Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L, constituent un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2014.

1. SUJETS DE L'OPTION SCIENTIFIQUE

Exercice principal S 49

Les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.

2. Dans cette question, on note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et Φ la fonction de répartition de Z.
Pour tout réel θ, on note P_θ la loi de la variable aléatoire $Y_\theta = (Z+\theta)^2$.

a) Exprimer la fonction de répartition de Y_θ à l'aide de Φ.

b) La variable aléatoire Y_θ possède-t-elle une densité ?

c) Reconnaître la loi P_0.

d) Montrer que pour tout réel $\theta \geqslant 0$, les lois P_θ et $P_{-\theta}$ sont identiques.

3.a) Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles. Établir pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, l'inégalité :

$$P\big(\left|\sqrt{X} - a\right| \geqslant b\big) \leqslant P\big(\left|X - a^2\right| \geqslant ab\big)$$

b) Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente d'estimateurs d'un paramètre positif inconnu θ, ne prenant tous que des valeurs positives ou nulles.
Déduire de la question précédente que $(\sqrt{T_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un suite convergente d'estimateurs du paramètre $\sqrt{\theta}$.

4. Dans cette question, θ désigne un paramètre positif inconnu et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune P_θ définie dans la question 2.

a) Trouver une suite convergente d'estimateurs sans biais $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \big(\varphi_n(X_1,\ldots,X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du paramètre θ^2.

b) En déduire une suite convergente d'estimateurs du paramètre θ. Sont-ils sans biais ?

Exercice sans préparation S 49

1. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

2. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3 et soit D une droite vectorielle de E stable par f.

a) Montrer que D admet un supplémentaire stable par f.

b) Montrer que si P est un supplémentaire de D stable par f, la restriction de f à P définit un endomorphisme diagonalisable de P.

Exercice principal S 50

1. Question de cours : Formule du binôme négatif.

2. Soit $p \in]0,1[$. Pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on note $p_{n,k}$ la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ soit égale à k.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n,0}$ et montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n,k} = \frac{1}{p}$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi.

On pose : $S_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Pour tout $(a,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$, on pose : $F_n(a) = P[S_n \leqslant a]$.

3. Soit $a > 0$. On note $N(a) = \text{Card}\{n \in \mathbb{N} : S_n \leqslant a\}$ (pour tout $\omega \in \Omega$, $N_a(\omega)$ est le nombre, éventuellement égal à $+\infty$, des entiers n pour lesquels $S_n(\omega) \leqslant a$).

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $[N(a) = n] \in \mathcal{A}$ et que $P\big[N(a) = n\big] = F_{n-1}(a) - F_n(a)$.

b) Exprimer l'événement $\big[N(a) < \infty\big]$ en fonction des événements $\big([N(a) = n]\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire que $\big[N(a) < \infty\big] \in \mathcal{A}$.

c) Montrer que la suite $\big(F_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie et que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(a) = 0$ si et seulement si $P\big[N(a) < \infty\big] = 1$.

d) On suppose dans cette question que la série de terme général $F_n(a)$ est convergente.

Montrer que la variable aléatoire $N(a)$ admet une espérance et que $E\big(N(a)\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(a)$.

4. Soit p et q deux réels vérifiant $0 < q < p < 1$. Dans cette question, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X_n = 0) = 1 - p$ et $P(X_n = 1) = q$.

En utilisant les questions précédentes et en considérant les variables aléatoires $Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n = 0 \\ 1 & \text{si } X_n \geqslant 1 \end{cases}$, montrer que pour tout $a > 0$, on a : $E\big(N(a)\big) \leqslant \dfrac{\lfloor a \rfloor - 1}{p}$.

Exercice sans préparation S 50

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$; on note $\langle\, , \rangle$ le produit scalaire et $\|\;\|$ la norme associée.

1. Soit $x \in E$. Montrer que $\|x\| = \sqrt{n}$ si et seulement si il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in E$ vérifiant $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$.

2. Soit x et y deux vecteurs de E. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in E$ vérifiant $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$ et $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k e_k$.

Exercice principal S 56

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Question de cours : Soit h une fonction numérique de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

a) Qu'appelle-t-on point critique de h ?

b) Qu'appelle-t-on point critique pour l'optimisation de h sous contraintes d'égalités linéaires

$$\mathcal{C}\ \begin{cases} g_1(X) = b_1 \\ \cdots \\ g_p(X) = b_p \end{cases}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par : $f(u_1, \ldots, u_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^2$.

2. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels donnés non tous égaux, de moyenne $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$.

On pose : $s^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2$, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\alpha_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{ns^2}$.

a) Montrer que s^2 est strictement positif.

b) Exprimer en fonction de s^2, le minimum global de la fonction $\phi : t \mapsto f(x_1 - t, \ldots, x_n - t)$.

c) Soit ρ et θ deux réels donnés.

Montrer qu'il n'existe qu'un seul point critique $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ pour l'optimisation de f sous les contraintes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = \rho$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i u_i = \theta$, donné par : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u_i^* = \dfrac{\rho}{n} + (\theta - \rho\,\overline{x})\,\alpha_i$.

3. Soit n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ discrètes, mutuellement indépendantes, admettant des moments d'ordre 1 et 2 telles que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E(Y_i) = ax_i + b$ et $V(Y_i) = 1$, où a et b sont des paramètres réels.

On considère les variables aléatoires de la forme $A_n^{(r)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i Y_i$, où $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ indépendant de a et de b (mais qui peut dépendre de $x_1, \ldots, x_n$).

a) Trouver, parmi les variables aléatoires $A_n^{(r)}$ qui vérifient pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $E(A_n^{(r)}) = a$, celles qui ont la plus petite variance.

Proposer une interprétation de ce résultat en terme d'estimation du paramètre a.

b) Énoncer et démontrer un résultat similaire pour le paramètre b.

Exercice sans préparation S 56

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est un projecteur.
2. Quelles sont les valeurs propres de f ?
3. Combien existe-t-il de droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?
4. Combien existe-t-il de plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

Exercice principal S 61

1. Question de cours : Densité de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes.

2. Soit U et V deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

Déterminer une densité g de $U + V$. Donner l'allure du graphe de g.

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
Pour tout élément $f \in \mathcal{E}$, on note $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, T(f)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

3. Montrer que l'application T qui, à tout $f \in \mathcal{E}$ associe $T(f)$, est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

4. Montrer que si un élément $f \in \mathcal{E}$ est une densité de probabilité, alors $T(f)$ est également une densité de probabilité.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, identifiés à des fonctions polynômes.

a) Montrer que la restriction de T à $\mathbb{R}_n[X]$ définit un endomorphisme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) L'endomorphisme T_n est-il bijectif ? Est-il diagonalisable ?

6. L'endomorphisme T est-il injectif ? Est-il surjectif ?

Exercice sans préparation S 61

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.

2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice principal S 75

1. Question de cours : Théorème de d'Alembert-Gauss. Application à la factorisation de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Soit a, b et c des réels et T le trinôme $T(X) = aX^2 + bX + c$. On note T' et T'' respectivement, les dérivées première et seconde de la fonction T.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a, b et c pour que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait : $T(x) \geqslant 0$.

b) On suppose que T possède deux racines réelles distinctes. Déduire de la question précédente que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(x)T''(x) \leqslant (T')^2(x)\,.$$

Dans la suite de l'exercice, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n ayant n racines réelles distinctes.

On pose : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On note P' et P'' respectivement, les dérivées première et seconde de P.

3. Montrer que P' possède $(n-1)$ racines réelles distinctes.

4.a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ est décroissante sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $P(x)P''(x) \leqslant (P')^2(x)$.

5. À l'aide des questions précédentes, établir pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, l'inégalité : $a_k\, a_{k+2} \leqslant a_{k+1}^2$.

Exercice sans préparation S 75

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{(i+j+1)!}\,.$$

Déterminer le réel a. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice principal S 91

1. Question de cours : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\mathbb{R}_n[T]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Que peut-on dire d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[T]$ qui admet plus de n racines ?

2. On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n réels tous distincts.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ & & \ddots & \ddots & \\ 1 & x_{n-1} & & & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$. Soit $U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $AU = 0$.

a) Montrer que le polynôme $Q(T) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j T^{j-1}$ est nul.

b) En déduire que la matrice A est inversible.

3. Dans cette question, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p et p' ($0 < p < 1$ et $0 < p' < 1$) et telles que la covariance de X et Y est nulle.
Montrer que X et Y sont indépendantes.

4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes finies définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et soit n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$.
On pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in [\![1, m]\!]$:

$$p_i = P(X = x_i), \quad q_j = P(Y = y_j), \quad \pi_{i,j} = P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) \quad \text{et} \quad \delta_{i,j} = \pi_{i,j} - p_i q_j$$

On suppose que pour tout $h \in [\![1, n-1]\!]$ et tout $k \in [\![1, m-1]\!]$, la covariance de X^h et Y^k est nulle.

a) Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\sum\limits_{j=1}^{m} \delta_{i,j} y_j^k = 0$.

b) En déduire que X et Y sont indépendantes.

Exercice sans préparation S 91

Soit α un réel donné. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(n+k)^\alpha}$.

1. Étudier suivant les valeurs de α, la convergence de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$. En cas de convergence, on précisera la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

2. Étudier la nature de la série de terme général u_n.

3. Soit x un réel vérifiant $|x| < 1$. Étudier suivant les valeurs du réel α, la convergence de la série de terme général $u_n x^n$.

Exercice principal S 93

1. Question de cours : Formule de l'espérance totale pour une variable aléatoire discrète X et un système complet d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note $E(X/A_n)$ l'espérance de X pour la probabilité conditionnelle P_{A_n}.

On lance indéfiniment un dé équilibré et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le numéro sorti au n-ième tirage. Les variables aléatoires X_n, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sont donc supposées indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

Pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$, on note T_i le temps d'attente de la sortie du numéro i.

2.a) Donner la loi de T_1 ainsi que son espérance et sa variance.

b) Trouver l'espérance des variables aléatoires $\text{Inf}(T_1, T_2)$ et $\text{Sup}(T_1, T_2)$.

3. Justifier l'existence de la covariance de T_1 et de T_2, que l'on notera $\text{Cov}(T_1, T_2)$.

4.a) Établir, pour tout $i \in [\![2, 6]\!]$, la relation : $E(T_1/[X_1 = i]) = 7$.

b) Montrer que pour tout $i \in [\![3, 6]\!]$, on a : $E(T_1T_2/[X_1 = i]) = E\big((1 + T_1)(1 + T_2)\big)$.

c) Calculer $E(T_1T_2)$.

d) En déduire $\text{Cov}(T_1, T_2)$ ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de T_1 et T_2.

5.a) Trouver un réel α tel que les variables aléatoires T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ soient non corrélées.

b) Calculer l'espérance conditionnelle $E(T_2 + \alpha T_1/[T_1 = 1])$.

c) Les variables aléatoires T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ sont-elles indépendantes ?

Exercice sans préparation S 93

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan x\right)^{n+2} \mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2.a) Calculer $u_{n-2} + u_n$.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice principal S 94

1. Question de cours : a) Convergence des séries de Riemann.

b) Établir l'encadrement strict suivant : $1 < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose : $x_k = \frac{k\pi}{2n+1}$. On rappelle que pour tout $x \in]0, \pi/2[$, $\text{cotan}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

2.a) Montrer que pour tout $x \in]0, \pi/2[$, on a : $e^{2ix} = \frac{\text{cotan}\, x + i}{\text{cotan}\, x - i}$.

b) En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(\text{cotan}\, x_k + i)^{2n+1}$ est un nombre réel.

3. Soit P_n le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $P_n(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{n-p}$.

a) Préciser le degré de P_n ainsi que son terme de plus haut degré.

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer (sous forme de somme) la partie imaginaire de $(t+i)^{2n+1}$. En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\text{cotan}^2 x_k$ est une racine de P_n et donner une factorisation de $P_n(X)$ sous la forme d'un produit de monômes.

c) Établir la formule : $\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2 x_k = \frac{n(2n-1)}{3}$.

4.a) Montrer que pour tout $u \in]0, \pi/2[$, on a : $\text{cotan}^2 u < \frac{1}{u^2} < 1 + \text{cotan}^2 u$.

b) Déduire des résultats précédents que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice sans préparation S 94

Soit $(U_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

Soit N une variable aléatoire définie sur Ω, indépendante de la suite $(U_n)_{n \geqslant 1}$, suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ $(n \geqslant 1$ et $0 < p < 1)$.

On pose : $M_n = \max(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ et $T_n = \begin{cases} U_1 & \text{si } [N=0] \text{ est réalisé} \\ M_k & \text{si } [N=k] \text{ est réalisé} \end{cases}$.

Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \geqslant 1}$.

Exercice principal S 101

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel défini par $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$.

On note :

- U la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 ;
- $\mathcal{V}_n$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que U soit un vecteur propre de A et de ${}^tA$;
- $\mathcal{W}_n$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall\, i \geqslant 2$, $a_{1,i} = a_{i,1} = 0$.

On admet sans démonstration que $\mathcal{V}_n$ et $\mathcal{W}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien.

2. Déterminer la dimension de $\mathcal{W}_n$.

3. Soit $A \in \mathcal{V}_n$. On note λ (respectivement μ) la valeur propre de A (resp. de ${}^tA$) associée au vecteur propre U.
Exprimer la somme de tous les coefficients de A en fonction de λ. Comparer λ et μ.

4.a) Déterminer $\mathcal{V}_2$ ainsi que sa dimension.
b) Montrer que pour tout $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$, il existe une unique matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ de $\mathcal{V}_3$ telle que $a_{1,1} = a$, $a_{1,2} = b$, $a_{1,3} = c$, $a_{2,1} = d$ et $a_{2,2} = e$. En déduire la dimension de $\mathcal{V}_3$.

5. Soit $P = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la première colonne est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}U$.
Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on note C_j la j-ième colonne de P. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Justifier l'existence d'une telle matrice P.
b) Montrer que la matrice $B = {}^tPAP$ a pour terme général $b_{i,j} = \langle C_i, AC_j\rangle$.
c) En déduire que $A \in \mathcal{V}_n$ si et seulement si ${}^tPAP \in \mathcal{W}_n$.
d) En déduire la dimension de $\mathcal{V}_n$.

Exercice sans préparation S 101

Soit $n_1 \in \mathbb{N}^*$, $n_2 \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$: X_1 suit la loi binomiale de paramètres (n_1, p) et X_2 suit la loi binomiale de paramètres (n_2, p).

1. Soit $n \in (X_1 + X_2)(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $[X_1 + X_2 = n]$.
2. Calculer l'espérance conditionnelle $E(X_1/X_1 + X_2 = n)$.

Exercice principal S 104

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont à densité et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X.

1. Question de cours : Rappeler la définition du rang d'une matrice. Quelle est, selon les valeurs des réels a, b, c et d le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

Dans tout l'exercice, X, Y et Z sont trois variables aléatoires ayant des moments d'ordre 2.

On admet que chacune des variables aléatoires XY, XZ et YZ admet une espérance et on suppose que la condition suivante est vérifiée : $E(X^2)E(Y^2) - \big(E(XY)\big)^2 \neq 0$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x, y) = E\big((Z - xX - yY)^2\big)$.

2.a) Établir les inégalités strictes : $E(X^2) > 0$ et $E(Y^2) > 0$.

b) Montrer que pour tout couple $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a : $E\big((xX + yY)^2\big) > 0$.

3.a) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique (x_0, y_0).

b) Montrer que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $E\big((Z - x_0X - y_0Y)(xX + yY)\big) = 0$.

c) En déduire l'égalité : $E\big((Z - xX - yY)^2\big) = E\big((Z - x_0X - y_0Y)^2\big) + E\big([(x - x_0)X - (y_0 - y)Y]^2\big)$.

d) Étudier les extremums de f.

4. Dans cette question, on suppose que X et Y sont indépendantes et suivent toutes les deux la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et on pose $Z = X^2$.

Déterminer l'ensemble des couples (x_0, y_0) pour lesquels $E\big((Z - xX - yY)^2\big)$ est minimale.

(on admet que le résultat relatif à l'espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes s'applique au cas où les deux variables aléatoires sont à densité)

Exercice sans préparation S 104

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $M^2 = 0$.

Montrer que M est semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice principal S 110

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ sur $\mathbb{R}$. Soit f un endomorphisme de E pour lequel il existe un entier $m \geqslant 2$, des endomorphismes $p_1, p_2, \ldots, p_m$ non nuls de E et m réels distincts $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, tels que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a : $f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$, où $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$. On note id l'endomorphisme identité de E.

1. Question de cours : Énoncer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'une matrice.

2. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Exprimer $P(f)$ en fonction des $P(\lambda_i)$ et des p_i pour $i \in [\![1, m]\!]$.

3. Soit Q le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $Q(X) = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$. Calculer $Q(f)$.

Qu'en déduit-on quant aux valeurs propres de f ?

4. Pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, on pose : $L_k(X) = \prod_{\substack{i \in [\![1,m]\!] \\ i \neq k}} \dfrac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_k - \lambda_i)}$.

Calculer $L_k(f)$. En déduire que $\mathrm{Im}(p_k) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \,\mathrm{id})$ ainsi que l'ensemble des valeurs propres de f.

5. Montrer que f est diagonalisable.

6. Vérifier que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$, on a : $p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j \end{cases}$.

7. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ (ensemble des endomorphismes de E) engendré par $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$. Déterminer la dimension de F.

Exercice sans préparation S 110

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite, et soit un nombre réel $\theta \neq 0$. On pose : $Y_0 = X_0$ et $\forall n \geqslant 1,\ Y_n = \theta Y_{n-1} + X_n$.

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_n.

2. Calculer pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+h})$.

Exercice principal S 112

1. Question de cours : Énoncer le théorème du prolongement de la dérivée.

On cherche les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(f'(x)\right)^2 - 2f(x)f''(x) = 0 \qquad (E)$$

2. Soit (a, b) un couple de réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ b\,x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Quelle condition doivent satisfaire a et b pour que la fonction f vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$ la relation (E) ?

3.a) Montrer que si une fonction polynomiale non nulle f vérifie (E), son degré est nécessairement égal à 0 ou 2.

b) Déterminer sous forme factorisée, les fonctions polynomiales qui vérifient pour tout $x \in \mathbb{R}$ la relation (E).

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles.

On suppose que f vérifie les conditions $(\mathcal{C})$ suivantes :

- la dérivée f' ne s'annule pas sur I ;
- la relation (E) est vérifiée pour tout $x \in I$.

a) On pose pour tout $x \in I$: $g(x) = \dfrac{f(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$. Calculer pour tout $x \in I$, la dérivée $g'(x)$ au point x.

b) Établir l'existence d'une constante réelle k strictement positive telle que pour tout $x \in I$, la dérivée de $\sqrt{f(x)}$ soit égale à $\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

c) En déduire que toutes les fonctions f qui vérifient les conditions $(\mathcal{C})$ sont de la forme : $f(x) = \alpha(x - r)^2$, avec $\alpha \neq 0$ et $r \notin I$.

Exercice sans préparation S 112

On tire avec remise une boule d'une urne contenant n boules numérotées. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois.

Calculer l'espérance de X et en trouver un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

Exercice principal S 113

Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme associée $\|\,.\,\|$.
Soit p et r deux projecteurs orthogonaux distincts de E. On note id l'endomorphisme identité de E.

1. Question de cours : Définition et propriétés d'un projecteur orthogonal.

2. *Dans cette question uniquement*, on suppose que p et r commutent.

a) Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.

b) Dans le cas où $p \circ r$ est non nul, déterminer ses valeurs propres.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}(p \circ r) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$ et $\mathrm{Im}(p \circ r) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r)$.

3. Soit x un vecteur propre de $p \circ r$ associé à la valeur propre λ.

a) Dans le cas où $\lambda \neq 0$, montrer que $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id})$ et $\big(r(x) - \lambda x\big) \in \mathrm{Ker}(p)$.

b) Calculer $\langle x, r(x) - \lambda x\rangle$. En déduire l'encadrement : $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

4. On suppose que l'ensemble des valeurs propres de $p \circ r$ est inclus dans $\{0, 1\}$.
On pose $p_1 = p$, $p_2 = \mathrm{id} - p$ et pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}$, on pose $a_{i,j} = p_i \circ r \circ p_j$.

a) Calculer $a_{1,1} + a_{1,2}$, $a_{1,1} + a_{2,1}$ et $a_{1,2} \circ a_{2,1} - (\mathrm{id} - p \circ r) \circ a_{1,1}$.

b) Montrer que $a_{1,1}$ est diagonalisable.

c) Montrer que p et r commutent.

Exercice sans préparation S 113

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de variables aléatoires discrètes centrées définies sur un même espace probabilisé et admettant une variance.

1. Justifier l'existence de $V_0 = \inf\{V(X) : X \in \mathcal{E}\}$.

2. On suppose que pour tout $(X_1, X_2) \in \mathcal{E}^2$, on a $\dfrac{1}{2}(X_1 + X_2) \in \mathcal{E}$.
Soit $(X_1, X_2) \in \mathcal{E}^2$ avec $V(X_1) = V(X_2) = V_0$. Montrer que $X_1 = X_2$ presque sûrement.

Exercice principal S 116

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$. On note F la fonction de répartition de X_1.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Y_k = -\ln X_k$.

2.a) Calculer pour tout $s \in \mathbb{N}$, $E(Z_n^s)$.

b) Quelle est la loi de Y_1 ?

c) En déduire la loi de $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

d) Déterminer une densité f_{Z_n} de la variable aléatoire Z_n.

3. Soit r un entier naturel et $z \in]0,1]$.

a) Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^z \left(-\ln t\right)^r \mathrm{d}t$.

b) À l'aide du changement de variable $y = -\ln t$ dont on justifiera la validité, montrer que l'on a :

$$\frac{1}{r!}\int_{-\ln z}^{+\infty} y^r \,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = z \times \sum_{k=0}^{r} \frac{(-\ln z)^k}{k!}.$$

c) En déduire la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n.

4. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice sans préparation S 116

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} > 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

1. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, on a : ${}^tXAX > 0$.

2. Justifier que A est diagonalisable et inversible.