_x^y f(t) dt - (y-x)f(x) - \frac{(y-x)^2}{2} f'(a).$$

$$\text{Ainsi } \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) = \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y (y-t)(f'(t) - f'(a)) dt.$$

b) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in D$.

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| = \frac{1}{(y-x)^2} \left| \int_x^y (y-t)(f'(t) - f'(a)) dt \right|.$$

$$\text{Pecar } x < y. \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| \leq \frac{1}{(y-x)^2} \int_x^y (y-t) |f'(t) - f'(a)| dt$$

↓ $y-t \geq 0$ et $t \in [x, y]$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| \leq \frac{1}{(y-x)^2} \max_{t \in [x, y]} |f'(t) - f'(a)| \int_x^y (y-t) dt \text{ car } x \leq y.$$

$$\text{Or } \int_x^y (y-t) dt = \left[-\frac{(y-t)^2}{2} \right]_x^y = \frac{(y-x)^2}{2}.$$

$$\text{Alors } \left| \frac{\partial g}{\partial u}(u, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| \leq \frac{1}{(y-x)^2} \max_{t \in [x, y]} |f'(t) - f'(a)| \frac{(y-x)^2}{2} = \frac{1}{2} \max_{t \in [x, y]} |f'(t) - f'(a)|$$

2^{ème} cas... $x > y$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial u}(u, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| = \frac{1}{(y-x)^2} \left| \int_x^y (y-t)(f'(t) - f'(a)) dt \right| = \frac{1}{(y-x)^2} \left| \int_y^x (y-t)(f'(t) - f'(a)) dt \right|$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial u}(u, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| \leq \frac{1}{(y-x)^2} \int_y^x |y-t| |f'(t) - f'(a)| dt \leq \frac{1}{(y-x)^2} \max_{t \in [y, u]} |f'(t) - f'(a)| \int_y^x |y-t| dt \text{ car } y \leq u.$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial u}(u, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| \leq \frac{1}{(y-x)^2} \max_{t \in [y, u]} |f'(t) - f'(a)| \int_y^x (t-y) dt \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [y, u]} |f'(t) - f'(a)|.$$

$$\int_y^x (t-y) dt = \left[\frac{(t-y)^2}{2} \right]_y^x = \frac{(x-y)^2}{2} = \frac{(y-x)^2}{2}$$

dans les deux cas $\left| \frac{\partial g}{\partial u}(u, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| \leq \frac{1}{2} \max_{t \in \overleftrightarrow{[x, y]}} |f'(t) - f'(a)|$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et

pour tout $(u, y) \in D$.

pour passer à la question 6 aller plus loin et prouver $a \in \mathbb{R}$ et $(u, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$.

Alors $x = y$ et $\left| \frac{\partial g}{\partial u}(u, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| = \left| \frac{1}{2} f'(u) - \frac{1}{2} f'(a) \right| = \frac{1}{2} |f'(u) - f'(a)|$

Notons que $\frac{1}{2} |f'(u) - f'(a)| = \frac{1}{2} \max_{t \in \overleftrightarrow{[u, y]}} |f'(t) - f'(a)|$ car $x = y$.

Finalement $\forall a \in \mathbb{R}, \forall (u, y) \in \mathbb{R}^2, \left| \frac{\partial g}{\partial u}(u, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a, a) \right| \leq \frac{1}{2} \max_{t \in \overleftrightarrow{[u, y]}} |f'(t) - f'(a)|.$

De même $\forall a \in \mathbb{R}, \forall (u, y) \in \mathbb{R}^2, \left| \frac{\partial g}{\partial y}(u, y) - \frac{\partial g}{\partial y}(a, a) \right| \leq \frac{1}{2} \max_{t \in \overleftrightarrow{[u, y]}} |f'(t) - f'(a)|.$

Q6

1^{er} Nous avons vu que g est de classe C^1 sur $\overleftrightarrow{D}$. ^{(*) voir p. 6}

2^{ème} Nous avons vu que pour tout $a \notin D$, $\frac{\partial g}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(a)$ existent.

Il reste plus qu'à montrer la continuité de $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ sur tout $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

Soit $A = (a, a) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Montrons que $\frac{\partial g}{\partial u}$ est continue en A .

$\frac{\partial g}{\partial u}(A) = f'(a)$. Il convient donc de montrer que $\lim_{(u,y) \rightarrow A} \frac{\partial g}{\partial u}(u,y) = f'(a)$ ce que

$\lim_{(u,y) \rightarrow (a,a)} \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,y) - f'(a) \right) = 0$. D'après QS 5) pour démontrer ce résultat il suffit de

montrer que $\lim_{(u,y) \rightarrow (a,a)} \max_{t \in [\tilde{u}, \tilde{y}]} |f'(t) - f'(a)| = 0$. Montrons ce résultat en utilisant la

définition... et la continuité de f' en a .

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ Rappelons que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\max(|u|, |v|) \leq \|(u,v)\|$.

f' est continue en a . $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $|z-a| < \eta \Rightarrow |f'(z) - f'(a)| < \varepsilon$.

Soit $(u,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(u,y) - A\| < \eta$. Alors $\|(u-a, y-a)\| < \eta$

Alors $\max(|u-a|, |y-a|) \leq \|(u-a, y-a)\| < \eta$.

Ainsi $|x-a| < \eta$ et $|y-a| < \eta$. Soit $t \in [\tilde{u}, \tilde{y}]$

Supposons $x \leq y$. $x \leq t \leq y$; $u-a \leq t-a \leq y-a$; $-|u-a| \leq t-a \leq |y-a|$ (car

$x-a \geq -|x-a|$ et $y-a \leq |y-a|$). Ainsi $-\eta < -|u-a| \leq t-a \leq |y-a| < \eta$.

Dac $|t-a| < \eta$.

Supposons $x > y$. En échangeant x et y dans ce qui précède on obtient aussi $|t-a| < \eta$.

Alors $\forall t \in [\tilde{u}, \tilde{y}]$, $|t-a| < \eta$ dac $\forall t \in [\tilde{u}, \tilde{y}]$, $|f'(t) - f'(a)| < \varepsilon$.

Alors $\left| \max_{t \in [\tilde{u}, \tilde{y}]} |f'(t) - f'(a)| \right| = \max_{t \in [\tilde{u}, \tilde{y}]} |f'(t) - f'(a)| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall (u,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(u,y) - (a,a)\| < \eta \Rightarrow \left| \max_{t \in [\tilde{u}, \tilde{y}]} |f'(t) - f'(a)| \right| < \varepsilon$

Dac $\lim_{(u,y) \rightarrow (a,a)} \max_{t \in [\tilde{u}, \tilde{y}]} |f'(t) - f'(a)| = 0$. Par encadrement on a $\lim_{(u,y) \rightarrow (a,a)} \frac{\partial g}{\partial u}(u,y) = f'(a) = \frac{\partial g}{\partial u}(a,a)$

Alors $\frac{\partial g}{\partial u}$ est continue en (a,a) et ceci pour tout $a \in \mathbb{R}$. Il en est de même pour $\frac{\partial g}{\partial y}$.

Finalement $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Montrons que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}. \quad \bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}.$$

$$\text{poson } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x, y) = x - y. \quad \bar{D} = \varphi^{-1}(\{0\}).$$

φ est une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (φ est polynomiale).

Comme $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, $\varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Ainsi $\bar{D}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ donc D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Question 5 HEC 2011 S 1163

Un joueur effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce qui donne Pile avec la probabilité p et face avec la probabilité $q = 1 - p$, $p \in]0, 1[$.

On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit la variable aléatoire N égale au rang d'apparition du premier Pile s'il existe et égale à 0 si Pile n'apparaît jamais.

On définit une variable aléatoire X de la façon suivante :

Si N prend la valeur 0, X prend la valeur 0.

Si n appartient à $\mathbb{N}^*$ et si N prend la valeur n , le joueur dispose dans une urne n boules numérotées de 1 à n ; il tire une boule de cette urne et X prend la valeur de la boule tirée.

Q1. Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $P(X = k)$ sous forme de somme.

Q2. Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \frac{p}{q} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^q \sum_{n=k}^M t^{n-1} dt$.

Q3 Étudier la limite de $\int_0^q \frac{t^M}{1-t} dt$ lorsque M tend vers $+\infty$. Déterminer $P(X = 1)$.

Cours Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ ($n \geq 2$). Donner un exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout i dans $\mathbb{N}^*$ notons P_i (resp. F_i) l'événement le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile (resp. face).

$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $P(N=n) = P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n) = P(F_1)P(F_2) \dots P(F_{n-1})P(P_n) = q^{n-1}p$.
↑
 indépendance des lancers.

$$P(N=1) = P(P_1) = p = q^{1-1}p.$$

$$\text{Pour } \forall n \in \mathbb{N}^*, P(N=n) = q^{n-1}p = p q^{n-1}.$$

calculer $P(N=0)$.

$$v1 \quad P(N=0) = 1 - P(N \neq 0) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} N=n\right) \stackrel{\text{incompatibilité}}{=} 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p q^{n-1}$$

$$P(N=0) = 1 - p \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = 1 - p \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 - p \times \frac{1}{1-q} = 1 - \frac{p}{p} = 1 - 1 = 0.$$

v2 Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$.

$$\{N=0\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} S_n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n+1} \subset S_n.$$

à l'aide de la limite monotone mathématique que $P(N=0) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} S_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n)$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(S_n) = P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) = P(F_1)P(F_2) \dots P(F_n) = q^n.$$

Donc $P(N=0) = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ car $0 < q < 1$. $P(N=0) = 0$.

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}, P(N=n) = \begin{cases} pq^{n-1} & n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & n=0 \end{cases}$.

Q1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $(N=n)_{n \geq 0}$ est un système complet d'événements.

$$P(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{X=k\} \cap \{N=n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{X=k\} \cap \{N=n\})$$

$\uparrow$
 $\{X=k\} \cap \{N=0\} = \emptyset$ car $k \in \mathbb{N}^*$

$$P(X=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{(N=n)}(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} pq^{n-1}$$

$P(N=n) \neq 0 \text{ si } n \geq 1$ $\quad \quad \quad \begin{cases} 1/n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = \frac{p}{q} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{q^n}{n}$. Remarque : $P(X=0) = 0$ car $\{X=0\} = \{N=0\}$

Q2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{q^k}{k} = \sum_{k=1}^n \int_0^q t^{k-1} dt = \int_0^q \sum_{k=1}^n t^{k-1} dt.$$

Alors $P(X=k) = \frac{p}{q} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{q^n}{n} = \frac{p}{q} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=k}^n \frac{q^n}{n}$.

$P(X=k) = \frac{p}{q} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^q \sum_{n=k}^n t^{n-1} dt$ et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}^*$

Q3) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0, q]$, $0 < 1-q \leq 1-t$.

$\forall t \in [0, q]$, $0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-q}$ et $e^n > 0$.

$\forall t \in [0, q]$, $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{1}{1-q} t^n$.

En intégrant on obtient $0 \leq \int_0^q \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-q} \int_0^q t^n dt$ car $q \geq 0$.

$$\text{donc } 0 \leq \int_0^q \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-q} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^q = \frac{1}{1-q} \frac{q^{n+1}}{n+1} \stackrel{q \in]0,1[}{\leq} \frac{1}{1-q} \times \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{à la limite } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-q} \times \frac{1}{n+1} \right) = 0. \text{ Par encadrement on obtient } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^q \frac{t^n}{1-t} dt = 0.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$P(X=k) = \frac{p}{q} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^q \sum_{n=k}^n t^{n-1} dt = \frac{p}{q} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^q t^{k-1} \frac{1-t^{n-k+1}}{1-t} dt.$$

$(t \in [0, q], t \neq 1)$

$$P(X=k) = \frac{p}{q} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t} dt - \int_0^q \frac{t^n}{1-t} dt \right) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t} dt.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t} dt. \quad \uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^q \frac{t^n}{1-t} dt = 0$$

En particulier $P(X=1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{dt}{1-t} = \frac{p}{q} \left[-\ln(1-t) \right]_0^q = -\frac{p}{q} \ln(1-q) = -\frac{p}{q} \ln p.$

$$P(X=1) = -\frac{p}{q} \ln p.$$

Récurrence... Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. $\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t} dt \stackrel{u=1-t}{=} \int_1^{1-q} \frac{(1-u)^{k-1}}{u} (-du) = \int_p^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{u} du.$

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t} dt = \int_p^1 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{(-u)^i}{u} du = \int_p^1 \frac{1}{u} du + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^i \int_p^1 u^{i-1} du.$$

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t} dt = -\ln p + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{(-1)^i}{i} (1-p^i)$$

$$\text{donc } P(X=k) = -\frac{p}{q} \ln p + \frac{p}{q} \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{(-1)^i}{i} (1-p^i)$$

ou encore...

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t} dt = \int_0^q \frac{t^{k-1}-1}{1-t} dt + \int_0^q \frac{dt}{1-t}$$

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t} dt = - \int_0^q (t^{k-2} + t^{k-3} + \dots + t + 1) dt + [k(1-t)]_0^q$$

$$\int_0^q \frac{t^{k-1}}{1-t} dt = - \left[\frac{t^{k-1}}{k-1} + \frac{t^{k-2}}{k-2} + \dots + \frac{t^2}{2} + t \right]_0^q - k p = - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{q^i}{i} - k p$$

$$\text{OAC } P(X=k) = \frac{p}{q} \left[-k p - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{q^i}{i} \right].$$

Sujet S 101 - Exercice

Dans l'exercice toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles. Lorsqu'elle existe, l'espérance d'une variable aléatoire X est notée $\mathbb{E}(X)$.

- 1) Dans cette question X est une variable aléatoire discrète ou à densité.
 - a) Question de cours : Rappeler la définition de la fonction de répartition de X et en donner les principales propriétés.
 - b) On appelle médiane de X tout réel m tel que : $\mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$.
Démontrer qu'un tel réel existe toujours, mais qu'il n'est pas forcément unique.
- 2) Dans cette question X est une variable aléatoire discrète ou à densité admettant un moment d'ordre 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \mathbb{E}((X - x)^2)$.
 - a) Pour x réel, donner, en justifiant, l'expression de $f(x)$ en fonction de la variance $V(X)$ de X , de $\mathbb{E}(X)$ et de x .
 - b) Démontrer qu'il existe un unique réel x_0 en lequel la fonction f est minimale et déterminer x_0 et $f(x_0)$.
- 3) Dans cette question X est une variable aléatoire à densité et qui admet une espérance. On pose, pour x réel, $g(x) = \mathbb{E}(X - x)$ et $\varphi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \geq x)$.
 - a) Montrer que $x\mathbb{P}(X \geq x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Quel résultat analogue a-t-on au voisinage de $-\infty$?
 - b) On suppose dans cette sous-question qu'il existe une densité de X qui est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout x réel,

$$g(x) = \int_{-\infty}^x \mathbb{P}(X \leq t) dt + \int_x^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq t) dt \quad (1).$$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que la formule (1) reste valable même si aucune des densités de X n'est continue sur $\mathbb{R}$.

- c) Déterminer, pour a, b réels, une expression de $g(b) - g(a)$ sous la forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction φ .
En déduire que si m est une médiane de X , g est minimale en m .
- 4) a) Soit a un réel strictement positif. On note h la fonction de la variable réelle définie par :

$$h(x) = \int_0^{+\infty} |t - x| e^{-at} dt.$$

Déterminer le minimum de h et préciser un réel en lequel ce minimum est atteint.

- b) Répondre aux mêmes questions pour la fonction k définie par $k(x) = \int_{-1}^1 \frac{|t - x|}{1 + t^2} dt$.

Sujet S 101 - Exercice sous préparation

Dans cet exercice E désigne un espace vectoriel et p, n sont deux entiers strictement positifs.

1) Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E et x un vecteur de E .

Caractériser, en le justifiant, le fait que la famille $(e_1, \dots, e_p, x)$ soit liée.

2) Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E supposés non tous nuls. On note

$$\mathcal{A} = \{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, (x_i)_{i \in J} \text{ libre}\}$$

Soit J_0 un élément de $\mathcal{A}$ de cardinal maximal.

Que peut-on dire de $(x_i)_{i \in J_0}$ vis-à-vis de Vect $(x_1, \dots, x_n)$?

3) Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E et r le rang de cette famille.

On en extrait une famille de n' vecteurs et on note r' le rang de cette famille extraite.

Montrer que $n - r \geq n' - r'$.

HEC 2011 S101 Correction de l'exercice

Q1 a) X est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$.

la fonction de répartition de X est l'application F_X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x).$$

- P1 F_X est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$
- P2 F_X est croissante
- P3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- P4 F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

Remarque 1. P1 et P4 sont dans "P2 et P3".

2. P1, P2, P3 et P4 caractérisent les fonctions de répartition des variables aléatoires réelles. P2, P3 et P4 également ... $\blacktriangle$

- P5 $\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow 0^+} F_X(x) = P(X < a) = F_X(a) - P(X = a)$. $\leftarrow$ nous sera utile dans Q2.

b) Posons $A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq \frac{1}{2}\}$. Nous allons montrer que A possède une borne inférieure et que cette borne inférieure est une médiane de X . F_X désigne la fonction de répartition de X .

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq \frac{1}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \frac{1}{2}\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0.$$

$x \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow -\infty$

$$\text{Alors } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists B \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x > B \Rightarrow |F_X(x) - 1| < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists B' \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x < -B' \Rightarrow |F_X(x) - 0| < \varepsilon.$$

$$\text{En particulier } \exists B \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x > B \Rightarrow |F_X(x) - 1| < \frac{1}{2}.$$

$$\exists B' \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x < -B' \Rightarrow |F_X(x)| < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Posons } x_1 = A + 1 \text{ et } x_2 = -B - 1. \quad x_1 > A \text{ et } x_2 < -B \text{ donc } |F_X(x_1) - 1| < \frac{1}{2} \text{ et } |F_X(x_2)| < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Alors } -\frac{1}{2} < F_X(x_1) - 1 < -\frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{2} < F_X(x_2) < \frac{1}{2}. \quad F_X(x_1) > \frac{1}{2} \text{ et } F_X(x_2) < \frac{1}{2}; \quad F_X(x_1) \geq \frac{1}{2} \text{ et } F_X(x_2) < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Alors } x_1 \in A \text{ et } x_2 \notin A.$$

A est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est majorée par x_2

Soit $x \in A$. $F(x_2) < \frac{1}{2} \leq F(x)$. Alors $F(x_2) < F(x)$. Comme F_X est croissante, $x_2 < x$ (en effet $x_2 > x$ donne $F(x_2) \geq F(x)$). $\forall x \in A$, $x_2 < x$. A est minorée par x_2 .

Alors A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ donc A possède une borne inférieure α .

Soit x un élément de $] \alpha, +\infty[$. x ne mine pas A car α est le plus grand mineur de A . Alors il existe un élément x' appartenant à A tel que $x' < x$.

Alors $\frac{1}{2} \leq F_X(x') \leq F_X(x)$. Soit $x \in A$. Finalement $] \alpha, +\infty[\subset A$.

$\forall x \in] \alpha, +\infty[$, $\frac{1}{2} \leq F_X(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} F_X(x) = F_X(\alpha)$ car F_X est continue à droite en α .

Alors $\frac{1}{2} \leq \lim_{x \rightarrow \alpha^+} F_X(x) = F_X(\alpha)$. Ainsi $\alpha \in A$. Montrons que $P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2}$ et

montrons que $P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2}$.

PS de GJ

$\forall x \in]-\infty, \alpha[$, $x \notin A$ donc $\forall x \in]-\infty, \alpha[$, $F_X(x) < \frac{1}{2}$. De plus $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} F_X(x) = P(X < \alpha)$.

Alors $P(X < \alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} F_X(x) \leq \frac{1}{2}$. Soit $1 - P(X \geq \alpha) \leq \frac{1}{2}$. Ainsi $P(X \geq \alpha) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Finalement : $P(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2}$ et $P(X \geq \alpha) \geq \frac{1}{2}$. α est une médiane de X .

X possède au moins une médiane.

Supposons que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- si $x \in]-\infty, 0[$: $P(X \leq x) = 0$ et $P(X \geq x) = 1$.
- si $x \in]0, 1[$: $P(X \leq x) = P(X=0) = \frac{1}{2}$ et $P(X \geq x) = P(X=1) = \frac{1}{2}$.
- si $x \in]1, +\infty[$: $P(X \leq x) = 1$ et $P(X \geq x) = 0$.
- si $x = 0$: $P(X \leq x) = P(X=0) = \frac{1}{2}$ et $P(X \geq x) = 1$.
- si $x = 1$: $P(X \leq x) = 1$ et $P(X \geq x) = P(X=1) = \frac{1}{2}$.

Alors $(P(X \leq x) \geq \frac{1}{2} \text{ et } P(X \geq x) \geq \frac{1}{2}) \Leftrightarrow x \in [0, 1]$.

L'ensemble des médianes de X est $[0, 1]$. X possède une infinité de médiane.

X possède toujours une médiane qui n'est pas nécessairement unique.

Exercice. Q1. Montrer que l'ensemble m_X des médians de X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Q2. Montrer que si X est une variable aléatoire à densité,

$$m_X = \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) = \frac{1}{2}\}.$$

Q3. Déterminer m_X lorsque $X \in \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. (resp. $X \in \mathcal{E}(\lambda)$; resp. $X \in \mathcal{U}(0,1)$).

Q2 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. X possède un moment d'ordre 2 d'ac. X possède une espérance $(X-x)^2 = X^2 - 2xX + x^2$. $(X-x)^2$ est alors combinaison ^{linéaire} de trois variables aléatoires qui est une espérance. Alors:

1) $(X-x)^2$ possède une espérance

$$E((X-x)^2) = E(X^2) - 2xE(X) + x^2 = E(X^2) - (E(X))^2 + (E(X))^2 - 2xE(X) + x^2 = V(X) + (E(X)-x)^2$$

Ainsi $f: x \mapsto E((X-x)^2)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = V(X) + (E(X)-x)^2$.

b) Posons $x_0 = E(X)$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}, f(x) = V(X) + (E(X)-x)^2 > V(X) = f(x_0)$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}, f(x) > f(x_0)$ et $f(x_0) = V(X)$. $(E(X)-x)^2 > 0$ car $x \neq x_0 = E(X)$.

Il existe un unique élément x_0 de $\mathbb{R}$ au quel la fonction f est minimal. $x_0 = E(X)$ et $f(x_0) = V(X)$.

Q3 Remarque.. Soit la n.i.k.e. f_X et une densité de X définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour $\forall t \in \mathbb{R}, u_x(t) = |t-x|$.

X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et u_x est continue sur $\mathbb{R}$. Alors $u_x(X)$ possède une espérance n.e. et on a $\int_{-\infty}^{+\infty} u_x(t) f_X(t) dt$ et absolument convergente.

Or $\forall t \in \mathbb{R}, u_x(t) f_X(t) \geq 0$. Donc $u_x(X) = |X-x|$ possède une espérance n.e. et on a

$$E \int_{-\infty}^{+\infty} u_x(t) f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-x| f_X(t) dt \text{ converge.}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq |t-x| f_X(t) \leq (|t|+|x|) f_X(t) = |t| f_X(t) + |x| f_X(t).$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, 0 \leq |t-x| f_X(t) \leq t f_X(t) + |x| f_X(t) \quad (1)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^-, 0 \leq |t-x| f_X(t) \leq -t f_X(t) + |x| f_X(t) \quad (2)$$

$$\text{Or } \int_0^{+\infty} t f_X(t) dt, \int_0^{+\infty} t f_X(t) dt, \int_{-\infty}^0 t f_X(t) dt \text{ et } \int_0^0 t f_X(t) dt \text{ convergent.}$$

Alors $\int_0^{+\infty} (1+x)f_X(t) dt$ et $\int_{-\infty}^0 (-t)f_X(t) + |x|f_X(t) dt$ convergent.

(1) et (2) et les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} |t-x|f_X(t) dt$ et $\int_{-\infty}^0 |t-x|f_X(t) dt$ convergent. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} |t-x|f_X(t) dt$ converge.

ce qui assure de manière évidente l'existence de $E(|X-x|)$.

Pour tout réel x , $E(|X-x|)$ existe. généralisation sur $\mathbb{R}$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \forall t \in [x, +\infty[, & t \geq x \text{ et } f_X(t) \geq 0 \\ \forall t \in]-\infty, x], & t \leq x \text{ et } f_X(t) \geq 0 \end{cases}$

$\forall t \in [x, +\infty[, t f_X(t) \geq x f_X(t)$ et $\forall t \in]-\infty, x], t f_X(t) \leq x f_X(t)$.

Alors $\int_x^{+\infty} t f_X(t) dt \geq x \int_x^{+\infty} f_X(t) dt = x P(X \geq x)$ et $\int_{-\infty}^x t f_X(t) dt \leq x \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \leq x P(X \leq x)$.

(toutes les intégrales convergent car $E(X)$ existe).

Alors $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq x P(X \geq x) \leq \int_x^{+\infty} t f_X(t) dt$

et $\forall x \in]-\infty, 0], \int_{-\infty}^x t f_X(t) dt \leq x P(X \leq x) \leq 0$.

Se plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} t f_X(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x t f_X(t) dt$ comme suite d'intégrales convergentes.

Alors, par encadrement, il vient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x P(X \geq x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x P(X \leq x)) = 0$.

b) nous supposons donc ici qu'il existe une densité $\tilde{f}_X$ de X , continue sur $\mathbb{R}$.

Alors F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F'_X = \tilde{f}_X$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$, $v(t) = F_X(t)$ et $w(t) = 1 - F_X(t)$.

u, v, w sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = \tilde{f}_X(t)$ et $w'(t) = -\tilde{f}_X(t)$.

Ceci justifie les deux intégrations par parties suivantes. Soit $B \in \mathbb{R}$.

$$\textcircled{1} \int_B^x P(X \leq t) dt = \int_B^x F_X(t) dt = [t F_X(t)]_B^x - \int_B^x t \tilde{f}_X(t) dt = x F_X(x) - B F_X(B) - \int_B^x t \tilde{f}_X(t) dt.$$

$$\textcircled{2} \int_x^B P(X \geq t) dt = \int_x^B (1 - F_X(t)) dt = [t(1 - F_X(t))]_x^B - \int_x^B t(-\tilde{f}_X(t)) dt = B(1 - F_X(B)) - x(1 - F_X(x)) + \int_x^B t \tilde{f}_X(t) dt.$$

$\lim_{B \rightarrow -\infty} (B F_X(B)) = 0$ et $\int_{-\infty}^x t \tilde{f}_X(t) dt$ converge car $E(X)$ existe. Alors ② permet de dire que :

$$1^\circ \int_{-\infty}^x P(X \leq t) dt \text{ existe} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x \tilde{f}_X(t) dt.$$

$$2^\circ \int_{-\infty}^x P(X \leq t) dt = x F_X(x) - \int_{-\infty}^x t \tilde{f}_X(t) dt = \int_{-\infty}^x (x-t) \tilde{f}_X(t) dt = \int_{-\infty}^x |x-t| \tilde{f}_X(t) dt.$$

$\lim_{B \rightarrow +\infty} (B(1-F_X(B))) = \lim_{B \rightarrow +\infty} (B P(X > B)) = 0$ et $\int_x^{+\infty} t \tilde{f}_X(t) dt$ converge car $E(X)$ existe. Alors ③

donne : $1^\circ \int_x^{+\infty} P(X \geq t) dt$ existe

$$2^\circ \int_x^{+\infty} P(X \geq t) dt = x(1-F_X(x)) + \int_x^{+\infty} t \tilde{f}_X(t) dt = x \int_x^{+\infty} \tilde{f}_X(t) dt + \int_x^{+\infty} t \tilde{f}_X(t) dt = \int_x^{+\infty} (t-x) \tilde{f}_X(t) dt =$$

$$\int_x^{+\infty} |t-x| \tilde{f}_X(t) dt.$$

Ainsi : $\int_{-\infty}^x P(X \leq t) dt + \int_x^{+\infty} P(X \geq t) dt$ existe et vaut $\int_{-\infty}^x |t-x| \tilde{f}_X(t) dt + \int_x^{+\infty} |t-x| \tilde{f}_X(t) dt$ ou

encore $\int_{-\infty}^{+\infty} |t-x| \tilde{f}_X(t) dt$. Alors $E(|X-x|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-x| \tilde{f}_X(t) dt = \int_{-\infty}^x P(X \leq t) dt + \int_x^{+\infty} P(X \geq t) dt$.

pour tout réel x : $g(x) = \int_{-\infty}^x P(X \leq t) dt + \int_x^{+\infty} P(X \geq t) dt$.

□ Soient a et b deux réels.

$$g(b) - g(a) = \int_a^b P(X \leq t) dt + \int_b^{+\infty} P(X \geq t) dt - \int_a^b P(X \leq t) dt - \int_b^{+\infty} P(X \geq t) dt.$$

$$g(b) - g(a) = \int_{-\infty}^a P(X \leq t) dt + \int_a^b P(X \leq t) dt + \int_b^{+\infty} P(X \geq t) dt + \int_a^b P(X \geq t) dt - \int_{-\infty}^a P(X \leq t) dt - \int_a^b P(X \geq t) dt$$

$$g(b) - g(a) = \int_a^b P(X \leq t) dt - \int_a^b P(X \geq t) dt = \int_a^b (P(X \leq t) - P(X \geq t)) dt = \int_a^b P(t) dt.$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, g(b) - g(a) = \int_a^b P(t) dt.$$

Soit m une médiane de X .

$$P(X \geq t) = 1 - P(X < t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F_X(t)$$

$$\forall b \in \mathbb{R}, g(b) - g(m) = \int_m^b P(t) dt = \int_m^b [P(X \leq t) - P(X \geq t)] dt = \int_m^b (2F_X(t) - 1) dt.$$

Pour $\forall b \in \mathbb{R}$, $\psi(b) = g(b) - g(m) = \int_m^b (2F_X(t) - 1) dt$.

$2F_X - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc ψ est la primitive de $2F_X - 1$ qui prend la valeur 0 en m . Ainsi ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, $\psi'(b) = 2F_X(b) - 1$. $P(X > m) = P(X \geq m)$

• Soit $b \in]-\infty, m]$. $2F_X(b) - 1 \leq 2F_X(m) - 1 = 2P(X \leq m) - 1 = 2[1 - P(X > m)] - 1 = 2[\frac{1}{2} - P(X > m)] \leq 0$

$\nwarrow F_X$ croissante sur $\mathbb{R}$

• Soit $b \in [m, +\infty[$. $2F_X(b) - 1 \geq 2F_X(m) - 1 = 2P(X \leq m) - 1 \geq 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$. $P(X, m) \geq \frac{1}{2}$

Alors $\forall b \in]-\infty, m]$, $\psi'(b) \leq 0$ et $\forall b \in [m, +\infty[$, $\psi'(b) \geq 0$.

ψ est décroissante sur $]-\infty, m]$ et croissante sur $[m, +\infty[$.

Pour ψ admet un minimum en m . $\forall b \in \mathbb{R}$, $g(b) - g(m) = \psi(b) \geq \psi(m) = 0$.

$\forall b \in \mathbb{R}$, $g(b) \geq g(m)$.

Si m est une médiane de X g est minimale en m .

Nous avons vu dans Q1 b que X possède au moins une médiane. Pour

$$\exists \pi_k \quad \pi_k E(|X - k|) \text{ existe.}$$

$k \in \mathbb{R}$

$$\text{et si } m \text{ est une médiane de } X : \pi_k E(|X - k|) = E(|X - m|).$$

$k \in \mathbb{R}$

Q4 a) Supposons ci que X suit la loi exponentielle de paramètre a . Notons que X possède une espérance.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sur }]-\infty, 0[\end{cases}$$

$$\text{Pour } \forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \begin{cases} a e^{-ax} & x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sur }]-\infty, 0[\end{cases} \quad \int_{-\infty}^x \text{ est une densité de } X.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, E(|X - x|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t - x| f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} |t - x| a e^{-at} dt = a h(x).$$

comme nous l'avons vu plus haut $\pi_k E(|X - k|)$ existe. Alors $\pi_k h(x)$

$k \in \mathbb{R}$

existe et vaut $\frac{1}{a} \pi_k E(|X - k|)$. Cherchons "les" médianes de X . Commençons par une remarque.

► Remarque.. Soit $m \in \mathbb{R}$. Supposons que m soit une médiane de X .

$$F_X(m) = P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \leq P(X \geq m) = 1 - P(X < m) = 1 - P(X \leq m) \text{ donc } P(X \leq m) \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Alors $F_X(m) \geq \frac{1}{2}$ & $F_X(m) = P(X \leq m) \leq \frac{1}{2}$. Soit $F_X(m) = \frac{1}{2}$.

Si m est une médiane de X : $F_X(m) = \frac{1}{2}$.

Réciproquement supposons que $F_X(m) = \frac{1}{2}$. $P(X \leq m) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$!

$$P(X \geq m) = 1 - P(X < m) = 1 - P(X \leq m) = 1 - F_X(m) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} !$$

Ainsi m est une médiane de X .

Récapitulatif : m est une médiane de X si et seulement si $F_X(m) = \frac{1}{2}$.

Notons que ceci vaut pour toute variable aléatoire à densité. ▲

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall x \in]-\infty, 0], F_X(x) = 0. \text{ Soit } x \in [0, +\infty[.$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-ax} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-ax} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -ax = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{a} \ln 2. \text{ Notons que } \frac{1}{a} \ln 2 \geq 0 !$$

Par conséquent X admet une médiane et une seule $\frac{1}{a} \ln 2$.

$$\text{Alors } \pi_n E(|X - \pi_n|) = E\left(|X - \frac{1}{a} \ln 2|\right).$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Par conséquent } \pi_n h(x) = \frac{1}{a} E\left(|X - \frac{1}{a} \ln 2|\right) = h\left(\frac{1}{a} \ln 2\right).$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Récapitulatif : h possède un minimum sur $\mathbb{R}$ et $\frac{1}{a} \ln 2$ est un réel qui réalise ce minimum.

⊛ Exercice 1. Vérifiez que $h\left(\frac{1}{a} \ln 2\right) = \frac{1}{a^2} \ln 2$ ⊛ [voir la dernière page...]

Exercice 2. nous demandons que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ \frac{1}{a^2} \ln 2 & \text{sinon} \end{cases}$

Retrouvons alors le résultat demandé.

$$b) \mapsto \frac{1}{1+t^2} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et paire. Alors } \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2 [\arctan t]_0^1 = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Par ailleurs } \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t^2} & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est positive sur $\mathbb{R}$ et au moins continue sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ (donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points). Soit $\int_{-1}^1 f(t) dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ existent et valent 0.

comme $\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, $\int_{-1}^1 e(t) dt = 1$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e(t) dt$ existe et vaut 1.

ceci admette de même que e est une densité de probabilité.

Alors il existe une variable aléatoire Y admettant pour densité e .

Nous notons F_Y sa fonction de répartition.

Comme nous l'avons vu plus haut un réel m est médiane de Y si et seulement si

$$F_Y(m) = \frac{1}{2} \text{ (voir que de la page 6).}$$

$$\forall x \in]-\infty, -1[, F_Y(x) = \int_{-\infty}^x e(t) dt = 0. \quad Y \text{ n'a pas de médiane appartenant à }]-\infty, -1[$$

$$\forall x \in [1, +\infty[, F_Y(x) = \int_{-\infty}^x e(t) dt = \int_{-1}^1 e(t) dt = 1. \quad Y \text{ n'a pas de médiane appartenant à } [1, +\infty[.$$

$$\text{soit } x \in [-1, 1]. \quad F_Y(x) = \int_{-\infty}^x e(t) dt = \int_{-1}^x \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{2}{\pi} [\arctan t]_{-1}^x = \frac{2}{\pi} [\arctan x - (-\frac{\pi}{4})]$$

$$F_Y(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}. \quad F_Y(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\pi} \arctan x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

0 est la seule médiane de Y .

$$\int_{-\infty}^0 t e(t) dt \text{ et } \int_0^{+\infty} t e(t) dt \text{ existent et valent 0.}$$

$$t \mapsto t e(t) \text{ est continue et impaire sur } [-1, 1] \text{ donc } \int_{-1}^1 t e(t) dt \text{ existe et vaut 0.}$$

$$\text{Alors } \int_{-\infty}^{+\infty} t e(t) dt \text{ existe et vaut 0. } \underline{Y \text{ possède une espérance qui vaut 0.}}$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}, E((Y-x)^2) \text{ existe et vaut } E((Y-0)^2) \text{ car 0 est une médiane de } Y.$$

$$\text{il faut donc transformer dans } \forall x \in \mathbb{R}, E((Y-x)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-x|^2 e(t) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{|t-x|^2}{1+t^2} dt.$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{-1}^1 \frac{|t-x|^2}{1+t^2} dt = \frac{2}{\pi} E((Y-x)^2).$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \text{ existe et 0 est un point qui réalise ce minimum.}$$

$$f(0) = \int_{-1}^1 \frac{|t|^2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2} (1+t^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

par suite

Re pose de un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint en 0 et qui vaut $\ln 2$.

Exercice.. noter que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \in (-1, 1) \\ x + \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \end{cases}$
retourne le résultat précédent.

Retour sur Q4 a). Calcul du minimum de h .

Le minimum vaut $h(\frac{1}{a} \ln 2)$. Posons $\delta = \frac{1}{a} \ln 2$.

$$h(\delta) = \frac{1}{a} E(|X - \delta|) = \frac{1}{a} g(\delta) = \frac{1}{a} \left[\int_{-\infty}^{\delta} P(X \leq t) dt + \int_{\delta}^{+\infty} P(X \geq t) dt \right].$$

$$\delta \geq 0. \int_{-\infty}^{\delta} P(X \leq t) dt = \int_0^{\delta} (1 - e^{-at}) dt = \left[t + \frac{1}{a} e^{-at} \right]_0^{\delta} = \delta + \frac{1}{a} e^{-a\delta} - \frac{1}{a}.$$

$$\int_{\delta}^{+\infty} P(X \geq t) dt = \int_{\delta}^{+\infty} (1 - P(X \leq t)) dt = \int_{\delta}^{+\infty} (1 - (1 - e^{-at})) dt = \int_{\delta}^{+\infty} e^{-at} dt.$$

$$\int_{\delta}^{+\infty} P(X \geq t) dt = \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \int_{\delta}^{\delta} e^{-at} dt = \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{a} e^{-at} \right]_{\delta}^{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{a} e^{-a\delta} - \frac{1}{a} e^{-a\delta} \right] = \frac{1}{a} e^{-a\delta}.$$

$$\text{donc } h(\delta) = \frac{1}{a} \left[\delta + \frac{1}{a} e^{-a\delta} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} e^{-a\delta} \right] = \frac{1}{a} \left[\delta + \frac{1}{a} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \times \frac{1}{2} \right] = \frac{\delta}{a} = \frac{\ln 2}{a^2}.$$

$$\delta = \frac{\ln 2}{a} \text{ donc } e^{-a\delta} = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}.$$

Le minimum de h est $\frac{1}{a^2} \ln 2$.

Question 7 HEC 2011 S 101

Dans cet exercice E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et p, n sont deux entiers strictement positifs.

Q1. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E et x un vecteur de E .

Caractériser ~~on~~ le justifiant le fait que $(e_1, e_2, \dots, e_p, x)$ soit liée.

Q2. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E supposés non tous nuls.

On note $\mathcal{A} = \{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \mid (x_i)_{i \in J} \text{ est libre}\}$.

Soit J_0 un élément de $\mathcal{A}$ de cardinal maximal. Que peut-on dire de $(x_i)_{i \in J_0}$ vis à vis de $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$?

Q3. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E et r le rang de cette famille. On en extrait une famille de n' vecteurs et on note r' le rang de cette famille extraite. Montrer que $n - r \geq n' - r'$.

Cours X est une variable aléatoire. Rappeler la définition de la fonction de répartition de X et en donner les principales propriétés.

Q1) Montrons que $(e_1, e_2, \dots, e_p, x)$ est liée si et seulement si x est combinaison linéaire

de $(e_1, e_2, \dots, e_p)$.

→ la condition est clairement suffisante.

→ Montrons qu'elle est nécessaire. Supposons que $(e_1, e_2, \dots, e_p, x)$ est liée.

$$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1}, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}) \neq 0_{\mathbb{K}^{p+1}} \text{ et } \sum_{k=1}^p \alpha_k e_k + \alpha_{p+1} x = 0_E.$$

Supposons $\alpha_{p+1} = 0$. Alors $\sum_{k=1}^p \alpha_k e_k = 0_E$. Comme $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est libre, on a :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0. \text{ Alors } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = 0. \text{ Or } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}) = 0_{\mathbb{K}^{p+1}} !!$$

$$\text{Par conséquent } \alpha_{p+1} \text{ n'est pas nul et } x = -\frac{1}{\alpha_{p+1}} \sum_{k=1}^p \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^p \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_{p+1}}\right) e_k$$

Or x est combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \dots, e_p)$.

Q2) Montrons que $(x_i)_{i \in J_0}$ a une base de $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$. $J_0 \neq \emptyset$ car $\exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \neq 0_E$.

• $(x_i)_{i \in J_0}$ est une famille libre de $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ par définition de J_0 .

• Montrons que $(x_i)_{i \in J_0}$ est une famille génératrice de $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Il suffit de montrer que $v_1, v_2, \dots, v_n$ sont combinaisons linéaires des éléments de la famille $(x_i)_{i \in J_0}$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si $k \in J_0$, v_k est combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in J_0}$.

Supposons que $k \in J_0$. Alors $\text{card } J_0 \cup \{k\} > \text{card } J_0$.

Alors la famille " $(x_i)_{i \in J_0} \cup (x_k)$ " est liée par définition de J_0 .

Comme $(x_i)_{i \in J_0}$ est libre, φ_1 permet de dire que x_k est combinaison linéaire des éléments de la famille $(x_i)_{i \in J_0}$.

Ainsi $\forall k \in [1, n] \setminus J_0$, $x_k \in \text{Vect}((x_i)_{i \in J_0})$. Alors $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \text{Vect}((x_i)_{i \in J_0})$.

L'inclusion inverse est évidente, on a : $\text{Vect}((x_i)_{i \in J_0}) = \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$(x_i)_{i \in J_0}$ est une famille libre et génératrice de $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Donc $(x_i)_{i \in J_0}$ est une base de $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Q3) Posons $F = \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. On a $F = r$ car la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est de rang r .

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de n' vecteurs extraite de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

et qui a pour rang r' . Si $n' = r$: $r = r'$ et le résultat est clair. Nous supposons $n' > r$.

1^{er} cas... $r' = 0$. Alors $\forall i \in I$, $x_i = 0_E$. $F = \text{Vect}((x_i)_{i \in [1, n] \setminus I})$.

Donc $r = \dim F \leq \text{card}([1, n] \setminus I) = n - n'$. Alors $n - r \geq n' = n' - r'$.

2^{ème} cas... $r' = n'$. Alors $n' - r' = 0$. Comme $n \geq r$: $n - r \geq 0 = n' - r'$.

3^{ème} cas... $0 < r' < n'$. Soit $\tilde{I} = \{J \subset I \mid (x_i)_{i \in J} \text{ libre}\}$

Soit $\tilde{J}_0$ un élément de $\tilde{I}$ de cardinal maximal. D'après ce qui précède

$(x_i)_{i \in \tilde{J}_0}$ est une base de $\text{Vect}((x_i)_{i \in I})$ qui est de dimension r' .

Alors $\text{card } \tilde{J}_0 = r'$. Les vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I \setminus \tilde{J}_0}$ sont combinaisons linéaires des éléments de la famille $(x_i)_{i \in \tilde{J}_0}$.

Alors $F = \text{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et ^{famille} encore engendré par la ^{famille} famille des familles
 $(x_i)_{i \in \tilde{J}_0}$ et $(x_i)_{i \in [1, n] \setminus I}$. Cette famille a pour cardinal $r' + n - n'$
 donc $r' + n - n' \geq \dim F = r$. Alors $n - r \geq n' - r'$.

Dans tous les cas $n - r \geq n' - r'$.

Sujet S 108 - Exercice

Dans l'exercice toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles.

- 1) Soit X une variable aléatoire.
 - a) Rappeler la définition de la fonction de répartition F de X et en donner des propriétés.
 - b) Dans cette sous-question, on suppose que X est à densité. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$ si et seulement si F est strictement croissante.
 - c) Soit Y une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Soit X définie sur Ω par :

$$X(\omega) = \begin{cases} Y(\omega) + 1, & \text{si } Y(\omega) < -1; \\ 0, & \text{si } -1 \leq Y(\omega) \leq 1; \\ Y(\omega) - 1, & \text{si } Y(\omega) > 1. \end{cases}$$

Montrer que X est une variable aléatoire, et représenter sa fonction de répartition. Quel commentaire peut-on faire ?

Dans la suite de l'exercice X désigne une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F est strictement croissante. On envisage plusieurs méthodes pour simuler la loi de X conditionnellement à $(X > m)$ pour un réel m donné.

- 2) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et m un réel fixé.
 - a) Montrer que l'événement $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X_n \leq m)$ est de probabilité nulle.
 - b) Soit Z l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = X_p(\omega)$ où p est le plus petit indice n tel que $X_n(\omega) > m$ si $\omega \notin A$ et $Z(\omega) = m$ si $\omega \in A$.
Montrer que Z est une variable aléatoire et que pour tout x réel, $\mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}_{(X > m)}(X \leq x)$.
 - c) Quel commentaire peut-on faire sur cette méthode de simulation lorsque m est très grand ?
- 3) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $]0, 1[$ de loi uniforme et $m \in \mathbb{R}$. On pose

$$V = F^{-1}(F(m) + (1 - F(m))U) \quad (1)$$

- a) Montrer que V est une variable aléatoire et que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(V \leq x) = \mathbb{P}_{(X > m)}(X \leq x)$.
- b) Comparer cette méthode à celle envisagée à la question précédente.
- c) Déterminer F et F^{-1} lorsque X a pour densité $f_X : x \mapsto \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Expliciter dans ce cas la variable V en fonction de U lorsque $m = 0$. Quelle est alors la loi de V ?
- d) Si a et b sont deux réels tels que $a < b$, proposer, par analogie avec la formule (1), une variable aléatoire W simulant la loi de X conditionnellement à $(a < X < b)$.

Sujet S 108 - Exercice sans préparation

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E pour lequel il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

- 1) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (on pourra penser au procédé d'orthonormalisation de Schmidt).
- 2) On suppose de plus que pour tout x de E , $\langle u(x), x \rangle = 0$.
Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = -\langle u(y), x \rangle$. Que peut-on dire de u ?

HEC 2011 S 108 Correction de l'exercice

Q1) a) $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X'(-\infty, x]) = P(X \leq x)$.

P1 F_x est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$

P2 F_x est croissante

P3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_x(x) = 1$

P4 F_x est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$

Conclusions 1.. P2 et P3 entraînent P1

2.. P1, P2, P3, P4 (resp. P2, P3, P4) caractérisent les fonctions de répartition des variables aléatoires réelles.

3.. X est une variable aléatoire à densité n et seulement si F_x est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{B}'$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Q b) * Supposons que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

Supposons que F ne soit pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Alors $\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2, x < x'$ et $F(x) \geq F(x')$.

Or F est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $F(x) \leq F(x')$. Ainsi $x < x'$ et $F(x) = F(x')$.

Donc $x \neq x'$ et $F(x) = F(x')$. F n'est pas injective. Ceci contredit l'hypothèse.

Si F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$: F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

* Réciproquement supposons que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme F est continue sur $\mathbb{R}$ et que, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, la réciproque de

la bijection montre que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$ si et seulement si F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $A_x = X'(-\infty, x]$ et montrons que $A_x \in \mathcal{B}$.

Nous noterons ϕ la fonction de répartition de Y . Soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in A_x \Leftrightarrow X(\omega) \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sur } \Omega \\ 0 \leq x \text{ et } -1 \leq Y(\omega) \leq 1 \\ Y(\omega) - 1 \leq x \text{ et } Y(\omega) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega) \leq x-1 \text{ et } Y(\omega) < -1 \\ \text{ou} \\ 0 \leq x \text{ et } -1 \leq Y(\omega) \leq 1 \\ \text{ou} \\ Y(\omega) \geq x+1 \text{ et } Y(\omega) > 1 \end{cases}$$

$$\underline{1^{\text{re}} \text{ cas}}: x < 0, \omega \in A_x \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma(\omega) \leq x-1 \text{ et } \gamma(\omega) < -1 \\ \text{ou} \\ \gamma(\omega) \leq x+1 \text{ et } \gamma(\omega) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \gamma(\omega) \leq x-1.$$

$$\underline{2^{\text{de}} \text{ cas}}: x > 0, \omega \in A_x \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma(\omega) \leq x-1 \text{ et } \gamma(\omega) < -1 \\ \text{ou} \\ -1 \leq \gamma(\omega) \leq 1 \\ \text{ou} \\ \gamma(\omega) \leq x+1 \text{ et } \gamma(\omega) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma(\omega) < -1 \\ \text{ou} \\ -1 \leq \gamma(\omega) \leq 1 \\ \text{ou} \\ 1 < \gamma(\omega) \leq x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \gamma(\omega) \leq x+1.$$

$$\underline{3^{\text{de}} \text{ cas}}: x = 0, \omega \in A_x \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma(\omega) \leq -1 \text{ et } \gamma(\omega) < -1 \\ \text{ou} \\ 0 \leq 0 \text{ et } -1 \leq \gamma(\omega) \leq 1 \\ \text{ou} \\ \gamma(\omega) \leq 1 \text{ et } \gamma(\omega) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma(\omega) < -1 \\ \text{ou} \\ -1 \leq \gamma(\omega) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \gamma(\omega) \leq 1.$$

γ est une variable aléatoire donc $\forall z \in \mathbb{R}, \gamma^{-1}([-\infty, z]) \in \mathcal{G}$.

Si $x \in]-\infty, 0[$, $A_x = \gamma^{-1}([-\infty, x-1]) \in \mathcal{G}$ et $P(A_x) = P(\gamma^{-1}([-\infty, x-1])) = \phi(x-1)$.

Si $x \in]0, +\infty[$, $A_x = \gamma^{-1}([-\infty, x+1]) \in \mathcal{G}$ et $P(A_x) = P(\gamma^{-1}([-\infty, x+1])) = \phi(x+1)$.

Si $x = 0$, $A_x = \gamma^{-1}([-\infty, 1]) \in \mathcal{G}$ et $P(A_x) = P(\gamma^{-1}([-\infty, 1])) = \phi(1)$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}, A_x = \gamma^{-1}([-\infty, x]) \in \mathcal{G}$. Alors x est une variable aléatoire sur $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$.

Notons F_x sa fonction de répartition.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_x(x) = P(\gamma^{-1}([-\infty, x])) = P(A_x) = \begin{cases} \phi(x-1) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \phi(1) & \text{si } x = 0 \\ \phi(x+1) & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

$$\text{on trouve } \underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, F_x(x) = \begin{cases} \phi(x-1) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \phi(1) & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}}}$$

▲ Remarque: 1. ϕ est continue sur $\mathbb{R}$. Or plus $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto x+1$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Par composition F_x est alors continue sur $]-\infty, 0[$ et

sur $[0, +\infty[$. $F_x(0) = \phi(0+1) = \phi(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_x(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \phi(x-1) = \phi(-1)$

$$\phi(-1) = \phi(1) \Leftrightarrow 1 - \phi(1) = \phi(1) \Leftrightarrow \phi(1) = \frac{1}{2}$$

$$\phi(-1) = \phi(1) \Leftrightarrow \phi(1) = \phi(0) \Leftrightarrow 1 = 0 \quad \text{!!} \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} F_x(x) = \phi(-1) \neq \phi(1) = F_x(0)$$

$\uparrow$ $\phi(0) = \frac{1}{2}$ $\uparrow$ ϕ est impaire

Alors F_X n'est pas continue à 0. Donc X n'est pas une variable aléatoire à densité.

F_X est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ donc $\forall z \in \mathbb{R}^*$, $F_X(z) = \lim_{t \rightarrow z^-} F_X(t) = P(X \leq z) = F_X(z) - P(X=z)$.

Alors $\forall z \in \mathbb{R}^*$, $P(X=z) = 0$.

Or $P(X=0) \leq P(X \leq 0) = F_X(0) = \Phi(1) < 1$.

Donc X n'est pas une variable aléatoire discrète !

2. La courbe ne pose aucune problème avec les données numériques.

On $F_X(x) = 0$, On $F_X(x) = 1$. $F_X(0) = \Phi(1) \approx 0,84134$. On $F_X(x) = \Phi(1) = 1 - \Phi(1) \approx 0,15869$
 $x \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow 0^-$

F_X est dérivable à droite à 0 et $(F_X)'_d(0) = \Phi'(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,24197$

F_X est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_X(x) = \begin{cases} \Phi'(x-1) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \Phi'(x+1) & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$

On $F'_X(x) = \Phi'(-1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,24197$.
 $x \rightarrow 0^-$

3. Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto x+1$ sont aussi strictement croissants sur $\mathbb{R}$.

Alors Φ et F_X sont strictement croissants sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

et F_X est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme nous l'avons déjà vu.

Il y a $F_X(x) = 0$, On $F_X(x) = \Phi(1)$, $F_X(0) = \Phi(1)$ et On $F_X(x) = 1$.
 $x \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow 0^-$ $x \rightarrow +\infty$

Alors F_X définit une bijection de $]-\infty, 0[$ sur $]0, \Phi(1)[$ et de $]0, +\infty[$ sur $[\Phi(1), 1[$.

Donc $F_X(]-\infty, 0[) =]0, \Phi(1)[$ et $F_X([0, +\infty[) = [\Phi(1), 1[$. $F_X(\mathbb{R}) =]0, \Phi(1)[\cup [\Phi(1), 1[$.

Comme $\Phi(-1) < \Phi(1)$: F_X n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

Nous avons vu que F_X est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < x'$.

$x < x' < 0$ donne $F_X(x) < F_X(x')$. $x < 0 \leq x'$ donne $F_X(x) < \Phi(1) < \Phi(1) \leq F_X(x')$ donc $F_X(x) < F_X(x')$.

Or $x < x'$ donne $F_X(x) < F_X(x')$. Ceci montre que F_X est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le théorème 9.1.1) ne vaut pas pour toute variable aléatoire.

Q2 a) le corollaire naturel du théorème de la limite monotone (à probabilité) nous dit que $P(A) = P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X_n \leq z\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\bigcap_{k=0}^n \{X_k \leq z\})$.

Or $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et ayant même loi que X .

$$\text{Soit } P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=0}^n P(X_k \leq z) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (F(z))^n.$$

X est une variable à densité et sa fonction de répartition F est strictement croissante.

Alors F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

Ainsi $F(z) \in]0, 1[$. Alors $P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (F(z))^n = 0$.

Il s'ensuit $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X_n \leq z\}$ est de probabilité nulle.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $B_x = Z^{-1}(]-\infty, x])$ et notons que $B_x \in \mathcal{G}$.

Notons que si $\omega \in A$, $Z(\omega) = x$ et si $\omega \notin A$, $Z(\omega) > x$.

1^{er} cas... $x < x_0$. $B_x = Z^{-1}(]-\infty, x]) = \emptyset$ est. Notons que $P(B_x) = 0$.

2nd cas... $x = x_0$. $B_x = Z^{-1}(]-\infty, x_0]) = Z^{-1}(\{x_0\}) = A \in \mathcal{G}$. Notons que $P(B_x) = P(A) = 0$.

3rd cas... $x > x_0$. Soit $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\omega \in B_x \Leftrightarrow Z(\omega) \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} \omega \in A \\ \text{ou} \\ \omega \in \bar{A} \text{ et } x_0 < X_0(\omega) \leq x \\ \text{ou} \\ \omega \in \bar{A} \text{ et } \exists p \in \mathbb{N}^*, X_0(\omega) \leq x_0, X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_{p-1}(\omega) \leq x_{p-1} \text{ et } x_0 < X_p(\omega) \leq x \end{cases}$$

$$B_x = A \cup (\bar{A} \cap X_0^{-1}(]x_0, x]) \cup \left(\bar{A} \cap \bigcup_{p=1}^{+\infty} (X_0^{-1}(]-\infty, x_0]) \cap \dots \cap X_{p-1}^{-1}(]-\infty, x_{p-1}]) \cap X_p^{-1}(]x_{p-1}, x]) \right)$$

On peut aussi écrire :

$$B_x = X_0^{-1}(]x_0, x]) \cup \bigcup_{p=1}^{+\infty} (X_0^{-1}(]-\infty, x_0]) \cap \dots \cap X_{p-1}^{-1}(]-\infty, x_{p-1}]) \cap X_p^{-1}(]x_{p-1}, x]) \cup A$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k^{-1}(]x_{k-1}, x_k]) \in \mathcal{G}$ et $X_k^{-1}(]-\infty, x_{k-1}]) \in \mathcal{G}$ car pour tout $k \in \mathbb{N}$, X_k est

une variable aléatoire. Or plus $A \in \mathcal{G}$.

Comme $\mathcal{E}$ est stable par réunion finie ou dénombrable et par intersection finie (ou dénombrable) on peut dire que B_x appartient à $\mathcal{E}$. Calculons $P(B_x)$.

▼ Remarque... Soit $B \in \mathcal{E}$. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ car $P(A) = 0$.
 Or $A \cap B \in \mathcal{E}$ d'où $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$. $P(A \cap B) = 0$. Alors $P(A \cup B) = P(B)$.
 $\forall B \in \mathcal{E}$, $P(A \cup B) = P(B)$. ▴

$$\text{Ainsi } P(B_x) = P\left(X_0^{-1}(]m, x]) \cup \bigcup_{p=1}^{+\infty} (X_0^{-1}(]m, x]) \cap \dots \cap X_p^{-1}(]m, x]) \cap X_p^{-1}(]m, x])\right).$$

$$\text{Par indépendance des } X_i: P(B_x) = P(X_0^{-1}(]m, x])) + \sum_{p=1}^{+\infty} P(X_0^{-1}(]m, x]) \cap \dots \cap X_p^{-1}(]m, x]) \cap X_p^{-1}(]m, x])).$$

$$\text{d'où } P(B_x) = P(m < X_0 \leq x) + \sum_{p=1}^{+\infty} P(\{X_0 \leq m\} \cap \dots \cap \{X_{p-1} \leq m\} \cap \{m < X_p \leq x\}).$$

Or $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X .

$$\text{Ainsi } P(B_x) = P(m < X \leq x) + \sum_{p=1}^{+\infty} (P(X \leq m))^p P(m < X \leq x) \quad \begin{matrix} \text{car } [0, 1 - F] = [0, 1] \\ F(m) \in [0, 1] \end{matrix}$$

$$\text{Alors } P(B_x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (P(X \leq m))^p P(m < X \leq x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (F(m))^p (F(x) - F(m)) = \frac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)}.$$

Vous avez donc montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $Z^{-1}(]m, x]) = B_x \in \mathcal{E}$.

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}, P(Z^{-1}(]m, x])) = \begin{cases} \frac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)} & \text{si } x \in]m, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors Z est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, P)$.

$$\text{On pose sa fonction de répartition } F_Z \text{ et définit par } \forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \begin{cases} \frac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)} & \text{si } x \in]m, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice... montrer que Z est une variable aléatoire à densité.

$$\text{montrer que } \forall x \in \mathbb{R}, P(Z \leq x) = P_{X > m}(X \leq x).$$

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in [0, 1]$ d'où $P(X > m) = 1 - F(m) \in [0, 1]$.

Alors $P(X > m) \neq 0$. Ce qui permet de parler de $P_{X > m}(X \leq x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $P_{\{X > m\}}(X \leq x) = \frac{P(\{X > m\} \cap \{X \leq x\})}{P(X > m)} = \frac{P(\{m < X\} \cap \{X \leq x\})}{P(X > m)}$.

1^{er} cas $x \leq m$. $P(\{X > m\} \cap \{X \leq x\}) = P(\emptyset) = 0$. $P_{\{X > m\}}(X \leq x) = 0 = F_2(x) = P(Z \leq x)$.

2^{es} cas $x > m$. $P_{\{X > m\}}(X \leq x) = \frac{P(m < X \leq x)}{P(X > m)} = \frac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)} = F_2(x) = P(Z \leq x)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Z \leq x) = P_{\{X > m\}}(X \leq x)$.

c) Lorsque m est très grand, la probabilité de $P(X > m)$ due de $P(X_p > m)$, pour p quelconque dans $\mathbb{N}$, est très faible. Cela due au fait que d'être un p -ième de $\mathbb{N}$ tel que X_p prenne une valeur strictement supérieure à m .

Q3) a) Rappelons que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$. F^{-1} est alors une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$. Rappelons F^{-1} est strictement croissante sur $]0, 1[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $C_x = V^{-1}(]-\infty, x])$. Soit $w \in \mathbb{R}$. F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$w \in C_x \Leftrightarrow V(w) \leq x \Leftrightarrow F^{-1}(F(m) + (1 - F(m))U(w)) \leq x \Leftrightarrow F(m) + (1 - F(m))U(w) \leq F(x)$

$w \in C_x \Leftrightarrow U(w) \leq \frac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)} \Leftrightarrow w \in U^{-1}(]-\infty, \frac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)}])$.

Alors $C_x = U^{-1}(]-\infty, \frac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)}])$. Si U est une variable aléatoire sur

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ due $U^{-1}(]-\infty, \frac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)}]) \in \mathcal{B}$.

Ainsi $C_x \in \mathcal{B}$ et $P(C_x) = P(U^{-1}(]-\infty, \frac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)}])) = P(U \leq \frac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)})$.

1^{er} cas $x \leq m$. Alors $\frac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)} \leq 0$. Comme U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

$P(C_x) = P(U \leq \frac{F(x) - F(m)}{1 - F(m)}) = 0$.

2^{ème} cas... $x > u$. Alors $P(u) < F(x) < 1$. Donc $0 < F(u) - F(u) < 1 - F(u)$.

$$\text{Ainsi } 0 < \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} < 1.$$

$$\text{Donc } P(C_u) = P\left(0 \leq \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}\right) = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}.$$

Pour conclure : $\forall x \in \mathbb{R}, V^{-1}([0, x]) = \{x \in \mathbb{R} \text{ et } P(V^{-1}([0, x])) = P(C_x) = \begin{cases} \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} & \text{si } x > u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc si V est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$.

$$\text{2^e } \forall x \in \mathbb{R}, P(V \leq x) = \begin{cases} \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} & \text{si } x \in]u, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{3^e } \forall x \in \mathbb{R}, P(V \leq x) = P_{\{X > u\}}(X \leq x).$$

b) cette méthode repose sur la simple connaissance de la fonction de répartition de X , donc de la loi de X alors que la primitive exige la connaissance de X ou au moins un moyen de simuler X .

$$\text{c) soit } x \in [0, +\infty[. \int_0^x f_X(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t} dt = \frac{1}{2} [-e^{-t}]_0^x = \frac{1}{2} (1 - e^{-x}). \quad (*)$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_X(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} f_X(t) dt \text{ existe et vaut } \frac{1}{2}.$$

$$f_X \text{ étant paire } \int_{-\infty}^0 f_X(t) dt \text{ existe et vaut } \frac{1}{2}. \text{ Alors } \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt \text{ existe et vaut } 1.$$

comme f_X est continue et positive sur $\mathbb{R}$, f_X est une densité de probabilité.

$$\forall x \in [0, +\infty[, F(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t) dt + \int_0^x f_X(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - e^{-x}) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x} \quad (*)$$

$$\forall x \in]-\infty, 0[, F(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt - \int_0^{-x} f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt - \int_0^{-x} f_X(t) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 - e^x) = \frac{1}{2} e^x. \quad (*)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ \frac{1}{2} e^x & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ \frac{1}{2} e^x & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$$

$x \mapsto \frac{1}{2} e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc F est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$
 $x \mapsto 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Alors F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

comme F est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Soit F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

Notons que $\forall x \in [0, +\infty[$, $F(x) \geq F(0) = \frac{1}{2}$ et $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F(x) < F(0) = \frac{1}{2}$.

Soit $y \in]0, 1[$. $\exists ! x \in \mathbb{R}$, $F(x) = y$. On pose $x = F^{-1}(y)$.

1^{er} cas.. $y \in]0, \frac{1}{2}[$. Alors $x \in]-\infty, 0]$ donc $y = F(x) = \frac{1}{2} e^x$. $x = \ln(2y)$.

2nd cas.. $y \in [\frac{1}{2}, 1[$. Alors $x \in [0, +\infty[$ donc $y = F(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$. $e^{-x} = 2(1-y)$.

Alors $-x = \ln(2(1-y))$. $x = -\ln(2(1-y))$.

$$\forall y \in]0, 1[, F^{-1}(y) = \begin{cases} -\ln(2(1-y)) & \text{si } y \in [\frac{1}{2}, 1[\\ \ln(2y) & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons que $n=0$. $V = F^{-1}(F(0) + (1-F(0))U) = F^{-1}(\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})U) = F^{-1}(\frac{1+U}{2})$.

$\frac{1+U}{2}$ prend ses valeurs dans $[\frac{1}{2}, 1[$ donc $V = -\ln(2(1 - \frac{1+U}{2})) = -\ln \frac{1-U}{2}$.

$$V = -\ln \frac{1-U}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(V \leq x) = \begin{cases} \frac{F(x) - F(0)}{1 - F(0)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{car } n=0)$$

Or $F(0) = \frac{1}{2}$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $F(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$.

$$\text{Alors } \forall x \in]0, +\infty[, P(V \leq x) = \frac{1 - \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(1 - e^{-x})}{\frac{1}{2}} = 1 - e^{-x}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(V \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \forall x \in \mathbb{R}, P(V \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On a la loi exponentielle de paramètre 1.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha_x = P_{(a < X < b)}(X \leq x)$.

Noter que $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) > 0$ car F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $a < b$. cela justifie la probabilité conditionnelle ...

$$\text{de plus } \alpha_x = \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{a < X < b\})}{P(a < X < b)} = \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{a < X < b\})}{F(b) - F(a)}.$$

1^{ère} cas... $x \leq a$. Alors $P(\{X \leq x\} \cap \{a < X < b\}) = P(\emptyset) = 0$. $\alpha_x = 0$.

2^{ème} cas... $x \geq b$. Alors $P(\{X \leq x\} \cap \{a < X < b\}) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$. $\alpha_x = 1$.

3^{ème} cas... $a < x < b$ Alors $\alpha_x = \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{a < X < b\})}{F(b) - F(a)} = \frac{P(a < X \leq x)}{F(b) - F(a)} = \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_{(a < X < b)}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a] \\ \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} & \text{si } x \in]a, b[\\ 1 & \text{si } x \in [b, +\infty[\end{cases}$$

$a < b$ et $F(a) < F(b)$. Soit T une variable aléatoire ^{sur (a, b, P)} qui suit la loi uniforme

sur $]F(a), F(b)[$. la fonction de répartition F_T de T vérifie :

$$\forall z \in \mathbb{R}, F_T(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in]-\infty, F(a)] \\ \frac{z - F(a)}{F(b) - F(a)} & \text{si } z \in]F(a), F(b)[\\ 1 & \text{si } z \in [F(b), +\infty[\end{cases}$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, F_T(F(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x) \in]-\infty, F(a)] \\ \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} & \text{si } F(x) \in]F(a), F(b)[\\ 1 & \text{si } F(x) \in [F(b), +\infty[\end{cases}$$

comme F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, F_T(F(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a] \\ \frac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)} & \text{si } x \in]a, b[\\ 1 & \text{si } x \in [b, +\infty[\end{cases}$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, P_{\{a < X < b\}}(X \leq x) = F_T(F(x)).$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, F_T(F(x)) = P(T \leq F(x))$

Notons que T prend ses valeurs dans $]F(a), F(b)[$ et que F^{-1} est strictement croissante sur $]a, b[$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, F_T(F(x)) = P(F^{-1}(T) \leq x).$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, P_{\{a < X < b\}}(X \leq x) = F_T(F(x)) = P(F^{-1}(T) \leq x)$. avec T variable

aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ qui suit la loi uniforme $]F(a), F(b)[$. Ne reste plus

qu'à construire à partir de U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]F(a), F(b)[$.

Notons que $x \mapsto (F(b)-F(a))x + F(a)$ définit une bijection de $]0, 1[$ sur $]F(a), F(b)[$.

Posons alors $\tilde{T} = (F(b)-F(a))U + F(a)$. Notons que la variable aléatoire $\tilde{T}$ suit la loi uniforme sur $]F(a), F(b)[$. Soit $F_{\tilde{T}}$ sa fonction de répartition.

$\forall x \in \mathbb{R}, F_{\tilde{T}}(x) = P(\tilde{T} \leq x) = P((F(b)-F(a))U + F(a) \leq x) = P(U \leq \frac{x-F(a)}{F(b)-F(a)})$

$\uparrow$
 $F(b) > F(a)$

soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{x-F(a)}{F(b)-F(a)}$ appartient à $] -\infty, 0]$ si $x \leq F(a)$, à $]0, 1[$ si $x \in]F(a), F(b)[$,

à $[1, +\infty[$ si $x \in [F(b), +\infty[$.

Alors $F_{\tilde{T}}(x) = P(U \leq \frac{x-F(a)}{F(b)-F(a)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, F(a)] \\ \frac{x-F(a)}{F(b)-F(a)} & \text{si } x \in]F(a), F(b)[\\ 1 & \text{si } x \in [F(b), +\infty[\end{cases}$

Alors $\tilde{T}$ suit la loi uniforme sur $]F(a), F(b)[$. Posons $W = F^{-1}(\tilde{T})$.

Alors $W = F^{-1}((F(b)-F(a))U + F(a))$ et $\forall x \in \mathbb{R}, P_{\{a < X < b\}}(X \leq x) = P(W \leq x).$

Remarque. si $a = m$ et $b = +\infty$ (!!) on obtient le résultat de 9.3 a)...

Question 8 HEC 2011 S 108

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E pour lequel il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Q1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (on pourra penser au procédé d'orthonormalisation de Schmidt)

Q2. On suppose de plus que pour tout x dans E , $\langle u(x), x \rangle = 0$.

Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y \rangle = -\langle u(y), x \rangle$. Que peut-on dire de u ?

Cours X est une variable aléatoire. Rappeler la définition de la fonction de répartition F de X et en donner des propriétés.

Q1) Existe une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de u dans la base B soit triangulaire supérieure.

Pour tout k dans $\overline{1, n}$, $u(e_k)$ est combinaison linéaire de $e_1, e_2, \dots, e_k$.

rien : $\forall k \in \overline{1, n}$, $u(\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_k)) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$.

Le cours sur le procédé d'orthonormalisation de Schmidt montre qu'il existe une base $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de E , orthonormée et telle que :

$\forall k \in \overline{1, n}$, $\text{Vect}(e'_1, e'_2, \dots, e'_k) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ et $\langle e'_k, e'_k \rangle = 1$.

Soit $k \in \overline{1, n}$, $e'_k \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ donc $u(e'_k) \in u(\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$.

Alors $u(e'_k) \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{Vect}(e'_1, e'_2, \dots, e'_k)$.

donc pour tout $k \in \overline{1, n}$, $u(e'_k)$ est combinaison linéaire de $e'_1, e'_2, \dots, e'_k$.

Cela signifie que $M_{B'}(u)$ est triangulaire supérieure.

Existe une base orthonormée $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ telle que la matrice de u dans la base

B' soit triangulaire supérieure.

Q2) Soit $(x, y) \in E^2$. Alors $\langle u(x+y), x+y \rangle = 0$.

$$0 = \langle u(x+y), x+y \rangle = \langle u(x) + u(y), x+y \rangle = \underbrace{\langle u(x), x \rangle}_{=0} + \langle u(x), y \rangle + \underbrace{\langle u(y), x \rangle}_{=0} + \langle u(y), y \rangle.$$

Ainsi $\langle u(x), y \rangle = -\langle u(y), x \rangle$ et ceci pour tout $(x, y) \in E^2$.

Réponse : u est antisymétrique.

Pour $A' = \Pi_{B'}(u) = (a'_{ij})$. Noter que A' est antisymétrique.

Soit $(i, j) \in \overline{1, n}^2$ $u(e'_i) = \sum_{k=1}^n a'_{ki} e'_k$

$$\langle u(e'_i), e'_j \rangle = \sum_{k=1}^n a'_{ki} \langle e'_k, e'_j \rangle = a'_{ji} \quad \text{d'où} \quad \langle u(e'_j), e'_i \rangle = a'_{ij}.$$

$= \sum_{k=1}^n a'_{ki} \delta_{kj} = a'_{ji}$ car $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est orthonormée.

$$\text{Ainsi } \langle u(e'_i), e'_j \rangle = -\langle u(e'_j), e'_i \rangle.$$

Donc $a'_{ji} = -a'_{ij}$ et ceci pour tout $(i, j) \in \overline{1, n}^2$.

En fait $A' = A'$. A' est antisymétrique.

Alors $\forall i \in \overline{1, n}$, $a'_{ii} = -a'_{ii}$. $\forall i \in \overline{1, n}$, $a'_{ii} = 0$.

Soit $(i, j) \in \overline{1, n}^2$ tel que $i \neq j$.

1^{er} cas... $i > j$. Alors $a'_{ij} = 0$ car A' est triangulaire supérieure.

2nd cas... $i < j$. Alors $a'_{ji} = 0$ toujours parce que A' est triangulaire supérieure.

$$\text{Ainsi } a'_{ij} = -a'_{ji} = 0.$$

$$\text{Donc } \forall (i, j) \in \overline{1, n}^2, i \neq j \Rightarrow a'_{ij} = 0.$$

Finalement $\forall (i, j) \in \overline{1, n}^2$, $a'_{ij} = 0$. $A' = O_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Alors u est l'endomorphisme nul.

Sujet S 109 - Exercice

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1) Question de cours : Inégalité de Bienaymé-Tchébichev. Estimateur sans biais, convergent.

Pour un entier $n \geq 2$, on considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$

de loi uniforme sur $[0, A]$, où $A \in \mathbb{R}_+^*$ est inconnu. On pose $S_n = \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)$ et $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

2) Calculer l'espérance et la variance de S_n en fonction de A et n .

3) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n - A| > \varepsilon) = 0$.

4) Calculer la fonction de répartition F_n de M_n . La variable aléatoire M_n admet-elle une densité (si oui, la donner) ?

5) Soit $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$; on pose $\widetilde{M}_n = \alpha_n M_n$. Calculer les espérances $\mathbb{E}(\widetilde{M}_n)$ et $\mathbb{E}(\widetilde{M}_n^2)$.

6) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour que $\widetilde{M}_n$ soit un estimateur asymptotiquement sans biais de A .

7) On suppose la condition de la question précédente réalisée. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\widetilde{M}_n - A| > \varepsilon) = 0$.

8) Quel est le risque quadratique de $\widetilde{M}_n$? À quelle condition sur $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ s'agit-il d'un meilleur estimateur de A que S_n ?

En particulier, si on choisit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de façon à obtenir un estimateur sans biais de A , obtient-on un meilleur estimateur que S_n ?

Sujet S 109 - Exercice sans préparation

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont des valeurs propres. Démontrer que f est diagonalisable.

Q1 • X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ayant un moment d'ordre 2.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \text{ et } P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

- une estimation T_n de $g(\theta)$ et nous savons si $E_\theta(T_n) = g(\theta)$ pour tout $\theta \in \Theta$
- une suite d'estimations $(T_n)_{n \geq 1}$ de $g(\theta)$ et converge si pour tout $\theta \in \Theta$, la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers $g(\theta)$.

Q2 Pour tout $i \in \{1, n\}$, $E(X_i)$ existe et vaut $\frac{A}{2}$.

$$\text{Alors } E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \text{ existe et vaut } \sum_{i=1}^n E(X_i) \text{ d'ac } n \times \frac{A}{2}.$$

$$\text{d'ac } S_n = \sum_{i=1}^n X_i \text{ possède une espérance qui vaut } A.$$

pour tout $i \in \{1, n\}$, $V(X_i)$ existe et vaut $\frac{A^2}{12}$. de plus $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont à la fois indépendantes

Alors $V(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ existe et vaut $V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$ soit $n \times \frac{A^2}{12}$.

$$\text{d'ac } S_n = \sum_{i=1}^n X_i \text{ possède une variance qui vaut } \frac{4}{n^2} \times n \times \frac{A^2}{12} \text{ c'est à dire } \frac{A^2}{3n}.$$

Q3 $V(S_n)$ existe et vaut $\frac{A^2}{3n}$. l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad P(|S_n - E(S_n)| > \varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2} \text{ ou } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad P(|S_n - A| > \varepsilon) \leq \frac{A^2}{3n\varepsilon^2}.$$

pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A^2}{3n\varepsilon^2} = 0$ d'ac par encadrement, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|S_n - A| > \varepsilon) = 0.$$

Remarque...

Remarque... S_n est une estimation sans biais et converge de A .

Q4 Pour tout $i \in \{1, n\}$, X_i prend ses valeurs dans $[0, A]$ d'ac Π_n prend ses valeurs

dans $[0, A]$. Alors $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_n(x) = 0$ et $\forall x \in [A, +\infty[$, $F_n(x) = 1$.

$$\forall x \in [0, A], \quad F_n(x) = P(\Pi_n \leq x) = P(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x) = P(X_1 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x) = P(X_1 \leq x) \dots P(X_n \leq x)$$

↑ $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

$$\forall x \in [0, A], F_n(x) = \underbrace{(P(X_1 \leq x))}^{\substack{x_1, \dots, x_n \text{ i.i.d. loi} \\ X_1 \in U([0, A])}} = \left(\frac{x-0}{A-0} \right)^n = \frac{1}{A^n} x^n.$$

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{A^n} x^n & \text{si } x \in [0, A] \\ 1 & \text{si } x \in [A, +\infty[\end{cases}}}$$

$$\text{Notons que } \forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{A^n} x^n & \text{si } x \in [0, A] \\ 1 & \text{si } x \in [A, +\infty[\end{cases}. \quad \text{A } x \mapsto 0, \quad x \mapsto \frac{1}{A^n} x^n \text{ et } x \mapsto 1$$

sont de classe $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}$, donc F_n est de classe $\mathcal{B}$ sur $]-\infty, 0], [0, A], [A, +\infty[$.

Cela suffit pour dire que F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{B}$ au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{0, A\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Alors π_n est une variable aléatoire à densité.

$$\forall x \in]-A, 0[\cup]A, +\infty[, F_n'(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, A[, F_n'(x) = \frac{n}{A^n} x^{n-1}.$$

$$\text{Pour } \forall x \in \mathbb{R}, \underline{\underline{f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{A^n} x^{n-1} & \text{si } x \in [0, A] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}}$$

f_n est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_n' sur $\mathbb{R} \setminus \{0, A\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. f_n est une densité de π_n .

(Q5) Soit $r \in \mathbb{N}$. $\int_{-\infty}^0 t^r f_n(t) dt$ et $\int_A^{+\infty} t^r f_n(t) dt$ existent et valent 0.

$t \mapsto t^r f_n(t)$ est continue sur $[0, A]$ donc $\int_0^A t^r f_n(t) dt$ existe.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_n(t) dt$ converge. π_n possède un moment d'ordre r .

$$E(\pi_n^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_n(t) dt = \int_0^A t^r f_n(t) dt = \frac{n}{A^n} \int_0^A t^{n+r-1} dt = \frac{n}{A^n} \left[\frac{t^{n+r}}{n+r} \right]_0^A = \frac{n}{n+r} A^r.$$

$$\underline{\underline{E(\pi_n^r) = \frac{n}{n+r} A^r.}} \quad \text{En particulier } E(\pi_n) = \frac{n}{n+1} A \text{ et } E(\pi_n^2) = \frac{n}{n+2} A^2.$$

On $\tilde{\pi}_n = \alpha_n \pi_n$. Soit $E(\tilde{\pi}_n)$ et $E(\tilde{\pi}_n^2)$ existant.

$$E(\tilde{\pi}_n) = \alpha_n E(\pi_n) \text{ et } E(\tilde{\pi}_n^2) = \alpha_n^2 E(\pi_n^2).$$

$$E(\tilde{\pi}_n) = \alpha_n \frac{n}{n+1} A \text{ et } E(\tilde{\pi}_n^2) = \alpha_n^2 \frac{n}{n+2} A^2.$$

Q6 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\tilde{\pi}_n) = A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha_n \times \frac{n}{n+1} \right) = 1$

→ Supposons $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha_n \times \frac{n}{n+1} \right) = 1$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, par produit $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$.

→ Réciproquement si $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha_n \times \frac{n}{n+1} \right) = 1 \times 1 = 1$.

$$\text{Soit } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha_n \times \frac{n}{n+1} \right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E(\tilde{\pi}_n) = A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$$

$\tilde{\pi}_n$ est asymptotiquement sans biais si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$.

Q7 Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

L'inégalité de Markov nous donne que $P(|\tilde{\pi}_n - A| > \varepsilon) < \frac{E((\tilde{\pi}_n - A)^2)}{\varepsilon^2}$ car $\tilde{\pi}_n - A$

possède un moment d'ordre 2.

$$E((\tilde{\pi}_n - A)^2) = E(\tilde{\pi}_n^2) - 2A E(\tilde{\pi}_n) + A^2.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\tilde{\pi}_n) = A \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} E(\tilde{\pi}_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha_n^2 \times \frac{n}{n+2} A^2 \right) = 1^2 \times 1 \times A^2 = A^2.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} E((\tilde{\pi}_n - A)^2) = A^2 - 2A^2 + A^2 = 0. \text{ Alors par accroissement } \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\tilde{\pi}_n - A| > \varepsilon) = 0$$

et ce pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$. $\tilde{\pi}_n$ est une suite de variables aléatoires asymptotiquement sans biais et convergent de A.

Q8) Le vique quadratique $\tilde{\Pi}_n$ est $E((\tilde{\Pi}_n - A)^2)$.

$$E((\tilde{\Pi}_n - A)^2) = E(\tilde{\Pi}_n^2) - 2AE(\tilde{\Pi}_n) + A^2 = \alpha_n^2 \frac{n}{n+2} A^2 - 2A \alpha_n \frac{n}{n+1} A + A^2.$$

$$E((\tilde{\Pi}_n - A)^2) = \left[\frac{n}{n+2} \alpha_n^2 - \frac{2n}{n+1} \alpha_n + 1 \right] A^2.$$

Rappelons que le vique quadratique ^{de} S_n est $V(S_n)$ (et nous le dirons) donc $\frac{A^2}{3n}$.

$\tilde{\Pi}_n$ est un meilleur estimateur de A que S_n si et seulement si $\frac{n}{n+2} \alpha_n^2 - \frac{2n}{n+1} \alpha_n + 1 \leq \frac{1}{3n}$.

Considérons l'inéquation $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\frac{n}{n+2} x^2 - \frac{2n}{n+1} x + 1 \leq \frac{1}{3n}$ ou $x \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\frac{n}{n+2} x^2 - \frac{2n}{n+1} x + \frac{3n-1}{3n} \leq 0 \text{ ou } x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \underbrace{x^2 - 2 \frac{n+2}{n+1} x + \frac{(3n-1)(n+2)}{3n^2}}_{P(x)} \leq 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$P(x) = \left(x - \frac{n+2}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 + \frac{(3n-1)(n+2)}{3n^2} = \left(x - \frac{n+2}{n+1}\right)^2 - \frac{(n+2)(n^2-n+1)}{3n^2(n+1)^2}$$

$$P(x) = \left(x - \frac{n+2}{n+1} + \sqrt{\frac{(n+2)(n^2-n+1)}{3n^2(n+1)^2}}\right) \left(x - \frac{n+2}{n+1} - \sqrt{\frac{(n+2)(n^2-n+1)}{3n^2(n+1)^2}}\right).$$

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{n+2}{n+1} - \sqrt{\frac{(n+2)(n^2-n+1)}{3n^2(n+1)^2}}, \frac{n+2}{n+1} + \sqrt{\frac{(n+2)(n^2-n+1)}{3n^2(n+1)^2}} \right]$$

un calcul simple montre que la première borne de cet intervalle est strictement positive.

Alors $\tilde{\Pi}_n$ est un meilleur estimateur de A que S_n si et seulement si

$$\alpha_n \in \left[\frac{n+2}{n+1} - \sqrt{\frac{(n+2)(n^2-n+1)}{3n^2(n+1)^2}}, \frac{n+2}{n+1} + \sqrt{\frac{(n+2)(n^2-n+1)}{3n^2(n+1)^2}} \right] !!$$

Notons que si cette condition est vérifiée à partir d'un certain rang alors

les $\alpha_n \rightarrow 1$ et $\tilde{\Pi}_n$ est asymptotiquement meilleur.

$\tilde{\pi}_n$ est une biaisée $E(\tilde{\pi}_n) = A$.

$$E(\tilde{\pi}_n) = A \Leftrightarrow \alpha_n \times \frac{n}{n+1} A = A \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{n+1}{n}.$$

Supposons donc $\alpha_n = \frac{n+1}{n}$.

lequel que soit chaque de $\tilde{\pi}_n$ est $E((\tilde{\pi}_n - A)^2)$.

$$A E((\tilde{\pi}_n - A)^2) = \left[\frac{n}{n+1} \alpha_n^2 - \frac{2n}{n+1} \alpha_{n+1} \right] A^2 = \left[\frac{n}{n+1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 - \frac{2n}{n+1} \times \frac{n+1}{n} + 1 \right] A^2$$

$$E((\tilde{\pi}_n - A)^2) = \left[\frac{(n+1)^2}{(n+1)n} - 1 \right] A^2 = \frac{(n+1)^2 - n(n+1)}{n(n+1)} A^2 = \frac{1}{n(n+1)} A^2$$

$$\frac{1}{n(n+1)} A^2 \leq \frac{1}{3n} A^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow n \geq 1.$$

Si $\tilde{\pi}_n$ est aussi biaisé, $\tilde{\pi}_n$ est un meilleur estimateur que S_n .

Question 9 HEC 2011 S 109

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont des valeurs propres. Démontrer que f est diagonalisable.

Cours Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Estimateur sans biais, convergent

1^{ère} Cas... f n'est pas injectif. Alors 0 est valeur propre de f .

Donc f possède trois valeurs propres distinctes et f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3. Alors f est diagonalisable.

2^{ème} Cas... f est injectif. Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et que $\dim \mathbb{R}^3 < +\infty$: f est bijectif.

$f^4 = f^2$ donne en composant deux fois par f^{-1} : $f^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$, ou : $f^2 - \text{Id}_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

χ_f^2 est un polynôme annulateur de f dont les racines sont -1 et 1 . Alors $\text{Sp } f \subset \{-1, 1\}$.

Comme -1 et 1 sont deux valeurs propres de f : $\text{Sp } f = \{-1, 1\}$. (1)

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $f^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ donc f est une symétrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

Alors $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{SEV}(f, 1) \oplus \text{SEV}(f, -1)$ (2)

(1) et (2) montrent que f est diagonalisable.

Sujet S112 - Exercice

Dans cet exercice toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- 1) Question de cours : Rappeler la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.
- 2) Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On considère deux suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires convergeant en probabilité, la première vers u , la seconde vers v .

Démontrer que la suite de variables aléatoires $(U_n + V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $u + v$.

- 3) Dans cette question, on suppose les réels u et v supérieurs ou égaux à 1.
 - a) Établir l'inégalité : $|\ln(u) - \ln(v)| \leq |u - v|$.
 - b) En déduire que si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires ne prenant que des valeurs supérieures ou égales à 1, convergeant en probabilité vers u , la suite de variables aléatoires $(\ln(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\ln(u)$.

- 4) Dans cette question, x désigne un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

- a) Établir, pour tout $t \in [0, x]$, l'inégalité : $\frac{x-t}{1-t} \leq x$.
- b) En déduire la limite de l'intégrale $\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt$ quand l'entier n tend vers l'infini.
- c) Démontrer l'égalité : $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

- 5) Dans cette question, p désigne un paramètre strictement compris entre 0 et 1.

Soit X une variable aléatoire discrète telle que, pour tout entier k strictement positif, la probabilité que la variable X prenne la valeur k soit donnée par : $\mathbb{P}[X = k] = \frac{(1-p)^k}{k \ln(\frac{1}{p})}$

Le résultat de la question précédente, appliqué à $x = 1 - p$, prouve que X ne peut pas prendre d'autres valeurs.

- a) Établir l'égalité : $\frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X^2]} = p$, où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance.
- b) Démontrer que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X , alors

$$\widehat{p}_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n (X_i)^2} \text{ est un estimateur convergent du paramètre } p.$$

Sujet S 112 - Exercice sans préparation

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On admet que $A^2 + I_3 = 2A$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

- 1) Montrer que A admet une seule valeur propre λ . A est-elle diagonalisable ?
- 2) Déterminer le sous-espace associé à λ .
- 3) Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

HEC 2011 S112 Correction de l'exercice

Q1) Soit $(X_n)_{n \geq n_0}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. La suite $(X_n)_{n \geq n_0}$ converge en probabilité vers X si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0;$$

$$\text{ou } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0;$$

$$\text{ou } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1;$$

$$\text{ou } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1.$$

Q2) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\omega \in \Omega$.

$$|(U_n + V_n)(\omega) - (u + v)| = |(U_n(\omega) - u) + (V_n(\omega) - v)| \leq |U_n(\omega) - u| + |V_n(\omega) - v|.$$

$$\text{Ainsi si } |U_n(\omega) - u| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |V_n(\omega) - v| < \frac{\varepsilon}{2} : |(U_n + V_n)(\omega) - (u + v)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$$\text{Alors } \{|U_n - u| < \frac{\varepsilon}{2}\} \cap \{|V_n - v| < \frac{\varepsilon}{2}\} \subset \{|(U_n + V_n) - (u + v)| < \varepsilon\}$$

$$\text{d'où } \{|(U_n + V_n) - (u + v)| < \varepsilon\} \subset \{|U_n - u| < \frac{\varepsilon}{2}\} \cap \{|V_n - v| < \frac{\varepsilon}{2}\}$$

$$\text{Alors } \{|(U_n + V_n) - (u + v)| \geq \varepsilon\} \subset \{|U_n - u| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|V_n - v| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} = \{|U_n - u| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|V_n - v| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

Pour conclure de P il vient :

$$0 \leq P(|(U_n + V_n) - (u + v)| \geq \varepsilon) \leq P(\{|U_n - u| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|V_n - v| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}).$$

$$0 \leq P(|(U_n + V_n) - (u + v)| \geq \varepsilon) \leq P(|U_n - u| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(|V_n - v| \geq \frac{\varepsilon}{2}) - P(\{|U_n - u| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cap \{|V_n - v| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}).$$

$$\text{Alors } 0 \leq P(|(U_n + V_n) - (u + v)| \geq \varepsilon) \leq P(|U_n - u| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(|V_n - v| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \text{ et ceci pour tout } n$$

dans $\mathbb{N}^*$.

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers u et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers v .

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|U_n - u| \geq \frac{\varepsilon}{2}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|V_n - v| \geq \frac{\varepsilon}{2}) = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} [P(|U_n - u| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(|V_n - v| \geq \frac{\varepsilon}{2})] = 0$$

Ainsi pour conclure $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|(U_n + V_n) - (u + v)| \geq \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $(U_n + V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $u + v$.

© Nous devrions dire que la variable aléatoire certaine égale à ...

Q3 a) On est de dans $\mathcal{B}^2$ ou $[1, +\infty[$. $\forall t \in [1, +\infty[$, $|h'(t)| = |\frac{1}{t}| = \frac{1}{t} \leq 1$.

Alors l'égalité des accroissements nous montre que :

$$\forall (u, v) \in [1, +\infty[\times [1, +\infty[, |h(u) - h(v)| \leq 1 \times |u - v|.$$

$$\forall (u, v) \in [1, +\infty[\times [1, +\infty[, |h(u) - h(v)| \leq |u - v|.$$

b) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires ne prenant que des valeurs supérieures ou égales à 1 qui converge en probabilité vers u .

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall \omega \in \Omega$, $|h(U_n(\omega)) - h(u)| \leq |U_n(\omega) - u|$ (*) $\leftarrow$ Vrai en chaque ω dans la suite.

$$\text{Ainsi si } |h(U_n(\omega)) - h(u)| \geq \varepsilon : |U_n(\omega) - u| \geq \varepsilon. \quad \left. \begin{array}{l} U_n(\omega) \geq 1 \\ \text{et } u \geq 1 \end{array} \right\} \uparrow$$

$$\text{Alors } \{ |h(U_n) - h(u)| \geq \varepsilon \} \subset \{ |U_n - u| \geq \varepsilon \}.$$

$$\text{Donc } 0 \leq P(|h(U_n) - h(u)| \geq \varepsilon) \leq P(|U_n - u| \geq \varepsilon) \text{ et ceci pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Or } (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge en probabilité vers } u \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|U_n - u| \geq \varepsilon) = 0.$$

Alors par le théorème on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|h(U_n) - h(u)| \geq \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Or, donc $(h(U_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $h(u)$.

Remarque... Pour justifier (*):

1) On sait que $\forall \omega \in \Omega$, $U_n(\omega) \geq 1$ par hypothèse.

2) Notons que $u \geq 1$. Supposons $u < 1$ et posons $\varepsilon = 1 - u$. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\forall \omega \in \Omega, U_n(\omega) \geq 1 = u + \varepsilon. \quad \forall \omega \in \Omega, U_n(\omega) - u \geq \varepsilon > 0.$$

$$\text{Alors } \forall \omega \in \Omega, |U_n(\omega) - u| \geq \varepsilon. \text{ Donc } P(|U_n - u| \geq \varepsilon) = 1 \text{ et ceci pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^*.$$

C'est donc impossible d'avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|U_n - u| \geq \varepsilon) = 0$! Donc $\underline{u \geq 1}$.

Q4 $x \in]0, 1[$.

$$\begin{cases} 1-x > 0 \\ t \in [0, x] \text{ donc } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

$$a) \text{ Soit } t \in [0, x]. \quad x - \frac{x-t}{1-t} = \frac{x(1-t) - (x-t)}{1-t} = \frac{t(1-x)}{1-t} \geq 0; \quad \frac{x-t}{1-t} \leq x.$$

$$\forall t \in [0, x], \frac{x-t}{1-t} \leq x. \text{ Mais } \forall t \in [0, x], 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0, x]$, $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$

Donc $\forall t \in [0, x]$, $0 \leq \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leq x^n$. Alors $0 \leq \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt \leq \int_0^x x^n dt = x^{n+1}$.

Comme $0 < x < 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0$.

Alors par encadrement il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt = 0$.

c) Posons $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi(u) = \frac{1}{1-u}$. $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi(u) = -\frac{1}{1-u}$.

φ est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi'(u) = \frac{1}{1-u}$.

φ' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

$\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi'(u) = (1-u)^{-1}$, $\varphi''(u) = (1-u)^{-2}$, $\varphi'''(u) = 2(1-u)^{-3}$, $\varphi^{(4)}(u) = 6(1-u)^{-4}$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi^{(n)}(u) = (n-1)!(1-u)^{-n}$.

• La propriété est vraie pour $n=1$

• Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi^{(n)}(u) = (n-1)!(1-u)^{-n}$ donc $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi^{(n+1)}(u) = (n-1)!(-n)(1-u)^{-n-1}$.

Alors $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi^{(n+1)}(u) = n!(1-u)^{-n-1}$ ce qui achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in]-\infty, 1[$, $\varphi^{(n)}(u) = (n-1)!(1-u)^{-n} = \frac{(n-1)!}{(1-u)^n}$.

Notons encore que $\varphi(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^{(n)}(0) = (n-1)!$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons à φ la formule de Taylor avec reste intégral

à l'ordre n sur $[0, x]$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-0)^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) dt.$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \times (k-1)! + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times \frac{n!}{(1-t)^{n+1}} dt$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{dt}{1-t}.$$

$$\forall t \in [0, \epsilon], 0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-\epsilon} \text{ et } \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \geq 0.$$

Alors $\forall t \in [0, \epsilon], 0 \leq \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{1-t} \leq \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{1-\epsilon}$. En intégrant il vient :

$$0 \leq \int_0^\epsilon \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{dt}{1-t} \leq \frac{1}{1-\epsilon} \int_0^\epsilon \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt \text{ car } 0 \leq \epsilon.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\epsilon \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-\epsilon} \int_0^\epsilon \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt \right) = 0.$$

$$\text{Par encadrement il vient alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\epsilon \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{dt}{1-t} = 0.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\psi(x) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \right) = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \psi(x) = \ln \frac{1}{1-x}.$$

Alors la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ converge.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \ln \frac{1}{1-x}.$$

Q5 a) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{k \left(\frac{1}{p}\right)} (1-p)^k \text{ et } 0 < 1-p < 1 \text{ (} p \in]0,1[).$

Alors la série de terme général $(1-p)^k$ converge. Ainsi la série de terme général

$\mathbb{P}(X=k)$ converge. De plus $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=k) \geq 0$.

Alors la série de terme général $\mathbb{P}(X=k)$ est absolument convergente.

$$\text{Donc } \underline{E(X) \text{ existe}} \text{ et } E(X) = \frac{1}{k \left(\frac{1}{p}\right)} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{1}{k \left(\frac{1}{p}\right)} \times (1-p) \times \frac{1}{1-(1-p)}.$$

$$E(X) = \frac{1-p}{p} \times \frac{1}{k \left(\frac{1}{p}\right)}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, k \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{k \left(\frac{1}{p}\right)} k (1-p)^k = \frac{1-p}{k \left(\frac{1}{p}\right)} \times k (1-p)^{k-1}$$

la série de terme général $k (1-p)^{k-1}$ converge car $0 < 1-p < 1$.

Remarque... On aurait gagné du temps en notant que pour tout r dans $\mathbb{N}$, x possède un moment d'ordre r ...

Ainsi la série de terme général $k^2 P(X=k)$ est convergente et même absolument convergente car elle est à termes positifs.

Ainsi $E(X^2)$ existe. De plus $E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{1-p}{\ln(\frac{1}{p})} \frac{1}{(1-(1-p))^2}$.

$$E(X^2) = \frac{1-p}{\ln(\frac{1}{p})} \frac{1}{p^2} = E(X) \times \frac{1}{p}. \text{ de plus } E(X^2) \neq 0.$$

$$\text{Avec } \frac{E(X)}{E(X^2)} = p.$$

b) Posons $V_1 \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ et $V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2$.

- $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n)$ existe et vaut $\frac{1}{\ln(\frac{1}{p})} \frac{1-p}{p}$.
- Les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possèdent un moment d'ordre deux d'où une variance qui est commune car ces variables aléatoires et même loi.

La loi faible des grands nombres nous dit alors que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{\ln(\frac{1}{p})} \frac{1-p}{p}$ ou vers $E(X)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ d'où pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, U_n qui est égale à $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$.

Alors il s'agit de montrer que $(\ln U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\ln(E(X))$.

- comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes d'où $(X_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.
- Les variables de la suite $(X_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont une espérance commune qui vaut

$$\frac{1-p}{\ln(\frac{1}{p})} \times \frac{1}{p^2}.$$

• notons que X^4 possède un moment d'ordre 2 donc que $E(X^4)$ existe.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, k^4 P(X=k) = \frac{1}{k^2} k^5 (1-p)^k.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, k^2 (k^4 P(X=k)) = \frac{1}{k^2} k^5 (1-p)^k.$$

$$\text{Alors } \lim_{k \rightarrow +\infty} (k^2 (k^4 P(X=k))) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k^2} k^5 (1-p)^k \right) = 0 \text{ par croissance comparée car}$$

$$0 < 1-p < 1.$$

$$\text{Donc } \forall k, k^4 P(X=k) = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\text{et } \forall k \in \mathbb{N}^*, k^4 P(X=k) \geq 0 \text{ et } \frac{1}{k^2} \geq 0$$

et la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge.

Règles de comparaison des séries à termes positifs notant que la série de terme général $k^4 P(X=k)$ converge et elle est même absolument convergente.

Donc X possède un moment d'ordre 4. Alors X^2 possède un moment d'ordre 2.

Ainsi les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possèdent un moment d'ordre 2 donc une variance qui est commune car les variables aléatoires ont même loi.

Ceci permet de dire que $\left(\frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la

variable aléatoire certaine égale à $\frac{1-p}{h(\frac{1}{p})} \frac{1}{p^2}$ ou à $E(X^2)$.

Donc $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $\frac{1-p}{h(\frac{1}{p})} \frac{1}{p^2}$ ou à $E(X^2)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n^2 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, V_n prend ses valeurs dans $\mathbb{C}_{1,+} \cap \mathbb{C}$.

Ainsi $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine

égale à $h\left(\frac{1-p}{h(\frac{1}{p})} \frac{1}{p^2}\right)$ ou à $h(E(X^2))$.

* Et alors donc que la suite $(-h(V_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $-h(E(X'))$. Exercice.. Le maître!

donc ça permet de dire que $(h(U_n) + (-h(V_n)))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $h(E(X)) + (-h(E(X')))$.

$$\text{A } \forall n \in \mathbb{N}^*, h(U_n) - (-h(V_n)) = h\left(\frac{U_n}{V_n}\right) \text{ et } h(E(X)) + (-h(E(X')) = h\left(\frac{E(X)}{E(X')}\right) = h(p).$$

Alors $(h\left(\frac{U_n}{V_n}\right))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $h(p)$.

Lemme. Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ qui converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à c .
Alors la suite $(e^{Z_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à e^c .

Preuve du lemme. par hypothèse $\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Z_n - c| \geq \varepsilon') = 0$.

$$\text{Soit } \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*. \forall n \in \mathbb{N}^*, P(|Z_n - c| \geq \varepsilon') = P(\{Z_n - c \geq \varepsilon'\} \cup \{Z_n - c \leq -\varepsilon'\}) = P(Z_n - c \geq \varepsilon') + P(Z_n - c \leq -\varepsilon')$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(|Z_n - c| \geq \varepsilon') = P(Z_n \geq c + \varepsilon') + P(Z_n \leq c - \varepsilon').$$

↑ le deuxième est à compléter.

$$\text{Alors, } \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq P(Z_n \geq c + \varepsilon') \leq P(|Z_n - c| \geq \varepsilon')$$

$$\text{ou } \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq P(Z_n \leq c - \varepsilon') \leq P(|Z_n - c| \geq \varepsilon').$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Z_n - c| \geq \varepsilon') = 0$ il vient par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \geq c + \varepsilon') = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \leq c - \varepsilon') = 0 \text{ et ceci pour tout } \varepsilon' \text{ dans } \mathbb{R}_+^*.$$

* Il s'agit maintenant de prouver que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|e^{Z_n} - e^c| \geq \varepsilon) = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(|e^{Z_n} - e^c| \geq \varepsilon) = P(\{e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon\} \cup \{e^{Z_n} \leq e^c - \varepsilon\}) = P(e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon) + P(e^{Z_n} \leq e^c - \varepsilon).$$

$$\text{notons alors que } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(e^{Z_n} \leq e^c - \varepsilon) = 0.$$

soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\bullet \{e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon\} = \{Z_n \geq h(e^c + \varepsilon)\}. \quad P(e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon) = P(Z_n \geq h(e^c + \varepsilon)).$$

$$\text{Posons } \varepsilon' = h(e^c + \varepsilon) - c. \quad h(e^c + \varepsilon) = c + \varepsilon' \text{ et } \varepsilon' = h(e^c + \varepsilon) - c > h(e^c) - c = 0. \quad \uparrow \varepsilon > 0$$

$$\text{Alors } \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$\text{donc } P(e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon) = P(Z_n \geq h(e^c + \varepsilon)) = P(Z_n \geq c + \varepsilon') \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \geq c + \varepsilon') = 0$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon) = 0.$$

$n \rightarrow +\infty$

• Si $e^c - \varepsilon > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(e^{Z_n} \leq e^c - \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\emptyset) = 0$! Supposons $e^c - \varepsilon > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(e^{Z_n} \leq e^c - \varepsilon) = P(Z_n \leq \ln(e^c - \varepsilon)) = P(Z_n \leq c - (c - \ln(e^c - \varepsilon)))$.

Pour $\varepsilon' = c - \ln(e^c - \varepsilon)$. $\varepsilon' = c - \ln(e^c - \varepsilon) > c - \ln e^c = 0$. $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$.
 $\uparrow \ln(e^c - \varepsilon) < \ln e^c$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} P(e^{Z_n} \leq e^c - \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq c - \varepsilon') = 0$.

Finalement $\lim_{n \rightarrow \infty} P(e^{Z_n} \geq e^c + \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(e^{Z_n} \leq e^c - \varepsilon) = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|e^{Z_n} - e^c| \geq \varepsilon) = 0$ et

ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $(e^{Z_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à e^c .
 ceci a déjà été prouvé au cours. ▲

Nous avions vu que $(\frac{u_n}{v_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $\frac{u}{v}$. Le cours permet alors de dire que $(\frac{u_n}{v_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $e^{\ln \frac{u}{v}}$ d'où $e^{\ln \frac{u}{v}}$.

Finalement $\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i^c} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à p .

d'où $\tilde{P}_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i^c}$ et un échantillon convergent du paramètre p .

Question 10 HEC 2011 S 112

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que $A^2 + I_3 = 2A$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

Q1. Montrer que A admet une seule valeur propre λ . A est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer le sous-espace propre associé à λ .

Q3. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cours Rappeler la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-2-2 & 6-2 & -6+2 \\ -3+1 & -2+2 & 2 \\ 3-1 & 2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2A. \quad \underline{\underline{A^2 + I_3 = 2A !}}$$

Q1) $A^2 - 2A + I_3 = 0_{\Pi_3(\mathbb{R})}$. $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur ^{de A} et le seul qui soit 1.

dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. $Sp_{\mathbb{R}} A \subset \{1\}$ et $Sp_{\mathbb{C}} A \subset \{1\}$

V1 Or A admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$.

Ainsi 1 est la seule valeur propre de A .

V2 $Sp_{\mathbb{R}} A \subset \{1\}$. Supposons que 1 n'est pas valeur propre de A . Alors $A - I_3$ est inversible. Or $0_{\Pi_3(\mathbb{R})} = (A - I_3)^2$ et inversible comme produit de

deux matrices inversibles !

cette contradiction montre que $1 \in Sp_{\mathbb{R}} A$... et que $1 \in Sp_{\mathbb{C}} A$

Ainsi 1 est la seule valeur propre de A

Supposons que A soit diagonalisable. Alors $SEP(A, 1) = \Pi_3(\mathbb{R})$.

Or $3 = \dim \Pi_{3,1}(\mathbb{R}) = \dim SEP(A, 1) = 3 - \text{rg}(A - I_3)$; $\text{rg}(A - I_3) = 0$.

Alors $A - I_3 = 0_{\Pi_3(\mathbb{R})}$. $A = I_3$!!

Or A n'est pas diagonalisable.

(Q2) Soit $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y - 2z = x \\ -x + z = y \\ x + y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x + y - z) = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y - z = 0.$$

$\text{SEP}(A, 1)$ est le plan vectoriel de $\Pi_{3,1}(\mathbb{R})$ d'équation $x + y - z = 0$ dans la base canonique de $\Pi_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\text{SEP}(A, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de cardinal 2 de $\text{SEP}(A, 1)$ qui est de dimension 2.

Alors $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{SEP}(A, 1)$.

(Q3) Posons $E = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$. Posons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est semblable à A il suffit de trouver l'existence d'une base

$\mathcal{B}'$ de E telle que $\Pi_{\mathcal{B}'}(f) = B$.

→ Analyse... Supposons que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base de E telle que $\Pi_{\mathcal{B}'}(f) = B$.

$$\text{Alors } f(e'_1) = e'_1, f(e'_2) = e'_2 \text{ et } f(e'_3) = e'_2 + e'_3.$$

$$\text{Donc } e'_1 \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E), e'_2 \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E), \underline{e'_2 = (f - \text{Id}_E)(e'_3) \in \text{Im}(f - \text{Id}_E)}.$$

$$\text{Ainsi } e'_1 \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E), e'_2 \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(f - \text{Id}_E) \text{ et } e'_2 = (f - \text{Id}_E)(e'_3).$$

$$\rightarrow \underline{\text{Synthèse}}, \quad \text{Sur } f = S_f A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Comme } \text{SEP}(A, 1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right);$$

$$\text{SEP}(f, 1) = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_3).$$

$$\Pi_{\mathcal{B}}(f - \text{Id}_E) = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Alors } \text{Im}(f - \text{Id}_E) = \text{Vect}(2e_1 - e_2 + e_3, 2e_2 - e_1 + e_3, -2e_1 + e_2 - e_3).$$

$$\text{Im}(f - \text{Id}_E) = \text{Vect}(2e_1 - e_2 + e_3). \quad \text{Remarquons que } 2e_1 - e_2 + e_3 = 2(e_1 + e_3) - (e_2 + e_3) \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E).$$

$$\text{Puis on a alors } \underline{e'_2 = 2e_1 - e_2 + e_3}. \quad \text{Notons que } e'_2 = (f - \text{Id}_E)(e'_3). \quad \text{Puis on a alors } \underline{e'_3 = e_3}.$$

Pour enfin $e'_3 = e_1 + e_3$.

$e'_1 \in \ker(f - 3\text{Id}_E)$ donc $f(e'_1) = e'_1$.

$e'_2 \in \ker(f - 3\text{Id}_E)$ donc $f(e'_2) = e'_2$.

$e'_3 = (f - 3\text{Id}_E)(e_3) = (f - 3\text{Id}_E)(e'_3)$; $f(e'_3) = e'_2 + e'_3$.

Notons alors que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E . Comme le cardinal de B' coïncide avec la dimension de E il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0_E$.

$$\alpha(e_1 + e_3) + \beta(2e_3 - e_1 + e_3) + \gamma e_3 = 0_E$$

$$(\alpha + 2\beta + \gamma)e_3 - \beta e_1 + (\alpha + \beta)e_3 = 0_E. \text{ Comme } (e_1, e_2, e_3) \text{ est libre:}$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = -\beta = \alpha + \beta = 0. \text{ Alors } \beta = 0, \alpha = 0 \text{ et } \gamma = 0.$$

ceci achève de montrer que B' est une base de E . De plus $\pi_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$.

$\pi_B(f) = A$ et $\pi_{B'}(f) = B$ donc A et B sont semblables.

Remarque. Soit P la matrice de passage de $B \rightarrow B'$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$B = \pi_{B'}(f) = P^{-1} \pi_B(f) P = P^{-1} A P. \quad \underline{\underline{B = P^{-1} A P}}$$

Exercice 1. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Sujet S 1152 - Exercice

- 1) Question de cours : Théorème de d'Alembert-Gauss.
- 2) On considère l'équation (1) dont l'inconnue x est réelle :

$$x^3 - x^2 + k = 0 \quad (1).$$

Donner en fonction de $k \in \mathbb{R}$, le nombre de racines de (1).

- 3) On suppose que (1) possède trois racines (éventuellement confondues) que l'on note α , β et γ . On pose :

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma, \tau = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma \text{ et } \pi = \alpha\beta\gamma.$$

Montrer que $\sigma = 1$, $\tau = 0$, $\pi = -k$.

Réciproquement, si on suppose $\sigma = 1$, $\tau = 0$, $\pi = -k$, peut-on en déduire que les nombres α , β et γ sont les trois solutions de (1) ?

- 4) Soit a , b et c , trois réels donnés. On note $s = a + b + c$, $t = ab + ac + bc$ et $p = abc$.
On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant A pour matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

- a) Montrer que s est une valeur propre de A et donner un vecteur propre associé à s .
- b) Montrer que le plan vectoriel P d'équation $x + y + z = 0$ est stable par f .
- c) On suppose qu'il existe une autre valeur propre $\lambda \neq s$. Montrer que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est inclus dans P .

Dans la suite, on suppose que : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $t = ab + ac + cb = 0$ et $a + b + c > 0$.

- 5) a) Montrer que a , b , c sont racines de (1) et $k \in [0, \frac{4}{27}]$.
- b) Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & r \end{pmatrix}$.
- c) Montrer que $u = r$, $v = -w$ et $u^2 + w^2 = 1$. En déduire l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = r = \cos \theta$ et $w = -v = \sin \theta$. L'endomorphisme f admet-il d'autres valeurs propres que 1 ?

Sujet S 1152 - Exercice sans préparation

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ i.i.d.. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k suit une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

On pose $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Etudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

HEC 2011 S 1152 correction de l'exercice

Q1 Théorème de d'Alembert-Gauss et ses corollaires.

- Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine.
- Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé d'un produit de polynômes de degré 1.
- Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré r supérieur ou égal à 1 possède r racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

Q2 Pour $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^3 - x^2$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 3x^2 - 2x = 3x(x - \frac{2}{3})$.

$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[, g'(x) > 0$; $\forall x \in]0, \frac{2}{3}[, g'(x) < 0$; $g'(0) = g'(\frac{2}{3}) = 0$.

Alors g est strictement croissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $] \frac{2}{3}, +\infty[$.

de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} g(x) = -\frac{4}{27}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Ainsi g réalise une bijection de $] -\infty, 0[$ sur $] -\infty, 0[$ et de $] \frac{2}{3}, +\infty[$ sur $] -\frac{4}{27}, +\infty[$.

Donc $\forall a \in] -\infty, 0[, \exists ! x \in] -\infty, 0[, g(x) = a$

$\forall a \in] -\frac{4}{27}, +\infty[, \exists ! x \in] \frac{2}{3}, +\infty[, g(x) = a$.

g est strictement décroissante et continue sur $[0, \frac{2}{3}]$. de plus $g(0) = 0$ et $g(\frac{2}{3}) = -\frac{4}{27}$.

g admet alors une bijection de $[0, \frac{2}{3}]$ sur $[-\frac{4}{27}, 0]$.

$\forall a \in [-\frac{4}{27}, 0], \exists ! x \in [0, \frac{2}{3}], g(x) = a$.

Soit a un élément de $\mathbb{R}$.

cherchons le nombre de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}$ et $g(x) = a$ (2)

1^{er} cas... $a \in] -\infty, -\frac{4}{27}[$. Alors (1) admet une solution et une seule sur $] -\infty, 0[$

et pas de solution sur $[0, \frac{2}{3}]$ et sur $] \frac{2}{3}, +\infty[$

2^{ème} cas... $\alpha = -\frac{4}{27}$. (2) admet alors une solution & une seule sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, \frac{4}{3}]$ & pas de solution sur $]\frac{4}{3}, +\infty[$.

3^{ème} cas... $\alpha \in]-\frac{4}{27}, 0[$. (2) admet une solution & une seule sur $]-\infty, 0[$, $[0, \frac{4}{3}]$ et sur $]\frac{4}{3}, +\infty[$.

4^{ème} cas... $\alpha = 0$. (2) admet une solution & une seule sur $[0, \frac{4}{3}]$ et sur $]\frac{4}{3}, +\infty[$ et pas de solution sur $]-\infty, 0[$.

5^{ème} cas... $\alpha \in]0, +\infty[$. (2) admet une solution & une seule sur $]\frac{4}{3}, +\infty[$ et pas de solution sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, \frac{4}{3}]$.

Ainsi (2) admet :
 → une solution si $\alpha \in]-\infty, -\frac{4}{27}[\cup]0, +\infty[$
 → deux solutions si $\alpha \in \{-\frac{4}{27}, 0\}$
 → trois solutions si $\alpha \in]-\frac{4}{27}, 0[$

$$\forall k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + k = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = -k$$

soit $k \in \mathbb{R}$. L'équation $x \in \mathbb{R}$ & $x^3 - x^2 + k = 0$ admet :

→ une solution si $k \in]-\infty, 0[\cup]\frac{4}{27}, +\infty[$.
 → deux solutions si $k \in \{0, \frac{4}{27}\}$
 → trois solutions si $k \in]0, \frac{4}{27}[$

Q3) Par hypothèse $x^3 - x^2 + k = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ car $x^3 - x^2 + k$ est un polynôme unitaire de degré 3 qui admet trois racines α, β et γ .

$$x^3 - x^2 + k = (x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta)(x-\gamma) = x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x - \gamma(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta)$$

deux polynômes égaux ont les mêmes coefficients.

$$\text{Ainsi } \begin{cases} 1 = 1 \\ -1 = -(\alpha+\beta) - \gamma \\ 0 = \alpha\beta + \gamma(\alpha+\beta) \\ k = -\gamma\alpha\beta \end{cases} \quad \text{Alors } \begin{cases} \sigma = \alpha+\beta+\gamma = 1 \\ \tau = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0 \\ \pi = \alpha\beta\gamma = -k \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\sigma = 1, \tau = 0 \text{ et } \pi = -k.}}$$

Réciproquement supposons que $\sigma = 1, \tau = 0$ et $\pi = -k$.

$$(X-\alpha)(X-\beta)(X-\delta) = X^3 - (\alpha+\beta+\delta)X^2 + (\alpha\beta+\beta\delta+\delta\alpha)X - \alpha\beta\delta$$

$$(X-\alpha)(X-\beta)(X-\delta) = X^3 - \sigma X^2 + \tau X - \pi = X^3 - X^2 + k.$$

Les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ sont α, β, δ .

Ainsi les solutions de (1) sont α, β et δ .

Finalement α, β et δ sont les solutions de (1) si et seulement si $\sigma = 1, \tau = 0$ et $\pi = -k$.

Q4 a) Posons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $U \neq 0$ et $AU = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ c+a+b \\ b+c+a \end{pmatrix} = (a+b+c)U$.

Ainsi $\lambda = a+b+c$ est une valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

b) Soit $u = x e_1 + y e_2 + z e_3$ un élément du plan P . $x+y+z=0$.

$$f(u) = (ax+by+cz)e_1 + (cx+ay+bz)e_2 + (bx+cy+az)e_3.$$

$$\text{Or } (ax+by+cz) + (cx+ay+bz) + (bx+cy+az) = a(x+y+z) + b(y+z+x) + c(z+x+y) = 0$$

Ainsi $f(u) \in P$.

$\forall u \in P, f(u) \in P$. P est stable par f .

c) Supposons qu'il existe une valeur propre λ pour f différente de 0.

Soit $u = x e_1 + y e_2 + z e_3$ un élément de $\text{SEP}(f, \lambda)$. $f(u) = \lambda u$.

$$\text{Alors } \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ cx+ay+bz \\ bx+cy+az \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \lambda x = ax+by+cz \\ \lambda y = cx+ay+bz \\ \lambda z = bx+cy+az \end{cases}$$

$$\text{En ajoutant les trois équations il vient } \lambda(x+y+z) = (a+b+c)x + (a+b+c)y + (a+b+c)z \\ \lambda(x+y+z) = (a+b+c)(x+y+z); \quad (A - (a+b+c)I)(x+y+z) = 0.$$

Or $\lambda \neq 0$ et $\lambda = a+b+c$ donc $\lambda - (a+b+c) \neq 0$. Alors $x+y+z=0$ et $u \in P$.

$\forall u \in \text{SEP}(f, \lambda), u \in P$. $\text{SEP}(f, \lambda) \subset P$.

Si f admet une valeur propre λ différente de 0 : $\text{SEP}(f, \lambda)$ est contenu dans P .

Q5) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $a+b+c=1$ et $a+b+c > 0$

Alors $a+b+c=1$.

Posons $k = -abc$.

Alors $a+b+c=1$, $ab+bc+ca=0$ et $abc=-k$.

Ainsi a, b, c sont les racines de $x \in \mathbb{R}$ et $x^3 - x^2 + k = 0$.

Supposons que $a=b=c$. Alors $ab+bc+ca=3a^2$.

Or $3a^2=0$. Alors $a=0$. Rien qu' $a=b=c=0$. Ceci contredit le fait que

$a^2+b^2+c^2=1$. Ainsi $x \in \mathbb{R}$ et $x^3 - x^2 + k = 0$ admet au moins deux solutions

distinctes. Ainsi d'après Q2 $k \in [0, \frac{4}{27}]$.

b) Comme $a+b+c=1$, $D=1$. Alors 1 est valeur propre de A donc de f.

d'après Q4 $e_1 + e_2 + e_3$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

Posons $D = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$. D est un droite vectoriel de E et $B_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3))$ est une base orthonormée.

$B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, $D^\perp$ est l'hyperplan d'équation $x+y+z=0$ dans la base B car $D = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$.

Ainsi $D^\perp = P$. Alors $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$. Soit B_2 une base orthonormée de P.

Comme D et P sont supplémentaires et orthogonaux, $V = B_1 \cup B_2$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Posons $V = (e'_1, e'_2, e'_3)$.

$f(e'_1) = e'_1$ car $e'_1 \in D$ et $D = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$.

P est stable par f et (e'_2, e'_3) est une base de P. Alors $f(e'_2) \in \text{Vect}(e'_2, e'_3)$

et $f(e'_3) \in \text{Vect}(e'_2, e'_3)$. Ainsi $\exists (u, w) \in \mathbb{R}^2$, $f(e'_2) = u e'_2 + w e'_3$ et

$\exists (v, r) \in \mathbb{R}^2$, $f(e'_3) = v e'_2 + r e'_3$. Alors $\pi_V(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & r \end{pmatrix}$.

Remarque... $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)$. On peut prendre $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_1)$ et $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_3 + e_2 - e_1)$.

Ainsi il existe une base orthonormée γ de $\mathbb{R}^3$ et quatre réels u, w, v, r tels que

$$\pi_r(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & r \end{pmatrix}.$$

c) Soit $\mathcal{Q}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à γ .

1° $\mathcal{Q}$ est orthogonale car $\mathcal{B}$ et γ sont orthonormés.

$$2^\circ {}^t\mathcal{Q}A\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{-1}A\mathcal{Q} = \pi_r(f).$$

Notons que ${}^tAA = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2+b^2 & ab+ca+bc & ac+cb+ba \\ ba+ac+cb & b^2+a^2+c^2 & bc+ab+ca \\ ca+bc+ab & cb+ba+ac & c^2+b^2+a^2 \end{pmatrix}.$

On a $b^2+c^2=1$ et $ab+bc+ca=0$. Ainsi ${}^tAA = I_n$. A est orthogonale.

Pour $A' = \pi_r(f)$, $A' = {}^t\mathcal{Q}A\mathcal{Q}$.

$${}^tA'A' = {}^t({}^t\mathcal{Q}A\mathcal{Q})({}^t\mathcal{Q}A\mathcal{Q}) = {}^t\mathcal{Q} \underbrace{{}^tAA}_{I_n} \underbrace{\mathcal{Q}\mathcal{Q}^{-1}}_{I_n} \mathcal{Q} = {}^t\mathcal{Q}\mathcal{Q} = I_n. A' \text{ est également orthogonale.}$$

Alors $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & r \end{pmatrix} = {}^tA'A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & w \\ 0 & v & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u^2+w^2 & uv+wr \\ 0 & vu+rw & v^2+r^2 \end{pmatrix}.$

Ainsi $u^2+w^2 = v^2+r^2$ et $uv+wr = 0$.

$u^2+w^2 = 1$ donc $\exists \theta \in [0, 2\pi]$, $u = \cos \theta$ et $w = \sin \theta$.

$v^2+r^2 = 1$ donc $\exists \theta' \in [0, 2\pi]$, $r = \cos \theta'$ et $v = \sin \theta'$.

de plus $0 = uv+wr = \cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta' = \sin(\theta' + \theta)$.

Alors $\theta' + \theta \equiv 0 [2\pi]$ ou $\theta' + \theta \equiv \pi [2\pi]$. $\theta' \equiv -\theta [2\pi]$ ou $\theta' \equiv \pi - \theta [2\pi]$.

1° cas... $\theta' \equiv -\theta [2\pi]$. Alors $r = \cos \theta' = \cos(-\theta) = \cos \theta$ et $v = \sin \theta' = \sin(-\theta) = -\sin \theta$.

Alors $u = r = \cos \theta$ et $w = -v = \sin \theta$.

2° cas... $\theta' \equiv \pi - \theta [2\pi]$. Alors $r = \cos \theta' = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ et $v = \sin \theta' = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$.

$u = -r = \cos \theta$ et $w = v = \sin \theta$.

$$\text{Alors } \pi_r(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Notons que la trace de $\pi_r(f)$ vaut 1. Or $\pi_r(f)$ et A sont semblables donc A a pour trace 1. Ainsi $3a = 1$ donc $a = \frac{1}{3}$.

$$\pi_r(f^2) = \pi_r(f) \times \pi_r(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } \pi_r(f^2) = I_3, \quad f^2 = Id_{\mathbb{R}^3}. \quad \text{Alors } A^2 = I_3$$

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Le premier coefficient de } A^2 \text{ est à la fois } a^2 + cb^2 \text{ et } 1.$$

$$\text{Ainsi } a^2 + 2bc = 1. \quad \text{Alors } 2bc = 1 - a^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}. \quad bc = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Rappelons que } a+b+c=1 \text{ et } ab+bc+ca=0.$$

$$\text{Alors } b+c = 1-a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{et } 0 = bc + a(b+c) = bc + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}; \quad bc = -\frac{2}{9}!!$$

Finalement $\cos$ et $\sin$ sont impossibles.

Par conséquent $\exists \theta \in [0, 2\pi]$ tel que $u = r = \cos \theta$ et $w = -v = \sin \theta$.

$$\text{Alors } \pi_r(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } \theta \equiv 0 [2\pi], \quad \pi_r(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \text{Sp } f = \{1\}.$$

$$\text{Si } \theta \equiv \pi [2\pi], \quad \pi_r(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \text{Sp } f = \{-1, -1\}.$$

Supposons $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$ et $\theta \not\equiv \pi [2\pi]$. On a $\theta \neq 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$ et u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$.

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x = 0 \\ (\cos \theta - \lambda)y - \sin \theta z = 0 \\ \sin \theta y + (\cos \theta - \lambda)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{\cos \theta - \lambda}{\sin \theta} y \\ \sin \theta y + (\cos \theta - \lambda) \frac{\cos \theta - \lambda}{\sin \theta} y = 0 \end{cases}$$

$\sin \theta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad = 0$

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y = \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} x \\ 0 = y \frac{1}{\sin \theta} [\underbrace{\sin^2 \theta}_0 + (\cos \theta - 1) \underbrace{1}_0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \lambda \text{ n'est pas valeur propre de } f.$$

Ainsi f admet d'autres valeurs propres que $\pm i$ et selon $\theta \equiv \pi [2\pi]$

ou $\theta \equiv 0 [2\pi]$ $\Pi_V(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice. On revient au cas général.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Question 2 HEC 2011 S 1152

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i.i.d..

On suppose que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k suit une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

On pose $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Étudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Cours Théorème de d'Alembert-Gauss

↑ ??

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n .

Y_n prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Ainsi $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{Y_n}(x) = 0$ et

$\forall x \in [1, +\infty[$, $F_{Y_n}(x) = 1$.

Soit $x \in [0, 1]$, $F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x) = P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x)$.

$$F_{Y_n}(x) = P(\{X_1 \leq x\} \cap \{X_2 \leq x\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x\}) = P(X_1 \leq x) P(X_2 \leq x) \dots P(X_n \leq x).$$

↑ $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes

Or $\forall x \in [0, 1]$, $P(X_1 \leq x) = x$ car X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Donc $F_{Y_n}(x) = x^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x^n & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases} \quad \text{et ceci pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Soit Y la variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ constante égale à 1. Soit F_Y sa fonction de répartition. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$.

Si $x \in \mathbb{R}$, F_Y est continue en x si et seulement si $x \neq 1$.

$$\text{De plus } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(x).$$

Alors $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers Y c'est à dire vers la variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ constante et égale à 1.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = P((Y_n - 1 \geq \varepsilon) \cup \{Y_n - 1 \leq -\varepsilon\}) = P(Y_n - 1 \geq \varepsilon) + P(Y_n - 1 \leq -\varepsilon)$.
↑ Incompatibilité.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = P(Y_n \geq 1 + \varepsilon) + P(Y_n \leq 1 - \varepsilon) = 0 + P(Y_n \leq 1 - \varepsilon) = P(Y_n \leq 1 - \varepsilon).$$

↑
 Y_n prend ses valeurs dans $[0, 1]$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 - \varepsilon < 0 \\ (1 - \varepsilon)^n & \text{si } 1 - \varepsilon \geq 0 \end{cases} \quad (\text{donc ce cas } 1 - \varepsilon \in [0, 1])$$

Si $1 - \varepsilon < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = 0$ $1 - \varepsilon \in [0, 1]$

Si $1 - \varepsilon \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \varepsilon)^n = 0$ ↓

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = 0$. $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la

variable certaine égale à 1.

Remarque... Il aurait dû commencer par le recad point car la convergence en probabilité donne la convergence a loi!

Noter que lorsque la limite est une variable certaine il y a équivalence entre les deux convergences.

Malheureusement je t'ai à exposer les deux convergences!

Sujet S 1157 - Exercice

- 1) Question de cours : Estimateur sans biais et convergent d'un paramètre réel inconnu.

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$, et pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n -échantillon i.i.d. de la loi de X . On suppose que la loi de X dépend d'un paramètre réel θ non nul inconnu.

On note $\mathcal{E}_\theta$ l'ensemble des estimateurs $T_n = T_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de θ sans biais et admettant une variance.

On admet l'existence d'un estimateur $\hat{T}_n$ de $\mathcal{E}_\theta$ de variance minimale : on dit que $\hat{T}_n$ est optimal dans $\mathcal{E}_\theta$.

Soit T_n et U_n deux éléments de $\mathcal{E}_\theta$.

On pose, pour tout réel α : $S_\alpha(T_n, U_n) = T_n + \alpha(U_n - T_n)$.

- 2) Montrer que $S_\alpha(T_n, U_n)$ appartient à $\mathcal{E}_\theta$.
3) a) Etablir pour tout réel α , l'inégalité (V désigne la variance et **Cov** la covariance) :

$$\alpha^2 V(U_n - \hat{T}_n) + 2\alpha \text{Cov}(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) \geq 0.$$

- b) En déduire que $\text{Cov}(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) = 0$.
4) Réciproquement, montrer que si $\text{Cov}(T_n, U_n - T_n) = 0$ pour tout U_n de $\mathcal{E}_\theta$, alors T_n est optimal dans $\mathcal{E}_\theta$.
5) On suppose l'existence de deux estimateurs optimaux $\hat{T}_n$ et T_n^* dans $\mathcal{E}_\theta$. Montrer que $T_n^* = \hat{T}_n$ presque sûrement.
6) Dans cette question, X suit la loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.

On pose : $\hat{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $W_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_n)^2$.

- a) Montrer que $\hat{X}_n$ et W_n sont des estimateurs sans biais de θ .
b) On admet que $\hat{X}_n$ est optimal dans $\mathcal{E}_\theta$ et que W_n admet une variance.

Montrer que : $\text{Cov}(\hat{X}_n, W_n) = \frac{\theta}{n}$.

Sujet S 1157 - Exercice sans préparation

Soit E l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles.

Soit Φ l'endomorphisme de E qui, à toute suite (u_n) de E , associe la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

- 1) Déterminer les noyaux de Φ , de $\Phi \circ \Phi$ et de Φ^k pour $k \geq 3$ et leurs dimensions respectives.
2) Quelle est l'image de Φ ?

Q1) $(T_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'estimateurs d'un paramètre $g(\theta)$.

- T_n est sans biais de $E_\theta(T_n) = g(\theta)$ (... pour tout $\theta \in \Theta$)
- $(T_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'estimateurs, du paramètre $g(\theta)$, convergente si $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers $g(\theta)$ (... pour tout $\theta \in \Theta$)

Q2) $S_\alpha(T_n, U_n) = T_n + \alpha(U_n - T_n) = \alpha U_n + (1-\alpha)T_n$. Rappelons que U_n et T_n appartiennent à $\mathcal{E}_\theta$.

U_n et T_n possèdent une espérance et une variance. Il en est de même pour $S_\alpha(T_n, U_n)$ car

$S_\alpha(T_n, U_n)$ est une combinaison linéaire de U_n et T_n .

de plus $E(S_\alpha(T_n, U_n)) = \alpha E(U_n) + (1-\alpha)E(T_n) = \alpha\theta + (1-\alpha)\theta = \theta$.

Alors $E(S_\alpha(T_n, U_n))$ est un estimateur sans biais de θ qui admet une variance.

donc $S_\alpha(T_n, U_n) \in \mathcal{E}_\theta$. Pour tout réel α , $S_\alpha(T_n, U_n)$ appartient à $\mathcal{E}_\theta$

Q3) a) ^{soit d'éc} U_n et $\hat{T}_n$ possèdent une variance donc $U_n - \hat{T}_n$ possède une variance.

$\hat{T}_n$ et $U_n - \hat{T}_n$ possèdent un moment d'ordre 2 donc $\text{cov}(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n)$ existe.

$S_\alpha(T_n, U_n) \in \mathcal{E}_\theta$ et $\hat{T}_n$ est un élément de $\mathcal{E}_\theta$ de variance minimale.

Alors $V(\hat{T}_n) \leq V(S_\alpha(T_n, U_n)) = V(T_n + \alpha(U_n - T_n)) = V(T_n) + \alpha^2 V(U_n - T_n) + 2\alpha \text{cov}(T_n, U_n - T_n)$.

$V(\hat{T}_n) \leq V(T_n) + \alpha^2 V(U_n - T_n) + 2\alpha \text{cov}(T_n, U_n - T_n)$... et ceci pour tout $T_n \in \mathcal{E}_\theta$.

comme $\hat{T}_n \in \mathcal{E}_\theta$ on remplace dans ce qui précède T_n par $\hat{T}_n$ il vient :

$V(\hat{T}_n) \leq V(\hat{T}_n) + \alpha^2 V(U_n - \hat{T}_n) + 2\alpha \text{cov}(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n)$.

donc $\alpha^2 V(U_n - \hat{T}_n) + 2\alpha \text{cov}(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) \geq 0$ et ceci pour tout α dans $\mathbb{R}$

b) Alors $\forall \alpha \in]0, +\infty[$, $\alpha V(U_n - \hat{T}_n) + 2\alpha \text{cov}(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) \geq 0$ (1)

et $\forall \alpha \in]-\infty, 0[$, $\alpha V(U_n - \hat{T}_n) + 2\alpha \text{cov}(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) \leq 0$ (2)

En faisant tendre α vers 0 par valeurs supérieures (resp. inférieures) dans (1) (resp. (2))

il vient $2 \operatorname{cov}(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) \geq 0$ (resp. $2 \operatorname{cov}(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) \leq 0$).

Ainsi $2 \operatorname{cov}(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) = 0$.

Donc $\operatorname{cov}(\hat{T}_n, U_n - \hat{T}_n) = 0$ et ceci pour tout U_n dans $\mathcal{E}_\Theta$.

Q4) Soit $T_n \in \mathcal{E}_\Theta$ tel que: $\forall U_n \in \mathcal{E}_\Theta, \operatorname{cov}(T_n, U_n - T_n) = 0$.

Soit $U_n \in \mathcal{E}_\Theta$. $0 = \operatorname{cov}(T_n, U_n - T_n) = \operatorname{cov}(T_n, U_n) - \operatorname{cov}(T_n, T_n) = \operatorname{cov}(T_n, U_n) - V(T_n)$.

Alors $V(T_n) = \operatorname{cov}(T_n, U_n)$.

$$(V(T_n))^2 = (\operatorname{cov}(T_n, U_n))^2 \stackrel{\text{Cov}}{\leq} V(T_n) V(U_n). \quad (3)$$

1^{er} cas... $V(T_n) = 0$. Alors $V(T_n) = 0 \leq V(U_n)$.

2nd cas... $V(T_n) \neq 0$. Alors $V(T_n) > 0$. En divisant (3) par $V(T_n)$ il vient $V(T_n) \leq V(U_n)$.

Finalement $\forall U_n \in \mathcal{E}_\Theta, V(T_n) \leq V(U_n)$.

Alors T_n est optimal dans $\mathcal{E}_\Theta$... si $T_n \in \mathcal{E}_\Theta$ et si $\forall U_n \in \mathcal{E}_\Theta, \operatorname{cov}(T_n, U_n - T_n) = 0$.

Q5) Soient $\hat{T}_n$ et T_n^* deux estimateurs optimaux dans $\mathcal{E}_\Theta$

Alors $\operatorname{cov}(\hat{T}_n, T_n^* - \hat{T}_n) = \operatorname{cov}(T_n^*, \hat{T}_n - T_n^*) = 0$ d'après Q3.

Donc $0 = \operatorname{cov}(\hat{T}_n, T_n^* - \hat{T}_n) = \operatorname{cov}(T_n^*, \hat{T}_n - T_n^*) = \operatorname{cov}(\hat{T}_n, T_n^* - \hat{T}_n) - \operatorname{cov}(T_n^*, T_n^* - \hat{T}_n)$.

Donc $0 = \operatorname{cov}(\hat{T}_n - T_n^*, T_n^* - \hat{T}_n) = -\operatorname{cov}(\hat{T}_n - T_n^*, \hat{T}_n - T_n^*) = -V(\hat{T}_n - T_n^*)$.

Ainsi $V(\hat{T}_n - T_n^*) = 0$. Alors $\hat{T}_n - T_n^*$ est presque sûrement constante.

mais $\hat{T}_n$ et T_n^* sont dans $\mathcal{E}_\Theta$. Ainsi $E(\hat{T}_n) = E(T_n^*) = \theta$. Alors $E(\hat{T}_n - T_n^*) = 0$.

Alors $\hat{T}_n - T_n^*$ est presque sûrement égale à 0.

Donc $\hat{T}_n$ et T_n^* sont presque sûrement égales. $P(\hat{T}_n = T_n^*) = 1$.

Q6) a) $\forall i \in \{1, \dots, n\}, E(X_i) = \theta$ donc $E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \theta = \theta$.

$\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de θ .

Pour tout $i \in \{1, n\}$, $V(X_i)$ existe et vaut θ .

de plus $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes. Alors $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ possède une variance qui vaut $n\theta$.

Donc $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ possède une variance qui vaut $\frac{1}{n^2} n\theta$ c'est à dire $\frac{1}{n}\theta$.

Soit $i \in \{1, n\}$. $(X_i - \bar{X}_n)^2 = (X_i - \theta - (\bar{X}_n - \theta))^2 = [(X_i - E(X_i)) - (\bar{X}_n - E(\bar{X}_n))]^2$

$$(X_i - \bar{X}_n)^2 = (X_i - E(X_i))^2 + (\bar{X}_n - E(\bar{X}_n))^2 - 2(X_i - E(X_i))(\bar{X}_n - E(\bar{X}_n))^2$$

• X_i possède une variance qui vaut θ donc $E((X_i - E(X_i))^2)$ existe et vaut θ .

• $\bar{X}_n$ possède une variance qui vaut $\frac{1}{n}\theta$ donc $E((\bar{X}_n - E(\bar{X}_n))^2)$ existe et vaut $\frac{1}{n}\theta$.

• X_i et $\bar{X}_n$ possède un moment d'ordre 2 donc $\text{cov}(X_i, \bar{X}_n)$ existe.

Alors $E((X_i - E(X_i))(\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)))$ existe et est égal à $\text{cov}(X_i, \bar{X}_n)$.

les trois pièces de monnaie que :

1° $E((X_i - \bar{X}_n)^2)$ existe

$$2^\circ E((X_i - \bar{X}_n)^2) = \theta + \frac{1}{n}\theta - 2\text{cov}(X_i, \bar{X}_n).$$

car si i, j et k sont indépendantes et leur covariance est nulle.

$$\text{cov}(X_i, \bar{X}_n) = \text{cov}(X_i, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{cov}(X_i, X_k) \stackrel{!}{=} \frac{1}{n} \text{cov}(X_i, X_i) = \frac{1}{n} V(X_i) = \frac{1}{n}\theta.$$

Alors $E((X_i - \bar{X}_n)^2) = \theta + \frac{1}{n}\theta - 2 \times \frac{1}{n}\theta = \theta - \frac{1}{n}\theta = \frac{n-1}{n}\theta \dots$ et ceci pour tout $i \in \{1, n\}$.

Ainsi 1° $W_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ possède une espérance

$$2^\circ E(W_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n E((X_i - \bar{X}_n)^2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{n}\theta = \frac{1}{n-1} n \times \frac{n-1}{n}\theta = \theta.$$

W_n est un estimateur sans biais de θ .

b) sous hypothèse W_n admet une variance. Comme W_n est un estimateur sans biais de θ , alors

W_n est un élément de $\mathcal{E}_\theta$. Or $\bar{X}_n$ est optimal dans $\mathcal{E}_\theta$ donc $\text{cov}(\bar{X}_n, W_n - \bar{X}_n) = 0$.

$$\text{Ainsi } 0 = \text{cov}(\bar{X}_n, W_n) - \text{cov}(\bar{X}_n, \bar{X}_n) = \text{cov}(\bar{X}_n, W_n) - V(\bar{X}_n) = \text{cov}(\bar{X}_n, W_n) - \frac{\theta}{n}.$$

Par conséquent $\text{cov}(\bar{X}_n, W_n) = \frac{\theta}{n}$.

Question 4 HEC 2011 S 1157

E est l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Φ est l'endomorphisme de E qui à tout éléments $(u_n)_{n \geq 0}$ associe $(u_{n+1} - u_n)_{n \geq 0}$.

Q1. Déterminer les noyaux de Φ , $\Phi \circ \Phi$ et Φ^k pour $k \in [3, +\infty[$?

Q2. Quelle l'image de Φ .

Cours Définition d'un estimateur sans biais et convergent d'un paramètre réel inconnu.

Q1 * Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ un élément de E .

$$(u_n)_{n \geq 0} \in \text{Ker } \Phi \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n.$$

$$(u_n)_{n \geq 0} \in \text{Ker } \Phi \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq 0} \text{ est constante.}$$

$\text{Ker } \Phi$ est le sous-espace vectoriel constitué par les suite constantes de E .

$\text{Ker } \Phi$ est aussi le sous-espace vectoriel engendré par la suite constante égale à 1.

Remarque .. $\text{Ker } \Phi = \{ (p(n))_{n \geq 0} ; p \in \mathbb{R}_0[X] \}$.

* Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in E$. $\Phi((u_n)_{n \geq 0}) = (u_{n+1} - u_n)_{n \geq 0}$.

$$\Phi^2((u_n)_{n \geq 0}) = \Phi((u_{n+1} - u_n)_{n \geq 0}) = ((u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n))_{n \geq 0} = (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)_{n \geq 0}.$$

$$(u_n)_{n \geq 0} \in \text{Ker } \Phi^2 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0.$$

L'équation $x \in \mathbb{C}$ et $x^2 - 2x + 1 = 0$ admet une solution 1 et une seule 1.

Il nous indique alors que : $(u_n)_{n \geq 0} \in \text{Ker } \Phi^2 \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha + \beta n$.

$$\text{Ker } \Phi^2 = \{ (u_n)_{n \geq 0} \in E \mid \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha + \beta n \}.$$

$$\text{Ker } \Phi^2 = \text{Vect}((1)_n, (n)_n).$$

Remarque .. $\text{Ker } \Phi^2 = \{ (p(n))_{n \geq 0} ; p \in \mathbb{R}_1[X] \}$.

* Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker \phi^k = \{ (p(u))_{u \geq 0} ; p \in \mathbb{R}_{\leq k}[X] \}$

→ la propriété est vraie pour $k=1$ (et 2!) d'après ce qui précède.

→ Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ un élément de E .

$$(u_n)_{n \geq 0} \in \ker \phi^{k+1}$$

$$\Downarrow \phi^{k+1}((u_n)_{n \geq 0}) = 0_E$$

$$\Downarrow \phi^k(\phi((u_n)_{n \geq 0})) = 0_E$$

$$\Downarrow \phi((u_n)_{n \geq 0}) \in \ker \phi^k$$

$$\Downarrow \exists Q \in \mathbb{R}_{\leq k}[X], \phi((u_n)_{n \geq 0}) = (Q(u))_{n \geq 0}$$

$$\Updownarrow \exists Q \in \mathbb{R}_{\leq k}[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = Q(u_n)$$

Lemme.. $\forall Q \in \mathbb{R}_{\leq k}[X], \exists P \in \mathbb{R}_{\leq k}[X], P(u+1) - P(u) = Q(u)$.

▲ Preuve du lemme . Posons $\forall U \in \mathbb{R}[X], \Delta U = U(X+1) - U(X)$.

. Δ est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(U, V) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$

$$\Delta(\lambda U + V) = (\lambda U + V)(X+1) - (\lambda U + V)(X) = \lambda U(X+1) + V(X+1) - \lambda U(X) - V(X)$$

$$\Delta(\lambda U + V) = \lambda (U(X+1) - U(X)) + V(X+1) - V(X) = \lambda \Delta U + \Delta V.$$

Δ est linéaire.

Alors Δ est une dérivation de $\mathbb{R}[X]$.

$$\Delta 1 = 0$$

$$\Delta(\mathbb{R}[X]) = \Delta(\text{Vect}(1, X, \dots, X^k)) = \text{Vect}(\Delta 1, \Delta X, \dots, \Delta X^k) = \text{Vect}(\Delta X, \Delta X^2, \dots, \Delta X^k).$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \Delta X^i = (X+1)^i - X^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} X^j - X^i = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} X^j.$$

$$\text{Rue } \forall i \in \mathbb{N}, \deg \Delta X^i = i-1.$$

Alors $(\Delta x, \Delta x^2, \dots, \Delta x^r)$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ de degrés échelonnés. c'est donc une famille libre de cardinal r de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ qui est de dimension r .

$(\Delta x, \Delta x^2, \dots, \Delta x^r)$ est donc une base de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$.

$$\text{Ainsi } \Delta(\mathbb{R}_r[X]) = \text{Vect}(\Delta x, \Delta x^2, \dots, \Delta x^r) = \mathbb{R}_{r-1}[X].$$

Alors $\forall Q \in \mathbb{R}_{r-1}[X], \exists P \in \mathbb{R}_r[X], \Delta P = Q$. On a donc :

$\forall Q \in \mathbb{R}_{r-1}[X], \exists P \in \mathbb{R}_r[X], P(X+1) - P(X) = Q$. Ceci achève la preuve du lemme. $\blacktriangle$

$$(u_n)_{n \geq 0} \in K \phi^{r+1}$$

$$\Downarrow \exists Q \in \mathbb{R}_{r-1}[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = Q(n)$$

$$\Downarrow \exists P \in \mathbb{R}_r[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = P(n+1) - P(n)$$

$$\Downarrow \exists P \in \mathbb{R}_r[X], \forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1} - P(n+1)) - (u_n - P(n)) = 0$$

$$\Downarrow \exists P \in \mathbb{R}_r[X], \phi((u_n - P(n))_{n \geq 0}) = 0 \in$$

$$\Downarrow \exists P \in \mathbb{R}_r[X], \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n - P(n) = \lambda.$$

$$\Downarrow \exists P \in \mathbb{R}_r[X], \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = P(n) + \lambda = (P + \lambda)(n)$$

$$\Downarrow \exists \tilde{P} \in \mathbb{R}_r[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \tilde{P}(n)$$

Ainsi $K \phi^{r+1} = \{(\tilde{P}(n))_{n \geq 0} ; \tilde{P} \in \mathbb{R}_r[X]\}$ ce qui achève la preuve de ce.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, K \phi^n = \{ (\tilde{P}(n))_{n \geq 0} ; P \in \mathbb{R}_{r-1}[X] \}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, K \phi^n = \{ (u_n)_{n \geq 0} \in E \mid \exists (a_0, a_1, \dots, a_{r-1}) \in \mathbb{R}^r, u_n = a_0 + a_1 n + \dots + a_{r-1} n^{r-1} \}$$

Exercice.. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montre que $((1)_{n \geq 0}, (u_1)_{n \geq 0}, \dots, (u^{r-1})_{n \geq 0})$ est une base de $K \phi^n$.

Q2 une petite analyse. Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ un élément de E .

Supposons que $(v_n)_{n \geq 0}$ appartient à $\mathcal{I} \cap \phi$. Alors $\exists (u_n)_{n \geq 0} \in E$, $\phi((u_n)_{n \geq 0}) = (v_n)_{n \geq 0}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = v_n$.

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}^p, u_n = (u_n - u_0) + u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^p, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0.$$

Rien trop de doute il semble bien que tout élément de E possède au moins un antécédent par ϕ donc que $\mathcal{I} \cap \phi = E$. Rationnel.

Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ un élément de E . Poser $u_0 = 0$ (ou c avec $c \in \mathbb{R}$!) et

$$\forall n \in \mathbb{N}^p, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k \quad (\text{ou } \sum_{k=0}^{n-1} v_k + c \dots).$$

$$1^\circ (u_n)_{n \geq 0} \in E.$$

$$2^\circ \forall n \in \mathbb{N}^p, u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^n v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_n.$$

$$u_1 - u_0 = \sum_{k=0}^{1-1} v_k - 0 = v_0$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = v_n. \quad \phi((u_n)_{n \geq 0}) = (v_n)_{n \geq 0}.$$

$$\text{Ainsi } \forall (v_n)_{n \geq 0} \in E, \exists (u_n)_{n \geq 0} \in E, \phi((u_n)_{n \geq 0}) = (v_n)_{n \geq 0}.$$

ϕ est surjective et $\mathcal{I} \cap \phi = E$.

Sujet S 1175 - Exercice

Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 5 et $F = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

1) Question de cours : Caractériser les isomorphismes d'espaces vectoriels de dimensions finies ?

2) Soit $f_1, f_2, \dots, f_6$ les applications linéaires de E vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall P \in E, f_1(P) = P(0), f_2(P) = P'(0), f_3(P) = P''(0), f_4(P) = P(1), f_5(P) = P'(1) \text{ et } f_6(P) = P''(1),$$

où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P .

a) Que vaut $\bigcap_{i=1}^6 \text{Ker}(f_i)$?

b) L'application Φ de E dans $\mathbb{R}^6$ définie par $\Phi(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_6(P))$ est-elle un isomorphisme d'espaces vectoriels ?

c) En déduire que la famille $(f_1, \dots, f_6)$ est libre dans l'espace vectoriel F .

3) Soit S l'ensemble défini par :

$$S = \{Q \in \mathbb{R}[X] / Q(0) = 1, Q'(0) = 1, Q''(0) = 0, Q(1) = 0, Q'(1) = 0 \text{ et } Q''(1) = 1\}.$$

a) Montrer que l'ensemble $S \cap E$ contient exactement un élément et le déterminer.

b) Soit $Q \in S$. Déterminer le reste de la division euclidienne de Q par $X^3(X-1)^3$. En déduire l'ensemble S .

4) a) Déterminer l'ensemble K défini par :

$$K = \left\{ Q \in \mathbb{R}[X] / Q(-1) = 0, Q'(-1) = 0, Q''(-1) = 4, Q(-\frac{3}{2}) = 1, Q'(-\frac{3}{2}) = 2, Q''(-\frac{3}{2}) = 0 \right\}.$$

b) Existe-t-il une fonction f , non polynomiale, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que :

$$f(-1) = 0, f'(-1) = 0, f''(-1) = 4, f(-\frac{3}{2}) = 1, f'(-\frac{3}{2}) = 2, f''(-\frac{3}{2}) = 0 \quad ?$$

Sujet S 1175 - Exercice sans préparation

On considère une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$, où $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

On note pour $n \geq 1$, $X_n = \max_{1 \leq i \leq n} U_i$.

1) Prouver que la suite (X_n) converge en probabilité vers θ .

2) Etudier la convergence en loi de $Y_n = n(\theta - X_n)$.

HEC 2011 S1175 Correction de l'exercice.

Q1) E et E' sont deux K -espaces vectoriels. On suppose que $E \neq \{0_E\}$
 Soit une application linéaire de E dans E'

* Les conditions suivantes sont équivalentes

i) f est un isomorphisme de E sur E'

ii) $\ker f = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} f = E'$

iii) Il existe une base de E dont l'image par f est une base de E'

iv) Toute base de E a pour image par f une base de E'

* On suppose que $\dim E = \dim E' < +\infty$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

i) f est un isomorphisme de E sur E'

v) f est surjective

v') $\ker f = \{0_E\}$

vi) f est injective

vi') $\operatorname{Im} f = E'$

Q2) a) Soit $P = \prod_{i=1}^6 (x - \lambda_i)$. Soit une polynôme de degré au plus 5 et $\forall i \in \{1, \dots, 6\}, f_i(P) = 0$.

$$\text{Alors } P(0) = P'(0) = P''(0) = P(1) = P'(1) = P''(1) = 0.$$

Or 1 est des racines de P d'ordre au moins 3.

Alors x^3 et $(x-1)^3$ divisent P donc $x^3(x-1)^3$ divise P .

Or $\deg x^3(x-1)^3 = 6$ et $\deg P \leq 5$ alors $P = 0_E$.

$$\text{Alors } \bigcap_{i=1}^6 \ker f_i = \{0_E\}.$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(P, Q) \in E^2$. $f_1, f_2, \dots, f_6$ sont linéaires.

$$\phi(\lambda P + Q) = (f_1(\lambda P + Q), f_2(\lambda P + Q), \dots, f_6(\lambda P + Q)) = (\lambda f_1(P) + f_1(Q), \lambda f_2(P) + f_2(Q), \dots, \lambda f_6(P) + f_6(Q)).$$

$$\phi(\lambda P + Q) = \lambda (f_1(P), f_2(P), \dots, f_6(P)) + (f_1(Q), f_2(Q), \dots, f_6(Q)) = \lambda \phi(P) + \phi(Q).$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (p, q) \in E, \phi(\lambda p + q) = \lambda \phi(p) + \phi(q)$. ϕ est linéaire.

Soit $p \in K \cap \phi$. $\phi(p) = 0_{\mathbb{R}^6}$. $(f_1(p), f_2(p), \dots, f_6(p)) = 0_{\mathbb{R}^6}$.

Ainsi $\forall i \in \overline{1, 6}, f_i(p) = 0_{\mathbb{R}}$. Mais $p \in \bigcap_{i=1}^6 K \cap f_i$ et $\bigcap_{i=1}^6 K \cap f_i = \{0_E\}$ donc $p = 0_E$.

Par conséquent $K \cap \phi = \{0_E\}$.

Mais ϕ est une application linéaire injective de E dans $\mathbb{R}^6$.

On a $\dim E = \dim \mathbb{R}_5[X] = 6 = \dim \mathbb{R}^6 < +\infty$.

Donc ϕ est bijective (ϕ^{-1}). Ainsi ϕ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^6$.

c) Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6) \in \mathbb{R}^6$ tel que $\sum_{k=1}^6 \alpha_k f_k = 0_F$.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_6)$ la base canonique de $\mathbb{R}^6$. Pour $\forall i \in \overline{1, 6}, p_i = \phi^{-1}(e_i)$.

$\forall i \in \overline{1, 6}, \phi(p_i) = e_i$ donc $\forall i \in \overline{1, 6}, \forall k \in \overline{1, 6}, f_k(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Mais $\forall i \in \overline{1, 6}, 0_{\mathbb{R}} = 0_F(p_i) = \sum_{k=1}^6 \alpha_k f_k(p_i) = \alpha_i$. Donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_6 = 0$.

Ceci admet de montrer que $(f_1, f_2, \dots, f_6)$ est une famille libre de F .

Exercice. Montrer que $(f_1, f_2, \dots, f_6)$ est une base de F .

$((f_1, f_2, \dots, f_6)$ et la base duale de la base $(p_1, p_2, \dots, p_6)$ de E).

Q3) a) Soit $q \in E$.

$$q \in S \Leftrightarrow \phi(0) = \phi'(0) = \phi''(1) = 1 \text{ et } \phi(1) = \phi'(1) = \phi''(0) = 0.$$

$$q \in S \Leftrightarrow f_1(q) = 1, f_2(q) = 1, f_3(q) = 0, f_4(q) = 0, f_5(q) = 0, f_6(q) = 1.$$

$$q \in S \Leftrightarrow (f_1(q), f_2(q), \dots, f_6(q)) = (1, 1, 0, 0, 0, 1)$$

$$q \in S \Leftrightarrow \phi(q) = (1, 1, 0, 0, 0, 1).$$

$$q \in S \Leftrightarrow q = \phi^{-1}((1, 1, 0, 0, 0, 1))$$

Ainsi on a construit exactement un élément : $q_0 = \phi^{-1}((1, 1, 0, 0, 0, 1))$.

Pour $Q_0 = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$.

$$Q_0 = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e \text{ et } Q_0'' = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d.$$

$$Q_0(0) = Q_0'(0) = Q_0''(0) = 1 \text{ et } Q_0(1) = Q_0'(1) = Q_0''(1) = 0$$

Ainsi $f = 1, e = 1, 20a + 12b + 6c + 2d = 1, a + b + c + d + e + f = 0, 5a + 4b + 3c + 2d + e = 0 \text{ et } 2d = 0$

Par conséquent $d = 0, e = 1 \text{ et } f = 1$. Alors

$$\begin{cases} a + b + c = -d - e - f = -2 \\ 5a + 4b + 3c = -2d - e = -1 \\ 20a + 12b + 6c = 1 - 2d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = -2 & L_1 \\ 5a + 4b + 3c = -1 & L_2 \\ 20a + 12b + 6c = 1 & L_3 \end{cases}$$

$$L_2 - 3L_1 \text{ et } L_3 - 2L_2 \text{ donne } \begin{cases} 2a + b = 5 & L_1' \\ 10a + 4b = 3 & L_2' \end{cases} \quad 4L_1' - L_2' \text{ donne } : 2a = -17$$

Alors $a = -\frac{17}{2}, b = 5 - 2a = 5 + 17 = 22 \text{ et } c = -2 - a - b = -2 + \frac{17}{2} - 22 = -\frac{31}{2}$.

Ainsi l'unique élément de $S \cap E$ est $Q_0 = -\frac{17}{2}x^5 + 22x^4 - \frac{31}{2}x^3 + x + 1$

Noter que $Q_0 = (x-1)^3(-\frac{17}{2}x^3 + 5x^2 + 3x + 1)$.

b) Déterminer l'élément S ! Soit $\varphi \in R[x]$. Pour $U = \varphi - Q_0$.

$$U' = \varphi' - Q_0' \text{ et } U'' = \varphi'' - Q_0''.$$

$$\varphi \in S \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi'(0) = 1 \\ \varphi''(0) = 0 \\ \varphi(1) = 0 \\ \varphi'(1) = 0 \\ \varphi''(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(0) = Q_0(0) \\ \varphi'(0) = Q_0'(0) \\ \varphi''(0) = Q_0''(0) \\ \varphi(1) = Q_0(1) \\ \varphi'(1) = Q_0'(1) \\ \varphi''(1) = Q_0''(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U(0) = 0 \\ U'(0) = 0 \\ U''(0) = 0 \\ U(1) = 0 \\ U'(1) = 0 \\ U''(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \text{ est racine triple d'ordre au moins 3 de } U.$$

$$\varphi \in S \Leftrightarrow x^3(x-1)^3 \text{ divise } U \Leftrightarrow \exists T \in R[x], U = x^3(x-1)^3 T.$$

$$\varphi \in S \Leftrightarrow \exists T \in R[x], \varphi - Q_0 = x^3(x-1)^3 T \Leftrightarrow \exists T \in R[x], \varphi = Q_0 + x^3(x-1)^3 T.$$

$$S = \{ \varphi_0 + X(X-1)^3 T, T \in \mathbb{R}[X] \}.$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}X^5 + 22X^4 - \frac{31}{2}X^3 + X + 1 + X^3(X-1)^3 T; T \in \mathbb{R}[X] \right\}.$$

(Q4) a) Nous procéderons en deux étapes. Nous déterminons de φ_0 un élément "particulier" de K , puis nous en déduisons K .

Nous le val de -1 (resp. $-\frac{3}{2}$) dans K et proche du val de 1 (resp. 0) dans $S \dots$

cherchons alors une fonction affine $x \mapsto ax+b$ qui transforme -1 en 1 et $-\frac{3}{2}$ en 0 .

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} -a+b=1 \\ -\frac{3}{2}a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1+a \\ 0=-\frac{3}{2}a+1+a=-\frac{1}{2}a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}.$$

Prenons alors $\varphi_1 = \varphi_0(2X+3)$. $\varphi_1 \in \mathbb{R}[X]$. Précis $\varphi_1 \in E$.

Nous que $\varphi'_1 = 2\varphi'_0(2X+3)$ et $\varphi''_1 = 4\varphi''_0(2X+3)$. Rappelons que $\varphi_0 \in S$.

$$\text{Ainsi } \varphi_1(-1) = \varphi_0(1) = 0 \text{ et } \varphi_1(-\frac{3}{2}) = \varphi_0(0) = 1.$$

$$\varphi'_1(-1) = 2\varphi'_0(1) = 0 \text{ et } \varphi'_1(-\frac{3}{2}) = 2\varphi'_0(0) = 2$$

$$\varphi''_1(-1) = 4\varphi''_0(1) = 4 \text{ et } \varphi''_1(-\frac{3}{2}) = 4\varphi''_0(0) = 0$$

Ainsi $\varphi_1 \in K$ et même $\varphi_1 \in K \cap E$.

$$\varphi_1(X) = \varphi_0(2X+3) = -\frac{1}{2}(2X+3)^5 + 22(2X+3)^4 - \frac{31}{2}(2X+3)^3 + 2X+4.$$

Soit φ un élément de $\mathbb{R}[X]$. Posons $D = \varphi - \varphi_1$. $D' = \varphi' - \varphi'_1$ et $D'' = \varphi'' - \varphi''_1$.

$$\varphi \in K \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(-1) = 0 \\ \varphi'(-1) = 0 \\ \varphi''(-1) = 4 \\ \varphi(-\frac{3}{2}) = 1 \\ \varphi'(-\frac{3}{2}) = 2 \\ \varphi''(-\frac{3}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(-1) = \varphi_1(-1) \\ \varphi'(-1) = \varphi'_1(-1) \\ \varphi''(-1) = \varphi''_1(-1) \\ \varphi(-\frac{3}{2}) = \varphi_1(-\frac{3}{2}) \\ \varphi'(-\frac{3}{2}) = \varphi'_1(-\frac{3}{2}) \\ \varphi''(-\frac{3}{2}) = \varphi''_1(-\frac{3}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D(-1) = 0 \\ D'(-1) = 0 \\ D''(-1) = 0 \\ D(-\frac{3}{2}) = 0 \\ D'(-\frac{3}{2}) = 0 \\ D''(-\frac{3}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \text{ et } -\frac{3}{2} \text{ sont des racines} \\ \text{de } D \text{ d'ordre au moins } 3.$$

$$Q \in K \Leftrightarrow (x+1)^3(x+\frac{3}{2})^3 \text{ divise } Q \Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{R}[X], Q = (x+1)^3(x+\frac{3}{2})^3 B.$$

$$Q \in K \Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{R}[X], Q - Q_1 = (x+1)^3(x+\frac{3}{2})^3 B.$$

$$Q \in K \Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{R}[X], Q = Q_1 + (x+1)^3(x+\frac{3}{2})^3 B.$$

$$\text{avec } K = \{ Q_1 + (x+1)^3(x+\frac{3}{2})^3 B ; B \in \mathbb{R}[X] \} \text{ et } Q_1 = -\frac{17}{2}(x+3)^5 + 22(x+3)^4 - \frac{21}{2}(x+3)^3 + 4x + 4.$$

un calcul simple donne encore

$$K = \{ -278x^5 - 1688x^4 - 4132x^3 - 4986x^2 - 1968x - 698 + (x+1)^3(x+\frac{3}{2})^3 B ; B \in \mathbb{R}[X] \}$$

* Fait à la main! J'ai aussi vérifié à la main que la prairie polynôme appartient à K .

▼ Remarque... On pourrait aussi trouver un élément de K et une de $K \cap E$ non utilisés Q_3 . Par exemple de la manière suivante.

Soit $Q \in E$. Notons que $(1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3, (x+1)^4, (x+1)^5)$ est une base de E .

$$\exists (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6, Q = a(x+1)^5 + b(x+1)^4 + c(x+1)^3 + d(x+1)^2 + e(x+1) + f$$

$$Q' = 5a(x+1)^4 + 4b(x+1)^3 + 3c(x+1)^2 + 2d(x+1) + e \text{ et } Q'' = 20a(x+1)^3 + 12b(x+1)^2 + 6c(x+1) + 2d.$$

$$Q \in K \Leftrightarrow Q(-1) = Q'(-1) = Q''(-\frac{3}{2}) = 0, Q''(-1) = 4, Q(-\frac{3}{2}) = 1, Q'(-\frac{3}{2}) = 2$$

$$Q \in K \Leftrightarrow \begin{cases} f=0 \\ e=0 \\ 20a(-1/2)^3 + 12b(-1/2)^2 + 6c(-1/2) + 2d=0 \\ 2d=4 \\ a(-1/2)^5 + b(-1/2)^4 + c(-1/2)^3 + d(-1/2)^2 + e(-1/2) + f=1 \\ 5a(-1/2)^4 + 4b(-1/2)^3 + 3c(-1/2)^2 + 2d(-1/2) + e=2 \end{cases}$$

$$Q \in K \Leftrightarrow \begin{cases} e=f=0 \\ d=2 \\ -20a+24b-24c=-16d=-32 \\ -a+2b-4c=32-8d=16 \\ 5a-8b+12c=32+16d=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=f=0, d=2 \\ -5a+6b-4c=-8 \\ -a+2b-4c=16 \\ 5a-8b+12c=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=f=0, d=2 \\ (I) -a+2b-4c=16 \\ (II) -5a+6b-4c=-8 \\ (III) 5a-8b+12c=64 \end{cases}$$

$$Q \in K \iff \begin{cases} e=f=0, d=2 \\ -a+2b-4c=36 \\ -4b+34c=-88 \\ -2b+6c=56 \end{cases} \iff \begin{cases} e=f=0, d=2 \\ -a+2b-4c=36 \\ 2b+c=44 \\ -2b+6c=56 \end{cases} \iff \begin{cases} e=f=0, d=2 \\ c=-100 \\ b=3c-28=-328 \\ a=2b-4c-36=-272 \end{cases}$$

$U_1 \leftarrow -5(1)+U$
 $(3) \leftarrow (3)+U$

Alors il existe un élément Q_2 appartenant à $E \cap K$ et un réel :

$$Q_2 = -272(X+1)^5 - 328(X+1)^4 - 100(X+1)^3 + 2(X+1)^2. \quad \blacktriangle$$

▼ Remarque.. Comme Q_2 appartient à K et $\tilde{a} \in E$: $Q_2 = Q_1$! ce qui donne trois possibilités d'écrire Q_1 .

$$\bullet Q_1 = -272X^5 - 1688X^4 - 4732X^3 - 4986X^2 - 2968X - 698$$

$$\bullet Q_1 = -\frac{17}{2}(2X+3)^5 + 22(2X+3)^4 - \frac{31}{2}(2X+3)^3 + 2X+4 \text{ ou}$$

$$Q_1 = -272\left(X+\frac{3}{2}\right)^5 + 352\left(X+\frac{3}{2}\right)^4 - 324\left(X+\frac{3}{2}\right)^3 + 2\left(X+\frac{3}{2}\right) + 1$$

$$\bullet Q_1 = -272(X+1)^5 - 328(X+1)^4 - 100(X+1)^3 + 2(X+1)^2 \quad \blacktriangle$$

b) Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = Q_1(x) + (x+1)^3\left(x+\frac{3}{2}\right)^3 e^x$, $h(x) = (x+1)^3\left(x+\frac{3}{2}\right)^3$ et $g(x) = e^x$

→ f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car Q_1 , h et g sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

→ $h(-1) = h(-\frac{3}{2}) = 0$. Alors $f(-1) = Q_1(-1) = 0$ et $f(-\frac{3}{2}) = Q_1(-\frac{3}{2}) = 1$.

→ $f' = Q_1' + h'g + hg'$. Or $h(-1) = h'(-1) = h(-\frac{3}{2}) = h'(-\frac{3}{2}) = 0$.

Alors $f'(-1) = Q_1'(-1) = 0$ et $f'(-\frac{3}{2}) = Q_1'(-\frac{3}{2}) = 2$

↑
-1 et $-\frac{3}{2}$ sont des racines
d'ordre 3 de h

→ $f'' = Q_1'' + h''g + 2h'g' + hg''$.

Or $h(-1) = h'(-1) = h''(-1) = h(-\frac{3}{2}) = h'(-\frac{3}{2}) = h''(-\frac{3}{2}) = 0$

donc $f''(-1) = Q_1''(-1) = 4$ et $f''(-\frac{3}{2}) = Q_1''(-\frac{3}{2}) = 0$.

→ Supposons que f est polynomiale. Alors $Hg = f - \varphi_1$ est polynomiale.

À a dire, pour certaine constante on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(Hg)(k)}{e^k} = 0$.

Alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} H(k) = 0$, c'est à dire $\lim_{k \rightarrow +\infty} (k+1)^3(k+\frac{3}{2})^3 = 0 !!$

Ainsi f n'est pas polynomiale.

$f: x \mapsto \varphi_1(x) + (x+1)^3(x+\frac{3}{2})^3 e^x$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non polynomiale,

deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\underline{\underline{f(-1)=0, f'(-1)=0, f''(-1)=4, f(-\frac{3}{2})=1, f'(-\frac{3}{2})=2 \text{ et } f''(-\frac{3}{2})=0.}}$$

Question 6 HEC 2011 S 1175

On considère une suite $(U_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes une loi uniforme sur le segment $[0, \theta]$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = \max(U_1, U_2, \dots, U_n).$$

Q1. Prouver que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers θ .

Q2. Étudier la convergence en loi de $Y_n = n(\theta - X_n)$.

Question de cours : Caractériser les isomorphismes d'espaces vectoriels de dimensions finies.

Q1) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P(|X_n - \theta| \geq \varepsilon) = P(X_n - \theta \geq \varepsilon) + P(X_n - \theta \leq -\varepsilon) = P(X_n \geq \theta + \varepsilon) + P(X_n \leq \theta - \varepsilon)$$

X_n prend ses valeurs dans $[0, \theta]$ donc $P(X_n \geq \theta + \varepsilon) = 0$.

$$P(X_n \leq \theta - \varepsilon) = P(\max(U_1, U_2, \dots, U_n) \leq \theta - \varepsilon) = P(U_1 \leq \theta - \varepsilon) \cap P(U_2 \leq \theta - \varepsilon) \cap \dots \cap P(U_n \leq \theta - \varepsilon)$$

Pour l'indépendance on obtient : $P(X_n \leq \theta - \varepsilon) = P(U_1 \leq \theta - \varepsilon) P(U_2 \leq \theta - \varepsilon) \dots P(U_n \leq \theta - \varepsilon)$.

$U_1, U_2, \dots, U_n$ ayant même loi d'origine : $P(X_n \leq \theta - \varepsilon) = (P(U_1 \leq \theta - \varepsilon))^n$.

$$P(|X_n - \theta| \geq \varepsilon) = (P(U_1 \leq \theta - \varepsilon))^n.$$

1^{re} cas... $\theta - \varepsilon < 0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(|X_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0^n = 0$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$!

2^{de} cas... $\theta - \varepsilon \geq 0$. Alors $\theta - \varepsilon \in [0, \theta]$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(|X_n - \theta| \geq \varepsilon) = (P(U_1 \leq \theta - \varepsilon))^n = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n$$

Or $1 - \frac{\varepsilon}{\theta} \in [0, 1[$ (car $0 < \frac{\varepsilon}{\theta} \leq 1$) donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n = 0$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$. $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la

variable aléatoire certaine égale à θ .

Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de X_n .

X_n prend ses valeurs dans $[0, n\theta]$. Alors $\forall k \in]-\infty, 0[, F_n(k) = 0$ et

$\forall k \in [n\theta, +\infty[, F_n(k) = 1$.

Soit $x \in [0, n\theta[$, $F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(n(\theta - X_n) \leq x) = P(\theta - X_n \leq \frac{x}{n}) = P(\theta - \frac{x}{n} \leq X_n)$.

$$F_n(x) = 1 - P(X_n < \theta - \frac{x}{n}) = 1 - P(\{U_1 < \theta - \frac{x}{n}\} \cap \{U_2 < \theta - \frac{x}{n}\} \cap \dots \cap \{U_n < \theta - \frac{x}{n}\}).$$

Pour l'indépendance de $U_1, U_2, \dots, U_n$ on a : $F_n(x) = 1 - P(U_1 < \theta - \frac{x}{n}) P(U_2 < \theta - \frac{x}{n}) \dots P(U_n < \theta - \frac{x}{n})$.

A $\forall k \in [1, n]$, $U_k \in U([0, \theta])$ donc $\forall k \in [1, n]$, $P(U_k < \theta - \frac{x}{n}) = P(U_k \leq \theta - \frac{x}{n}) = \frac{\theta - \frac{x}{n} - 0}{\theta - 0} = 1 - \frac{x}{n\theta}$.

$$\text{Alors } F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n.$$

$$\theta - \frac{x}{n} \in [0, \theta]$$

$$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0, n\theta[\\ 1 & \text{si } x \in [n\theta, +\infty[. \end{cases}}}$$

et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in]-\infty, 0[, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n(0) = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(0) = 0.$$

Soit $x \in]0, +\infty[$. Posons $n_0 = \text{Ent}\left(\frac{x}{\theta}\right) + 1$. $n_0 > \frac{x}{\theta}$; $x < n_0 \theta$.

$\forall n \in [n_0, +\infty[$, $n > n_0$: $\forall n \in [n_0, +\infty[$, $n\theta \geq n_0\theta > x$.

$$\text{Alors } \forall n \in [n_0, +\infty[, F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n = 1 - e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)}.$$

$\uparrow$ $1 - \frac{x}{n\theta} > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)}{\frac{x}{n\theta}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(-\frac{x}{n\theta}\right) = -\frac{x}{\theta}. \text{ Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)\right) = -\frac{x}{\theta} \text{ par continuité}$$

de la fonction exponentielle $e^{-\frac{x}{\theta}}$ il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)} = e^{-\frac{x}{\theta}}$.

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - e^{-x/\theta} & \end{cases} \text{ ou } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-x/\theta} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

Ainsi $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la

loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$.

HEC 2011 Sujet 113 - Exercice

Q1. Question de cours : Rappeler la définition du rang d'une matrice. Une matrice carrée et sa transposée ont-elles le même rang ?

Q2. Dans cette question, A et B sont deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \in \mathbb{N}^*$) qui ont moins une valeur propre commune ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Dans cette question j'ai remplacé le $\mathbb{R}$ du texte par $\mathbb{K}$. Dans la correction je reste fidèle au texte original...

a) Démontrer qu'il existe un élément α de $\mathbb{K}$ et deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que ${}^tAX = \alpha X$ et $BY = \alpha Y$.

b) En déduire qu'il existe une matrice carrée non nulle M telle que $MA = BM$.

c) Montrer que les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont une valeur propre commune et trouver une matrice non nulle M telle que $MA = BM$.

Q3. Dans cette question a est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

a) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que, si z est un nombre complexe qui n'est pas valeur propre de a et si le polynôme $P = (X - z)Q$ est un polynôme annulateur de a , Q est alors aussi un polynôme annulateur de a .

b) Démontrer qu'il existe un polynôme annulateur de a dont les seules racines sont les valeurs propres de a (*comment on cause à HEC !*).

Q4. Dans cette question, on examine la réciproque de la propriété trouvée en Q2 et on considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une matrice non nulle M telle que $MA = BM$.

a) Que peut-on dire des valeurs propres de A et de B lorsque M est inversible ?

b) Démontrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on a : $MP(A) = P(B)M$.

c) Démontrer, à l'aide de Q3, que A et B ont nécessairement une valeur propre commune.

Q1) Le rang d'une matrice et la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes (resp. ses lignes). C'est aussi le rang de toute application linéaire "associée".

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

Q2) a) Soit α une valeur propre commune à A et B .

$A - \alpha I_n$ n'est pas inversible d'ac ${}^t(A - \alpha I_n) = {}^t(A - \alpha I_n)$ n'est pas inversible.

Alors α est valeur propre de tA . $\exists X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et ${}^tAX = \alpha X$.

$\alpha \in \text{Sp } B$ d'ac $\exists Y \in \mathbb{R}^n, Y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $BY = \alpha Y$.

b) ${}^tAX = \alpha X$ d'ac ${}^tXA = \alpha {}^tX$. $Y {}^tXA = \alpha Y {}^tX$.

$BY = \alpha Y$; $BY {}^tX = \alpha Y {}^tX$.

Pour $\Pi = Y {}^tX$. $\Pi A = Y {}^tXA = \alpha Y {}^tX = BY {}^tX = B\Pi$. $\Pi \in \mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ et $\Pi A = B\Pi$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$. $\exists j_0 \in \{1, 2, 3, 4\}, x_{j_0} \neq 0$ et $\exists i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}, y_{i_0} \neq 0$ car X et Y sont non nulles.

$\Pi = Y {}^tX = (y_i x_j)_{1 \leq i, j \leq 4}$ de plus $y_{i_0} x_{j_0} \neq 0$ d'ac $\Pi \neq 0_{\mathbb{R}^n(\mathbb{R})}$.

$\exists \Pi \in \mathbb{R}^n(\mathbb{R}), \Pi \neq 0_{\mathbb{R}^n(\mathbb{R})}$ et $\Pi A = B\Pi$.

Remarque. Tout ceci vaut encore pour $A \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C})$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in \text{Sp } A \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = (\lambda+1)(\lambda-3)$.

Alors $\text{Sp } A = \{-1, 3\}$.

B est triangulaire supérieure d'ac ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

$\text{Sp } B = \{1, 3\}$

A et B ont une valeur propre commune 3.

${}^tA = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X \neq 0_{\mathbb{R}^2(\mathbb{R})}$ et ${}^tAX = AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3X$.

Pour $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y \neq 0_{\mathbb{R}^2(\mathbb{R})}$ et $BY = 3Y$.

Pour avoir $\pi = Y'X$, d'après ce qui précède de $\pi A = B\pi$.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice non nulle de $M_2(\mathbb{R})$ telle que $\pi A = B\pi$.

Remarque.. $\pi A = B\pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(Q3) a) Pour simplifier posons $E = \mathbb{C}^n$, $a \in \mathcal{L}(E)$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ et $P = (X - \lambda) Q$ est un polynôme annulateur de a . $P(a) = (a - \lambda \text{Id}_E) \circ Q(a) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Supposons que λ n'est pas valeur propre. Alors $a - \lambda \text{Id}_E$ est un endomorphisme injectif de E .

$$\forall x \in E, ((a - \lambda \text{Id}_E) \circ Q(a))(x) = 0_E. \quad \forall x \in E, (a - \lambda \text{Id}_E)(Q(a)(x)) = 0_E.$$

Alors $\forall x \in E, Q(a)(x) \in \text{Ker}(a - \lambda \text{Id}_E)$. Or $\text{Ker}(a - \lambda \text{Id}_E) = \{0_E\}$ car $a - \lambda \text{Id}_E$ est injectif.

Ainsi $\forall x \in E, Q(a)(x) = 0_E$. $Q(a) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Q est un polynôme annulateur de a .

b) Montrons maintenant que a possède un polynôme annulateur non nul.

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes annulateurs non nuls de a .

Pour avoir $\mathcal{S} = \{\deg S; S \in \mathcal{S}\}$. $\mathcal{S}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc $\mathcal{S}$ possède un plus petit élément d_0 . $\exists S_0 \in \mathcal{S}$, $\deg S_0 = d_0$.

S_0 est un polynôme annulateur de a donc $\exists p \neq 0 \in \mathbb{C}[X] \mid S_0(p) = 0$.

Réciproquement soit λ_0 une racine de S_0 . Montrons que $\lambda_0 \in \text{Sp}(a)$.

Supposons que λ_0 n'est pas valeur propre de a . λ_0 est racine de S_0 donc il existe un élément Q_0 de $\mathbb{C}[X]$ tel que $S_0 = (X - \lambda_0) Q_0$.

d'après a) Q_0 est un polynôme annulateur de a . de plus $Q_0 \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ car $S_0 \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$.

Alors $Q_0 \in \mathcal{S}$ donc $\deg Q_0 \in \mathcal{S}$. Or $\deg Q_0 = \deg S_0 - 1 = d_0 - 1$.

Donc $d_0 - 1 \in \mathcal{S}$ et d_0 n'est pas le plus petit élément de $\mathcal{S}$!! ce qui est impossible.

Alors $\lambda_0 \in \text{Sp}(a)$. Ceci achève de montrer que toute racine de S_0 est une valeur propre de a . Ainsi les racines de S_0 sont les valeurs propres de a .

* existe un polynôme annulateur (non nul) de α d'at LES racines sont LES valeurs propres de α .

Remarque 1. Supposons S_0 constant ! $\exists c \in \mathbb{C}^p$, $S_0 = c$. $\leftarrow$ sont pas nul.

Alors $O_{\mathbb{C}(E)} = S_0(\alpha) = c Id_E$ et $c \neq 0$ donc $O_{\mathbb{C}(E)} = Id_E$. Ceci est impossible car $\dim E \geq 1$. Alors $\deg S_0 \geq 1$. Comme $S_0 \in \mathbb{C}[X]$, S_0 a au moins une racine. Ainsi α admet au moins une valeur propre.

Plus généralement tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n , $n \in \mathbb{N}^*$, possède au moins une valeur propre.

2. Soit c_0 le coefficient du terme de plus haut degré. Posons $T_0 = \frac{1}{c_0} S_0$.

T_0 est le polynôme annulateur non nul unitaire de α de degré minimum.

T_0 est le polynôme minimal de α . Exercice... prouver l'unicité de T_0 .

Q4 a) supposons réalisable. $\pi A = B \pi$ donc $A = \pi^{-1} B \pi$.

Alors A et B sont semblables donc A et B ont les mêmes valeurs propres.

Soit $\tilde{\alpha}$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

D'après la remarque 1, $\tilde{\alpha}$ admet au moins une valeur propre.

Ainsi A admet au moins une valeur propre λ . λ est également valeur propre de B .

donc A et B ont au moins une valeur propre commune.

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{C}^{r+1}$, $P = \sum_{k=0}^r \beta_k X^k$.

Comme on peut démontrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\pi A^k = B^k \pi$.

• La propriété est vraie pour $k=0$ car $A^0 = B^0 = Id$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$$\pi A^{k+1} = (\pi A^k) A = (B^k \pi) A = B^k (\pi A) = B^k (B \pi) = B^{k+1} \pi.$$

$\pi A^{k+1} = B^{k+1} \pi$ et la récurrence s'achève.

$$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}, \pi A^k = B^k \pi.}}$$

$$\pi P(A) = \pi \left(\sum_{k=0}^r \beta_k A^k \right) = \sum_{k=0}^r \beta_k \pi A^k = \sum_{k=0}^r \beta_k B^k \pi = \left(\sum_{k=0}^r \beta_k B^k \right) \pi = P(B) \pi.$$

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \pi P(A) = P(B) \pi.$$

c) Reprenons l'endomorphisme $\tilde{a}$ de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
 Repère un polynôme annulateur $\tilde{S}_0$ de $\tilde{a}$ tel que ses racines de $\tilde{S}_0$ coïncident avec les valeurs propres de $\tilde{a}$. $\tilde{S}_0$ est nécessairement non nul (!) car $\tilde{a}$ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres. Supposons que $\tilde{S}_0$ est constant. $\exists \tilde{c} \in \mathbb{C}^*, \tilde{S}_0 = \tilde{c}$.
 Alors $0_{n \times n} = \tilde{S}_0(\tilde{a}) = \tilde{c} \text{Id}_n$, d'où $\text{Id}_n = 0_{n \times n}$ car $\tilde{c} \neq 0$. Ceci est impossible car dans $\mathbb{C}^n = n \geq 1$ (raisonnement déjà fait mais que je répète ici...).

Ainsi $\deg \tilde{S}_0 \geq 1$. $\tilde{S}_0$ est un polynôme annulateur de $\tilde{a}$ d'où de A . $\tilde{S}_0(A) = 0_{n \times n}$.

d'après b) $\pi \tilde{S}_0(A) = \tilde{S}_0(B) \pi$. Alors $\tilde{S}_0(B) \pi = \pi \tilde{S}_0(A) = \pi 0_{n \times n} = 0_{n \times n}$.

Si $\tilde{S}_0(B)$ est inversible : $0_{n \times n} = (\tilde{S}_0(B))^{-1} 0_{n \times n} = (\tilde{S}_0(B))^{-1} \tilde{S}_0(B) \pi = \pi$, d'où $\pi = 0_{n \times n}$!

Ainsi $\tilde{S}_0(B)$ n'est pas inversible.

$\tilde{S}_0 \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg \tilde{S}_0 \geq 1$ d'où $\tilde{S}_0$ est scindé.

$$\exists \lambda \in \mathbb{N}^*, \exists \sigma \in \mathbb{C}^*, \exists (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p) \in \mathbb{C}^p, \tilde{S}_0 = \sigma (X - \tau_1)(X - \tau_2) \dots (X - \tau_p).$$

$\tilde{S}_0(B)$ n'est pas inversible d'où $\sigma (B - \tau_1 I_n)(B - \tau_2 I_n) \dots (B - \tau_p I_n)$ n'est pas inversible.

Or σ n'est pas nul d'où $(B - \tau_1 I_n)(B - \tau_2 I_n) \dots (B - \tau_p I_n)$ n'est pas inversible.

Un produit de matrices inversibles est inversible. Par conséquent il existe $k_0 \in \{1, \dots, p\}$

tel que $B - \tau_{k_0} I_n$ ne soit pas inversible. Alors τ_{k_0} est une valeur propre de B .

mais τ_{k_0} est aussi un zéro de $\tilde{S}_0$ d'où une valeur propre de $\tilde{a}$... et de A .

D'où τ_{k_0} est une valeur propre de A et de B .

A et B ont au moins une valeur propre commune.

Question 11 S 113 On considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.

Q1 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

a) Quelle est la loi de S_n ?

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P(S_n \geq n + \sqrt{n})$?

Q2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire N_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des X_k et dont la loi est donnée par :

$$N_n(\Omega) = \{n, n+1\} \text{ et } P(N_n = n) = P(N_n = n+1) = \frac{1}{2}.$$

a) $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n définie par : $\forall \omega \in \Omega, T_n(\omega) = S_{N_n(\omega)}$.

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P(T_n \geq n + \sqrt{n})$?

Cours Rappeler la définition du rang d'une matrice. Une matrice carrée et sa transposée ont-elles nécessairement le même rang?

Q1 a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et $\forall k \in \mathbb{N}, n \geq k, X_k \in E(1)$ ou $X_k \in P(1,1)$ ou $X_k \in \delta(1)$.

le cours nous dit que : $X_1 + X_2 + \dots + X_n \in P(1,n)$ ou $X_1 + X_2 + \dots + X_n \in \delta(n)$.

Donc S_n suit la loi gamma de paramètres 1 et n ou la loi gamma de paramètres n .

b) $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, ayant même loi, d'espérance 1 et de variance 1.

Le théorème de la limite centrée nous dit que $\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \right)_{n \geq 1}$ converge

en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Soit ϕ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left\{ \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leq x \right\} = \phi(x). \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \uparrow \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

$S_n \in P(1,n)$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 1 \right) = \phi(1).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq n + \sqrt{n}) = \phi(1).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(S_n \geq x + \sqrt{n}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} P(S_n > x + \sqrt{n}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - P(S_n \leq x + \sqrt{n})) = 1 - \phi(1)$$

$\uparrow$
 $x \rightarrow +\infty$
 S_n et à droite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(S_n \geq x + \sqrt{n}) = 1 - \phi(1) = \phi(-1) \approx 0,1507$$

(Q2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F_{T_n} la fonction de répartition de T_n . Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(N_n = n, N_n = n+1)$ et un système complet d'événements

$$\text{Alors } P(T_n \leq x) = P(\{T_n \leq x\} \cap \{N_n = n\}) + P(\{T_n \leq x\} \cap \{N_n = n+1\})$$

$$P(T_n \leq x) = P(\{S_n \leq x\} \cap \{N_n = n\}) + P(\{S_{n+1} \leq x\} \cap \{N_n = n+1\}).$$

$X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ et N_n sont indépendants donc S_n et N_n (resp. S_{n+1} et N_n) sont indépendants.

$$\text{Alors } F_{T_n}(x) = P(T_n \leq x) = P(S_n \leq x) P(N_n = n) + P(S_{n+1} \leq x) P(N_n = n+1).$$

$$F_{T_n}(x) = \frac{1}{2} [P(S_n \leq x) + P(S_{n+1} \leq x)].$$

Notons F_n et F_{n+1} les fonctions de répartition de S_n et S_{n+1} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{T_n}(x) = \frac{1}{2} [F_{S_n}(x) + F_{S_{n+1}}(x)].$$

F_{S_n} et $F_{S_{n+1}}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc F_{T_n} est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Pour } \forall x \in \mathbb{R}, f_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{S_{n+1}}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} x^n}{n!} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{de } S_n \text{ (resp. } S_{n+1})$$

f_{S_n} (resp. $f_{S_{n+1}}$) est une densité continue sur $\mathbb{R}^n$. Alors F_{S_n} (resp. $F_{S_{n+1}}$) est une mesure de Lebesgue $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Soit pour $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $F'_{S_n}(x) = f_{S_n}(x)$ et $F'_{S_{n+1}}(x) = f_{S_{n+1}}(x)$.

$$F_{T_n} = \frac{1}{2} [F_{S_n} + F_{S_{n+1}}].$$

Alors F_{T_n} est au moins d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^n$.

ceci achève de montrer que T_n est une variable aléatoire à densité.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, F'_{T_n}(x) = \frac{1}{2} (F'_{S_n}(x) + F'_{S_{n+1}}(x)) = \frac{1}{2} (f_{S_n}(x) + f_{S_{n+1}}(x)).$$

$$\text{Puis } \forall x \in \mathbb{R}, g_{T_n}(x) = \frac{1}{2} (f_{S_n}(x) + f_{S_{n+1}}(x)).$$

g_{T_n} est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{T_n} sur $\mathbb{R}^n$ donc sur $\mathbb{R}$ puis c'est un ensemble fini de points.

Alors g_{T_n} est une densité de T_n .

$E(S_n)$ (resp. $E(S_{n+1})$) existe et vaut n (resp. $n+1$).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{S_n}(t) dt$ (resp. $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{S_{n+1}}(t) dt$) converge et vaut n (resp. $n+1$).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t \left(\frac{1}{2} (f_{S_n}(t) + f_{S_{n+1}}(t)) \right) dt$ converge et vaut $\frac{1}{2} (n + (n+1))$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t g_{T_n}(t) dt$ converge et vaut $\frac{2n+1}{2}$.

$E(T_n)$ existe et vaut $\frac{2n+1}{2}$.

S_n et S_{n+1} possèdent un moment d'ordre 2 donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_n}(t) dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_{n+1}}(t) dt$

convergent.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \left(\frac{1}{2} (f_{S_n}(t) + f_{S_{n+1}}(t)) \right) dt$ converge et vaut $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_n}(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_{n+1}}(t) dt$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g_{T_n}(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{2} (E(S_n^2) + E(S_{n+1}^2))$.

Alors T_n possède une moyenne d'ordre 2 qui vaut $\frac{1}{2} [E(S_n^2) + E(S_{n+1}^2)]$

Ainsi T_n possède une variance.

$$V(T_n) = E(T_n^2) - (E(T_n))^2 = \frac{1}{2} [E(S_n^2) + E(S_{n+1}^2)] - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

$$V(T_n) = \frac{1}{2} [V(S_n) + (E(S_n))^2 + V(S_{n+1}) + (E(S_{n+1}))^2] - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

$$V(T_n) = \frac{1}{2} [n + n^2 + (n+1) + (n+1)^2] - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$V(T_n) = \frac{1}{2} (n+1)(n+1+(n+1)) - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = (n+1)^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = (n+1+n+\frac{1}{2})(n+1-n-\frac{1}{2}).$$

$$V(T_n) = (2n+3/2)(1/2) = n + \frac{3}{4}.$$

$$\underline{\underline{V(T_n) = n + \frac{3}{4}}}$$

T_n est une variable aléatoire à densité.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(T_n \geq n + \sqrt{n}) = 1 - P(T_n < n + \sqrt{n}) = 1 - P(T_n \leq n + \sqrt{n})$

$$P(T_n \geq n + \sqrt{n}) = 1 - F_{T_n}(n + \sqrt{n}) = 1 - \frac{1}{2} [F_{S_n}(n + \sqrt{n}) + F_{S_{n+1}}(n + \sqrt{n})]$$

$$P(T_n \geq n + \sqrt{n}) = 1 - \frac{1}{2} P(S_n \leq n + \sqrt{n}) - \frac{1}{2} P(S_{n+1} \leq n + \sqrt{n}).$$

$$P(T_n \geq n + \sqrt{n}) = 1 - \frac{1}{2} P(S_n^* \leq 1) - \frac{1}{2} P(S_{n+1}^* \leq \frac{n + \sqrt{n} - (n+1)}{\sqrt{n+1}}) = 1 - \frac{1}{2} P(S_n^* \leq 1) - \frac{1}{2} P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}})$$

$$\uparrow$$

$$\begin{cases} S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \\ S_{n+1}^* = \frac{S_{n+1} - (n+1)}{\sqrt{n+1}} \end{cases}$$

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n^* \leq x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_{n+1}^* \leq x) = \phi(x)$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n^* \leq 1) = \phi(1)$. Ne reste plus qu'à trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}})$.

Notons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} = 1$ car $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1$... et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_{n+1}^* \leq 1) = \phi(1)$

R.

montrons alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_{n+1}^n \leq \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}) = \phi(1)$ en utilisant la définition.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0 \Rightarrow |P(S_{n+1}^n \leq \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}) - \phi(1)| < \varepsilon$.

ϕ est continue en 1 donc $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-1| < \eta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$, $1-\alpha \in \mathbb{R}$ et $|(1-\alpha)-1| = |\alpha| = \alpha < \eta$. Alors $|\phi(1-\alpha) - \phi(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
 $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

soit $-\frac{\varepsilon}{2} < \phi(1-\alpha) - \phi(1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Nous obtenons que $-\frac{\varepsilon}{2} + \phi(1) < \phi(1-\alpha)$. (1)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que $\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} \leq 1$ ($\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \leq 1$).

Alors $\{S_{n+1}^n \leq \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}\} \subset \{S_{n+1}^n \leq 1\}$ donc $P(S_{n+1}^n \leq \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}) \leq P(S_{n+1}^n \leq 1)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} \right) = 1$ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_1 \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} - 1 \right| < \alpha$ car $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors $\forall n \in [n_1, +\infty[$, $1-\alpha < \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} < 1+\alpha$.

Soit $\forall n \in [n_1, +\infty[$, $\{S_{n+1}^n \leq 1-\alpha\} \subset \{S_{n+1}^n \leq \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}\}$ et $P(S_{n+1}^n \leq 1-\alpha) \leq P(S_{n+1}^n \leq \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}})$.

Ainsi $\forall n \in [n_1, +\infty[$, $P(S_{n+1}^n \leq 1-\alpha) \leq P(S_{n+1}^n \leq \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}) \leq P(S_{n+1}^n \leq 1)$. (2)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_{n+1}^n \leq 1-\alpha) = \phi(1-\alpha)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_{n+1}^n \leq 1) = \phi(1)$.

Alors $\exists n_2 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_2 \Rightarrow |P(S_{n+1}^n \leq 1-\alpha) - \phi(1-\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists n_3 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_3 \Rightarrow |P(S_{n+1}^n \leq 1) - \phi(1)| < \varepsilon$.

Alors:

$\forall n \in [n_2, +\infty[$, $\phi(1-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} \stackrel{(3)}{<} P(S_{n+1}^n \leq 1-\alpha)$ et $\forall n \in [n_3, +\infty[$, $P(S_{n+1}^n \leq 1) \stackrel{(4)}{<} \phi(1) + \varepsilon$

Pour $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq n_0$.

$\phi(1) - \varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} + \phi(1) - \frac{\varepsilon}{2} < \phi(1-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} < P(S_{n+1}^n \leq 1-\alpha) \leq P(S_{n+1}^n \leq \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}) \leq P(S_{n+1}^n \leq 1) < \phi(1) + \varepsilon$

 $\begin{array}{ccccccc}
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & (1) & & (3) & & (2) & \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & (4)
 \end{array}$

soit $\phi(1) - \varepsilon < P(S_{n+1}^n \leq \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}) < \phi(1) + \varepsilon$ ou $|P(S_{n+1}^n \leq \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}) - \phi(1)| < \varepsilon$.

Notons donc d'après que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \Rightarrow |P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) - \phi(1)| < \varepsilon$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) = \phi(1)$ ▲

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \geq n + \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} P(S_n^* \leq 1) - \frac{1}{2} P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) \right) = 1 - \frac{1}{2} \phi(1) - \frac{1}{2} \phi(1)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \geq n + \sqrt{n}) = 1 - \phi(1) = \phi(-1)$.

▲ On retrouve ce type de preuve dans HEC^{NI} 2003 III Q6 ou dans HEC NI 2013 Q13

Remarque - Sans Q2 a) on pouvait penser à utiliser les espérances conditionnelles
sauf que le résultat du cours porte sur les variables aléatoires discrètes.

Sujet S 1150 - Exercice

Les variables aléatoires de cet exercice sont toutes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit λ un réel strictement positif donné et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\{-1, 1\}$ de même loi définie par :

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{\lambda + 1}.$$

- 1) Question de cours : Énoncer le théorème de l'espérance totale.
- 2) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les moments d'ordre 1 et 2 de la variable aléatoire X_n .
- 3) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire

$$U = X_0 X_3 - X_1 X_2.$$

- 4) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $Y_n = \prod_{i=0}^n X_i$.
 - a) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de λ et de n . En déduire la loi de Y_n .
 - b) Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 5) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les variables aléatoires $T, X_0, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes. Soit $V = \prod_{i=0}^T X_i$ l'application définie sur Ω par : $\forall \omega \in \Omega, \quad V(\omega) = \prod_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$.
 - a) En admettant que V est une variable aléatoire, déterminer pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant l'événement $(T = n)$.
 - b) En déduire l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(V / (T = n))$.
 - c) Montrer que $\mathbb{E}(V) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \exp\left(-\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)$.
- 6) Quelle est la loi de la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$?

Sujet S 1150 - Exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré $\leq n$.

- 1) Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ unique tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

- 2) Décomposer P_n en un produit de polynômes de degré 1.

Q1

X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{E}, P)$.

$(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de cet espace probabilisé.

$I = \{i \in I \mid P(A_i) \neq 0\}$.

X possède une espérance μ et $\text{var}(X) = \sigma^2$.

1° Pour tout $i \in I$, $E(X | A_i)$ existe

2° $\sum_{i \in I} E(X | A_i) P(A_i)$ existe

En conclusion : $E(X) = \sum_{i \in I} E(X | A_i) P(A_i)$

Q2

Soit $n \in \mathbb{N}$. X_n est une variable aléatoire géométrique d'ordre n et X_n possède une espérance μ et une variance σ^2 .

$$\mu_1(X_n) = E(X_n) = P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + \dots = \frac{1}{\lambda+1} + \frac{1}{\lambda+1} + \dots = \frac{1}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda+1}} = \frac{1}{\lambda+1} \cdot \frac{\lambda+1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\mu_2(X_n) = E(X_n^2) = P(X_n = 1) + 4P(X_n = 2) + \dots = 1 - \frac{1}{\lambda+1} = \frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

$$\mu_1(X_n) = E(X_n) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mu_2(X_n) = \frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

Q3

X_0 et X_3 possèdent une espérance et sont indépendantes d'après $E(X_0 X_3)$ existe et vaut $E(X_0) E(X_3)$ d'après $(E(X_0))^2$.

De même $E(X_1 X_2)$ existe et vaut $(E(X_0))^2$. Alors U possède une espérance qui vaut $E(X_0 X_3) - E(X_1 X_2)$ d'après 0.

$$E(U) = 0.$$

X_0, X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes d'après $X_0 X_3$ et $X_1 X_2$ sont indépendantes.

$X_0 X_3$ et $-X_1 X_2$ étant des variables aléatoires géométriques elles possèdent une variance.

Pour somme U possède une variance qui vaut $V(X_0 X_3) + V(-X_1 X_2)$ car $X_0 X_3$ et $-X_1 X_2$ sont indépendantes.

$$V(U) = V(X_0 X_3) + V(-X_1 X_2) = V(X_0 X_3) + V(X_1 X_2).$$

$$V(X_0 X_3) = E((X_0 X_3)^2) - (E(X_0 X_3))^2 = E(X_0^2 X_3^2) - (E(X_0) E(X_3))^2.$$

X_0^2 et X_3^2 sont indépendantes et possèdent une espérance d'après $E(X_0^2 X_3^2) = E(X_0^2) E(X_3^2)$.

$$\text{Alors } V(X_0 X_3) = E(X_0^2) E(X_3^2) - (E(X_0) E(X_3))^2 = (E(X_0^2))^2 - (E(X_0))^4 = 1 - \left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^4.$$

de même $V(X_1, X_2) = 1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^4$.

Alors $V(U) = 2 \left(1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^4\right)$.

Q4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Y_n prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$.

$X_0, X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et Y_n est une expérience qui vaut $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$.

Alors $E(Y_n)$ possède une espérance qui vaut $\prod_{i=0}^n E(X_i)$ ou $\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, E(Y_n) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\alpha_n = P(Y_n = 1)$. $P(Y_n = -1) = 1 - \alpha_n$.

Alors $\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1} = E(Y_n) = \alpha_n - (1 - \alpha_n) = 2\alpha_n - 1$. $\alpha_n = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}\right]$ et

$1 - \alpha_n = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}\right]$.

$Y_n \text{ v. l. } \{-1, 1\}, P(Y_n = 1) = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}\right]$ et $P(Y_n = -1) = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}\right]$.

b) $1 - \frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \frac{2\lambda}{1+\lambda} > 0$. $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} + 1 = \frac{2}{1+\lambda} > 0$. Alors $-1 < \frac{1-\lambda}{1+\lambda} < 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1} = 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n = 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$.

de même $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui peut être

soit une loi sur $\{-1, 1\}$.

Q5) Soit notons que V prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $P(T = n) \neq 0$. Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

$P_{T=n}(V = \varepsilon) = \frac{1}{P(T=n)} P\left(\{T=n\} \cap \left\{\prod_{k=0}^T X_k = \varepsilon\right\}\right) = \frac{1}{P(T=n)} P\left(\{T=n\} \cap \left\{\prod_{k=0}^n X_k = \varepsilon\right\}\right)$.

$X_0, X_1, \dots, X_n, T$ sont indépendantes de $\prod_{k=0}^n X_k$ et T est indépendante.

Alors $P_{T=n}(V = \varepsilon) = \frac{1}{P(T=n)} P(T=n) P\left(\prod_{k=0}^n X_k = \varepsilon\right) = P(Y_n = \varepsilon)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, la loi de V sachant l'événement $\{T=n\}$ et la loi de Y_n .

b) $\forall n \in \mathbb{N}, E(V | \{T=n\}) = E(Y_n) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}$.

c) • $(\{T=n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

• $\forall n \in \mathbb{N}, P(T=n) = \frac{e^{-1}}{n!} \neq 0$.

• $E(V | \{T=n\}) = E(V | \{T=n\})$ existe et vaut $\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• $\forall n \in \mathbb{N}, E(V | \{T=n\}) P(T=n) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) e^{-1} \left(\frac{1}{n!} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^n\right)$ et la

série de terme général $\frac{1}{n!} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^n$ converge.

Alors la série de terme général $E(V | \{T=n\}) P(T=n)$ converge.

donc $E(V)$ existe

et $E(V) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(V | \{T=n\}) P(T=n) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) e^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^n\right) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} e^{-1} e^{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}$.

$E(V) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} e^{\frac{1-\lambda}{1+\lambda} - 1} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} e^{-\frac{2\lambda}{1+\lambda}}$.

V possède une espérance qui vaut $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} e^{-\frac{2\lambda}{1+\lambda}}$.

Q6) soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Z_i = \frac{1}{2} (X_i + 1)$

$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Z_i(\omega) \in \{0, 1\}$ et $P(Z_i = 1) = P(X_i = 1) = \frac{1}{1+\lambda}$.

donc Z_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{1+\lambda}$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$X_0, X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes donc $Z_0, Z_1, \dots, Z_n$ le sont aussi.

Il nous faut alors que $\hat{S}_n = \sum_{i=0}^n Z_i$ suit la loi binomiale de paramètres $n+1$ et $\frac{1}{1+\lambda}$.

$\hat{S}_n(\omega) \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $P(\hat{S}_n = k) = \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^k \left(1 - \frac{1}{1+\lambda}\right)^{n+1-k}$.

Notons que $S_n = \sum_{i=0}^n X_i = \sum_{i=0}^n (2Z_i - 1) = 2\hat{S}_n - (n+1)$.

Alors $S_n(\omega) \in \{2k - (n+1); k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket\}$ et $\forall k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $P(S_n = 2k - (n+1)) = \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^k \left(1 - \frac{1}{1+\lambda}\right)^{n+1-k}$.

Question 1 HEC 2011 5 11 50

n appartient à $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .

Q1. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}_n[X]$ et un seul tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$.

Q2. Décomposer P_n comme un produit de polynômes de degré 1 *Remarque $n \geq 1$.*

Cours Énoncer le théorème de l'espérance totale.

Q1 Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $(z + \frac{1}{z})(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}) = z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} + z^n + \frac{1}{z^n}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} = (z + \frac{1}{z})(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}) - (z^n + \frac{1}{z^n})$.

Ceci suggère une preuve par récurrence au moins pour l'existence.

Notons par récurrence "d'ordre 2" que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ il existe un élément P_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z^n + \frac{1}{z^n} = P_n(z + \frac{1}{z})$.

* Pour $P_0 = 2$. $P_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ et $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_0(z + \frac{1}{z}) = 2 = z^0 + \frac{1}{z^0}$.

* Pour $P_1 = X$. $P_1 \in \mathbb{R}_1[X]$ et $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_1(z + \frac{1}{z}) = z + \frac{1}{z}$.

Ainsi la propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$.

* Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$ avec n dans $\mathbb{N}$.

$\exists P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, $\exists P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z^n + \frac{1}{z^n} = P_n(z + \frac{1}{z})$ et $z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} = P_{n+1}(z + \frac{1}{z})$.

Alors $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} = (z + \frac{1}{z})(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}) - (z^n + \frac{1}{z^n}) = (z + \frac{1}{z})P_{n+1}(z + \frac{1}{z}) - P_n(z + \frac{1}{z})$.

Pour $P_{n+2} = X P_{n+1} + P_n$.

Alors $P_{n+2} \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ car $P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} = (z + \frac{1}{z})P_{n+1}(z + \frac{1}{z}) - P_n(z + \frac{1}{z}) = P_{n+2}(z + \frac{1}{z})$.

Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.

Montrons l'unicité de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un réel élonat Q_n de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que

$$\forall j \in \mathbb{C}^*, Q_n(j + \frac{1}{j}) = j^n + \frac{1}{j^n}.$$

$$\text{Alors } \forall j \in \mathbb{C}^*, (P_n - Q_n)(j + \frac{1}{j}) = P_n(j + \frac{1}{j}) - Q_n(j + \frac{1}{j}) = 0.$$

$$\text{En particulier } \forall x \in]1, +\infty[, (P_n - Q_n)(x + \frac{1}{x}) = 0.$$

Posez $\forall x \in]1, +\infty[, \varphi(x) = x + \frac{1}{x}$. φ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[, \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}. \quad \varphi'(1) = 0 \text{ et } \forall x \in]1, +\infty[, \varphi'(x) > 0. \text{ Alors:}$$

φ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

φ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$, φ est continue sur $]1, +\infty[$, $\varphi(1) = 2$ et

si $\varphi(x) = +\infty$. Alors φ définit une bijection de $]1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$.

$$\text{Ainsi } \varphi(]1, +\infty[) = [2, +\infty[.$$

$$\forall x \in]1, +\infty[, (P_n - Q_n)(\varphi(x)) = (P_n - Q_n)(x + \frac{1}{x}) = 0.$$

$$\text{Alors } \forall y \in [2, +\infty[, (P_n - Q_n)(y) = 0.$$

$P_n - Q_n \in \mathbb{R}_n[x]$ et $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines.

Alors $P_n - Q_n$ est le polynôme nul. $Q_n = P_n$.

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \exists! P_n \in \mathbb{R}_n[x], \forall j \in \mathbb{C}^*, P_n(j + \frac{1}{j}) = j^n + \frac{1}{j^n}.$$

Q2 Pour tout n dans $\mathbb{N}$ notons α_n le coefficient de x^n dans P_n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = x P_{n+1} - P_n.$$

le coefficient de x^{n+2} dans P_{n+2} est α_{n+2}

" " " " $x P_{n+1}$ est α_{n+1}

" " " " P_n est 0

Alors $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$. Donc la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est constante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = \alpha_1$ et $\alpha_1 = 1$ car $P_1 = X$.

Déc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = 1$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, le coefficient de X^n dans P_n est 1.

Ainsi pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, P_n est unitaire et de degré n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\theta \in [0, \pi]$.

$$P_n(2\cos\theta) = P_n(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = P_n\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = (e^{i\theta})^n, \frac{1}{(e^{i\theta})^n} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta).$$

$$P_n(2\cos\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\cos n\theta = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$P_n(2\cos\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{2n} \Leftrightarrow \exists k \in [0, n-1], \theta = \frac{\pi + k\pi}{n}.$$

$\uparrow$
 $\theta \in [0, \pi]$

Pour $\forall k \in [0, n-1], \theta_k = \frac{\pi + k\pi}{2n}$ et $x_k = 2\cos\theta_k$.

Alors $\forall k \in [0, n-1], P_n(x_k) = P_n(2\cos\theta_k) = 0$.

$0 < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n-1} < \pi$ et $\cos$ est strictement décroissant sur $[0, \pi]$.

Alors $2\cos\theta_0 > 2\cos\theta_1 > \dots > 2\cos\theta_{n-1}$ donc $x_0 > x_1 > \dots > x_{n-1}$. $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont donc n racines distinctes de P_n .

Comme $\deg P_n = n$, $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont LES racines de P_n .

$\prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)$ divise P_n et ces deux polynômes sont de degré n .

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, P_n = \lambda \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)$. Comme P_n est unitaire : $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)$

Ainsi $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right)$ et ceci pour tout $k \in [0, n-1]$.

Remarque.. $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$, $P_3 = X^3 - 3X = X(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})$,

$P_4 = X^4 - 4X^2 + 2 = (X - 2\cos\frac{\pi}{8})(X + 2\cos\frac{\pi}{8})(X - 2\cos\frac{3\pi}{8})(X + 2\cos\frac{3\pi}{8})$.

$P_5 = X^5 - 5X^3 + 5X = (X - \sqrt{2+\sqrt{2}})(X + \sqrt{2+\sqrt{2}})(X - \sqrt{2-\sqrt{2}})(X + \sqrt{2-\sqrt{2}})X$.

Sujet S 1155 - Exercice

- 1) Question de cours : Rappeler la définition d'un espace vectoriel euclidien.
- 2) On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant comme matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- a) Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}^3, \|f(u)\| \leq \|u\|$.
- b) Vérifier que f est un projecteur.
- c) Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sans calcul.

Montrer que $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$.

- 3) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n , et p un projecteur de E .
 - a) Montrer que si $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont orthogonaux, alors : $\forall u \in E, \|p(u)\| \leq \|u\|$.
 - b) Montrer que si $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ ne sont pas orthogonaux, alors : $\exists u \in E, \|p(u)\| > \|u\|$.
 - c) Montrer qu'un projecteur p non nul est une projection orthogonale si et seulement si :

$$\sup_{u \neq 0} \frac{\|p(u)\|}{\|u\|} = 1.$$

Sujet S 1155 - Exercice sans préparation

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.

On suppose que l'espérance $\theta = \mathbb{E}(X_1)$ est non nulle et inconnue.

Trouver l'estimateur sans biais de l'espérance $\theta = \mathbb{E}(X_1)$ qui soit de variance minimale dans

l'ensemble des estimateurs sans biais de la forme $\tilde{\theta}_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ $((a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n)$.

Q1) On appelle espace vectoriel euclidien tout couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

Q1) On considère $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ un bon caractère de $\mathbb{R}^3$.

a) Soit $u = x e_1 + y e_2 + z e_3 \in \mathbb{R}^3$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\|f(u)\|^2 = \|AX\|^2 = \left\| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{9} [(x+y+z)^2 + (x+y+z)^2 + (x+y+z)^2] = \frac{1}{3} (x+y+z)^2$$

(e_1, e_2, e_3) est orthonormé

$$\|f(u)\|^2 = \frac{1}{3} (1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z)^2 \leq \frac{1}{3} (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) = \|u\|^2$$

$\uparrow$ Cauchy-Schwarz

Alors $\|f(u)\| \leq \|u\|$ car $\|f(u)\| \geq 0$ et $\|u\| \geq 0$

$\forall u \in \mathbb{R}^3, \|f(u)\| \leq \|u\|$.

$$b) A^t = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Alors $f^2 = f$. Comme f est linéaire : f est un projecteur.

$$c) \text{Im } f = f(\mathbb{R}^3) = f(\text{Vect}(e_1, e_2, e_3)) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}\left(\frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3)\right) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$$

$$\text{Im } f = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3).$$

Noter que $\dim \text{Im } f = 1$ alors $\dim \text{Ker } f = 2$.

$$f(e_1) = f(e_2) \text{ et } f(e_2) = f(e_3). \text{ Mais } f(e_3 - e_1) = 0_E \text{ et } f(e_1 - e_3) = 0_E.$$

Ainsi $(e_1 - e_1, e_2 - e_3)$ est une famille linéairement indépendante de $\text{Ker } f$ qui est de dimension 2.

Donc $(e_1 - e_1, e_2 - e_3)$ est une base de $\text{Ker } f$.

Comme f est un projecteur : $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires.

$$\text{On peut } \langle e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_2 \rangle = 1 - 1 = 0 \text{ et } \langle e_1 + e_2 + e_3, e_2 - e_3 \rangle = 1 - 1 = 0.$$

Ceci suffit pour dire que $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont orthogonaux.

Alors $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$. f est le projecteur orthogonal sur $\text{Im } f$.

Q3 a) $E = K_{\mathbb{R}} p \oplus \mathcal{I}_{\mathbb{R}} p$ et $K_{\mathbb{R}} p$ et $\mathcal{I}_{\mathbb{R}} p$ sont orthogonaux.

Soit $u \in E$. $\exists! (u_1, u_2) \in K_{\mathbb{R}} p \times \mathcal{I}_{\mathbb{R}} p$, $u = u_1 + u_2$. $u_2 = p(u)$

u_1 et u_2 sont orthogonaux donc $\|u_1 + u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \geq \|u_2\|^2$.

donc $\|u\|^2 \geq \|p(u)\|^2$. Comme $\|u\| \geq 0$ et $\|p(u)\| \geq 0$: $\|u\| \geq \|p(u)\|$.

$$\underline{\underline{\forall u \in E, \|p(u)\| \leq \|u\|}}$$

b) Supposons que $K_{\mathbb{R}} p$ et $\mathcal{I}_{\mathbb{R}} p$ ne sont pas orthogonaux.

$\exists (v, w) \in K_{\mathbb{R}} p \times \mathcal{I}_{\mathbb{R}} p$, $\langle v, w \rangle \neq 0$. Supposons que $\forall u \in E, \|p(u)\| \leq \|u\|$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $p(w + \lambda v) = w$ car $w \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}} p$ et $\lambda v \in K_{\mathbb{R}} p$.

$$\|w\|^2 = \|p(w + \lambda v)\|^2 \leq \|w + \lambda v\|^2 = \|w\|^2 + 2\lambda \langle w, v \rangle + \lambda^2 \|v\|^2.$$

$$\text{Ainsi } 0 \leq 2\lambda \langle w, v \rangle + \lambda^2 \|v\|^2 = \lambda [2\langle w, v \rangle + \lambda \|v\|^2].$$

$$\text{Alors } \forall \lambda \in \underline{\underline{]0, +\infty[}}, 0 < 2\langle w, v \rangle + \lambda \|v\|^2 \text{ et } \forall \lambda \in \underline{\underline{]-\infty, 0[}}, 0 > 2\langle w, v \rangle + \lambda \|v\|^2.$$

En faisant tendre λ vers 0 par valeurs supérieures (resp. inférieures) dans ① (resp. ②)

il vient : $2\langle w, v \rangle \geq 0$ (resp. $2\langle w, v \rangle \leq 0$).

Ainsi $2\langle w, v \rangle = 0$. Donc $\langle v, w \rangle = 0$. cela contredit l'hypothèse $\langle v, w \rangle \neq 0$.

$$\text{Alors } \underline{\underline{\exists u \in E, \|p(u)\| > \|u\|}}$$

c) Soit p un projecteur non nul. Posons $F = K_{\mathbb{R}}(p - \text{id}_E)$ et $G = K_{\mathbb{R}} p$. $E = F \oplus G$.

F est perpendiculaire à id_E car dans le cas contraire $G = E$ donc $K_{\mathbb{R}} p = E$ et $p = \text{id}_E$!

Alors $\exists u_0 \in F - \{0_E\}$. Alors $u_0 \neq 0_E$ et $p(u_0) = 0$. Alors $\frac{\|p(u_0)\|}{\|u_0\|} = 0$.

• Supposons que p soit une projection orthogonale. $\forall u \in E, \|p(u)\| \leq \|u\|$.

$$\forall u \in E - \{0_E\}, \frac{\|p(u)\|}{\|u\|} \leq 1 = \frac{\|p(u_0)\|}{\|u_0\|}. \text{ Alors } \sup_{u \neq 0_E} \frac{\|p(u)\|}{\|u\|} = \max_{u \neq 0_E} \frac{\|p(u)\|}{\|u\|} = 1.$$

• Supposons que $\sup_{u \neq 0_E} \frac{\|p(u)\|}{\|u\|} = 1$. Alors $\forall u \in E - \{0_E\}, \|p(u)\| \leq \|u\|$.

rien : $\forall u \in E, \|p(u)\| \leq \|u\|$. Alors p est une projection orthogonale.

Question 3 HEC 2011 S 1155

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.

On suppose que l'espérance $\theta = E(X_1)$ est non nulle et inconnue.

Trouver l'estimateur sans biais de l'espérance $\theta = E(X_1)$, qui soit de variance minimale dans l'ensemble des estimateurs de la forme $\tilde{T}_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ $((a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n)$.

Cours Rappel de la définition d'un espace vectoriel euclidien

Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons $T_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E(X_i)$ existe et vaut θ .

Alors $E(T_n)$ existe et vaut $\sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$ d'ac $(\sum_{i=1}^n a_i) \theta$

Alors T_n est un estimateur sans biais de θ si et seulement si $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ car $\theta \neq 0$

Posons $\sigma^2 = V(X_1)$ ($V(X_i)$ existe car X_i possède un moment d'ordre 2).

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et possèdent une variance.

Alors $V(T_n)$ existe et $V(T_n) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2$.

1^{er} Cas $\sigma^2 = 0$. $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $V(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = 0$!

Notons $\mathcal{S} = \{ \sum_{i=1}^n a_i X_i ; (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \}$.

Les estimateurs sans biais, de variance minimale, appartenant à $\mathcal{S}$

sont les éléments $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ de $\mathcal{S}$ tels que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

2^{er} Cas $\sigma^2 \neq 0$

le problème revient à trouver $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$1^\circ \sum_{i=1}^n a_i = 1$$

$$2^\circ \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \sigma^2 \text{ soit minimal ce qui revient à } \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{ minimal.}$$

$$\text{On doit donc étudier } \begin{cases} \min \sum_{i=1}^n a_i^2 \\ \text{s.c. } \sum_{i=1}^n a_i = 1 \end{cases}$$

* Pour $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i^2$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $g(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i$. g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $\mathcal{B} = \{A \in \mathbb{R}^n \mid g(A) = 1\}$.

* Il s'agit donc de trouver le minimum de f sous la contrainte $\mathcal{B}$.

Pour $\mathcal{B} = \text{Ker } g$. $\mathcal{B}^\perp = \text{Vect}(\nabla g(x)) = \text{Vect}(1, 1, \dots, 1)$.
 $\uparrow$
 à quelque chose dans $\mathbb{R}^n$

* Soit $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{B}$.

$\sum_{i=1}^n b_i = 1$ et $\nabla f(B) \in \mathcal{B}^\perp = \text{Vect}(1, 1, \dots, 1)$. $\nabla f(B) = (2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n)$.

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $(2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n) = \lambda(1, 1, \dots, 1)$.

Donc $2b_1 = 2b_2 = \dots = 2b_n = \lambda$. $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Alors $nb_1 = \sum_{i=1}^n b_i = 1$. $b_1 = \frac{1}{n}$. Ainsi $B = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$.

* Pour $B = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$.

donnons $B \in \mathcal{B}$. Soit $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{B}$.

$J^2 = (\sum_{i=1}^n a_i)^2 = (\sum_{i=1}^n 1 \cdot a_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n 1^2) (\sum_{i=1}^n a_i^2) = n f(A)$.
 $\uparrow$ Cauchy-Schwarz.

Alors $f(A) \geq \frac{1}{n}$.

Preuve $f(A) \geq f(B)$.

Alors $\forall A \in \mathcal{B}$, $f(A) \geq f(B)$.

Il y a donc un minimum global sous la contrainte $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ est l'unique point de $\mathcal{B}$ qui réalise ce minimum.

Alors $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i$ est l'unique estimateur sans biais^{de θ} de variance

minimal parmi les estimateurs sans biais de θ du type $\sum_{i=1}^n a_i X_i$.

Parque $\sigma^2 = V(X_1) \neq 0$.

Remarque... On pourrait aller beaucoup plus vite pour traiter

$$\begin{cases} \text{min } \sum_{i=1}^n a_i^2 \\ \text{s.c. } \sum_{i=1}^n a_i = 1 \end{cases}$$

soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

$$1 = 1^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n 1 \times a_i \right)^2 \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz dans } \mathbb{R}^n}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) = n \sum_{i=1}^n a_i^2. \text{ Ainsi } \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Notons que (*) est une égalité si et seulement si $((1, 1, \dots, 1), (a_1, a_2, \dots, a_n))$ est liée dans

si et seulement si $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$. Notons aussi que $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ et $\sum_{i=1}^n a_i = 1$

donc $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$.

Pour cela $\forall i \in \{1, \dots, n\}, b_i = \frac{1}{n}$. $\sum_{i=1}^n b_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} = n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$.

$$\text{si } \sum_{i=1}^n b_i = 1$$

$$\text{et } \forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n a_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

cela donne bien le résultat obtenu plus haut.