HEC 2010 S1

Sujet S 1 - Exercice

1) Question de cours : Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite réelle décroissante soit convergente.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$, et M_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) a) Montrer que le réel a est valeur propre de M_n si et seulement si le polynôme $P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - 1$ admet a pour racine.

b) Déterminer alors le sous-espace propre associé à a.

3) a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, le polynôme P_k admet une unique racine dans l'intervalle $]1, +\infty[$; on la note a_k.

b) Établir la convergence de la suite $(a_k)_{k\geqslant 2}$. Déterminer sa limite.

4) a) Montrer que, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, le polynôme P_{2p} admet une racine unique dans $\mathbb{R}^{-*}$; on la note b_p.

b) Établir la décroissance, puis la convergence de la suite $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite ℓ.

c) Déterminer un équivalent simple de la suite $(b_p - \ell)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

5) a) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles la matrice M_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles la matrice M_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Sujet S 1 - Exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-échantillon i.i.d. de la loi de X.

1) Déterminer une densité de $Y_k = -\max(X_1, X_2, \dots, X_k)$, pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$.

2) En déduire $\mathbb{P}([X_n \geqslant X_1] \cap \dots \cap [X_n \geqslant X_{n-1}])$.

(Q1) Une suite réelle décroissante est convergente si et seulement si elle est minorée.

(Q2) a) Soit $U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}$ une matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Posons $P_n = X^n-(X^{n-1}+X^{n-2}+\dots+X+1)$.

dans le texte c'est a !!

$$M_nU=\lambda U \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2+\dots+u_n=\lambda u_1\\ u_1=\lambda u_2\\ u_2=\lambda u_3\\ \vdots\\ u_{n-1}=\lambda u_n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n-1}=\lambda u_n\\ u_{n-2}=\lambda^2u_n\\ \vdots\\ u_1=\lambda^{n-1}u_n\\ u_1+u_2+\dots+u_n=\lambda u_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\forall k\in [\![1,n-1]\!],\ u_k=\lambda^{n-k}u_n.\\ \text{et}\\ (\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}+\dots+1)u_n=\lambda^n u_n\end{cases}$$

$$M_nU=\lambda U \Leftrightarrow \begin{cases}\forall k\in [\![1,n-1]\!],\ u_k=\lambda^{n-k}u_n\\ (\lambda^n-\lambda^{n-1}-\lambda^{n-2}-\dots-\lambda-1)u_n=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}P_n(\lambda)u_n=0\\ \forall k\in [\![1,n-1]\!],\ u_k=\lambda^{n-k}u_n\end{cases}$$

1er cas.. $P_n(\lambda)\neq 0$.

$$M_nU=\lambda U \Leftrightarrow \begin{cases}u_n=0\\ \forall k\in [\![1,n-1]\!],\ u_k=\lambda^{n-k}u_n=0\end{cases} \Leftrightarrow U=0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

Alors λ n'est pas valeur propre de M_n.

2ième cas.. $P_n(\lambda)=0$.

$M_nU=\lambda U \Leftrightarrow \forall k\in [\![1,n-1]\!],\ u_k=\lambda^{n-k}u_n \Leftrightarrow$

Alors 1) λ est valeur propre de M_n

2) $SEP(M_n,\lambda)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\lambda^{n-1}\\\lambda^{n-2}\\\vdots\\\lambda\\1\end{pmatrix}\right)$.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. λ est valeur propre de M_n si et seulement si λ est racine du polynôme $P_n=X^n-X^{n-1}-X^{n-2}-\dots-X-1$.

b) D'après ce qui précède si λ est une valeur propre de M_n (dans $M_n(\mathbb{R})$), le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix}\lambda^{n-1}\\\lambda^{n-2}\\\vdots\\\lambda\\1\end{pmatrix}$

Remarque.. les sous-espaces propres de M_n, s'il en existe sont de dimension 1. Alors M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si P_n admet n racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{R}$.

Q3 a) Soit $k\in[\![2,+\infty[\![$. Soit $\alpha\in]1,+\infty[$. $\alpha\neq 1$

$$P_k(\alpha)=0 \iff \alpha^k-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha^i=0 \iff 0=\alpha^k-\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\left(\alpha^k-\alpha^{k+1}-1+\alpha^k\right).$$

$$P_k(\alpha)=0\iff 2\alpha^k-\alpha^{k+1}-1=0\iff \alpha^{k+1}-2\alpha^k+1=0.$$

Les zéros de P_k dans $]1,+\infty[$ sont les zéros de $Q_k=X^{k+1}-2X^k+1$ dans $]1,+\infty[$.

$\forall x\in[1,+\infty[$, $Q_k'(x)=(k+1)x^k-2kx^{k-1}=(k+1)x^{k-1}\left(x-\frac{2k}{k+1}\right)$. $\frac{2k}{k+1}>1$ ($k\geq 2$).

Q_k est strictement décroissante sur $[1,\frac{2k}{k+1}]$ et strictement croissante sur $[\frac{2k}{k+1},+\infty[$.

$Q_k(1)=0$ donc $\forall x\in]1,\frac{2k}{k+1}]$, $Q_k(x)<Q_k(1)=0$. Q_k ne s'annule pas sur $]1,\frac{2k}{k+1}]$.

Q_k est continue et strictement croissante sur $[\frac{2k}{k+1},+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}Q_k(x)=+\infty$.

Alors Q_k réalise une bijection de $[\frac{2k}{k+1},+\infty[$ sur $[Q_k(\frac{2k}{k+1}),+\infty[$.

Or $Q_k(\frac{2k}{k+1})<Q_k(1)=0$. Donc $0\in[Q_k(\frac{2k}{k+1}),+\infty[$.

Alors $\exists!\, a_k\in[\frac{2k}{k+1},+\infty[$, $Q_k(a_k)=0$.

$2>\frac{2k}{k+1}$ et $Q_k(2)=2^{k+1}-2\times 2^k+1=1>0=Q_k(a_k)$ donc $a_k<2$.

Finalement Q_k possède un zéro et un seul appartenant à $]1,+\infty[$.

Ce zéro a_k appartient à $[\frac{2k}{k+1},2[$ (et même à $]\frac{2k}{k+1},2[$).

Alors P_k admet une unique racine dans l'intervalle $]1,+\infty[$ que nous notons a_k. De plus $a_k\in[\frac{2k}{k+1},2[$.

b) $\forall k\in[\![2,+\infty[\![$, $\frac{2k}{k+1}\leq a_k<2$ et $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{2k}{k+1}=2$ donc

par encadrement $\lim\limits_{k\to+\infty}a_k=2$.

Exercice.. Montrer que $(a_k)_{k\geq 2}$ est croissante. Retrouver sa convergence et sa limite.

(Q4) a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$.

$$P_{2p}(x)=0 \Leftrightarrow x^{2p}-\sum_{k=0}^{2p-1} x^k=0 \underset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} x^{2p}-\frac{1-x^{2p}}{1-x}=0 \Leftrightarrow (1-x)x^{2p}-1+x^{2p}=0$$

$$P_{2p}(x)=0 \Leftrightarrow x^{2p+1}-2x^{2p}+1=0 \Leftrightarrow Q_{2p}(x)=0.$$

Les zéros de P_{2p} dans $]-\infty,0[$ sont les zéros de Q_{2p} dans $]-\infty,0[$.

$$\forall x\in]-\infty,0[,\ Q'_{2p}(x)=(2p+1)x^{2p}-4px^{2p-1}=\underbrace{x^{2p-1}}_{<0}\underbrace{[(2p+1)x-4p]}_{<0}>0.$$

Q_{2p} est strictement croissante et continue sur $]-\infty,0[$. De plus $\lim_{x\mapsto-\infty} Q_{2p}(x)=-\infty$ et $\lim_{x\mapsto 0^-} Q_{2p}(x)=1$.

Alors Q_{2p} réalise une bijection de $]-\infty,0[$ et sur $]-\infty,1[$.

$0\in]-\infty,1[$. Ainsi $\exists!\ b_p\in]-\infty,0[,\ Q_{2p}(b_p)=0$.

Alors $\exists!\ b_p\in]-\infty,0[,\ P_{2p}(b_p)=0$.

P_{2p} admet une racine et une seule dans $\mathbb{R}^{-*}$ et ceci pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

b) Soit $p\in\mathbb{N}^*$.

$$Q_{2p}(b_{p+1})=Q_{2p}(b_{p+1})-\underbrace{Q_{2p+2}(b_{p+1})}_{=0}=b_{p+1}^{2p+1}-2b_{p+1}^{2p}+1-b_{p+1}^{2p+3}+2b_{p+1}^{2p+2}-1.$$

$$Q_{2p}(b_{p+1})=b_{p+1}^{2p}(b_{p+1}-2)-b_{p+1}^{2p+2}(b_{p+1}-2)=b_{p+1}^{2p}(1-b_{p+1}^2)(b_{p+1}-2).$$

$$Q_{2p}(b_{p+1})=b_{p+1}^{2p}(1-b_{p+1})(1+b_{p+1})(b_{p+1}-2).$$

Rappelons que Q_{2p} est strictement croissante sur $]-\infty,0[$.

$Q_{2p}(b_p)=0$. $Q_{2p}(-1)=-1-2+1=-2<0$. Donc $b_p>-1$ car $Q_{2p}(b_p)>Q_{2p}(-1)$.

Donc $b_p>-1$ ... et ceci pour tout p dans $\mathbb{N}^*$ donc $b_{p+1}>-1$.

$b_{p+1}^{2p}>0$, $1-b_{p+1}>0$, $1+b_{p+1}>0$, $b_{p+1}-2<0$. Alors $Q_{2p}(b_{p+1})<0=Q_{2p}(b_p)$. Ainsi $b_{p+1}<b_p$.

La suite $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Nous avons vu que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $b_p>-1$. Donc $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est minorée. Alors $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Soit ℓ la limite de la suite $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$. $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $b_p>-1$ donc $\ell\geqslant -1$.

Supposons $\ell>-1$. $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers ℓ donc

$\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\ell\leqslant b_p<0$. Donc $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $|b_p|\leqslant|\ell|$. $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $|b_p^{2p}|=|b_p|^{2p}\leqslant|\ell|^{2p}$

$-1<\ell\leqslant 0$ donc $|\ell|<1$. Ainsi $\lim\limits_{p\mapsto+\infty}|\ell|^{2p}=0$. Par encadrement $\lim\limits_{p\mapsto+\infty}b_p^{2p}=0$.

Or $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $b_{2p}^{2p+1}-2b_{2p}^{2p}+1=0$.

En passant à la limite il vient : $\ell\times 0-2\times 0+1=0$; $1=0$!

Ainsi on ne peut pas avoir $\ell>-1$. Donc $\ell\leqslant -1$. Comme $\ell\geqslant -1$: $\ell=-1$.

$(b_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers -1.

c) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. $b_p^{2p}(2-b_p)=2b_p^{2p}-b_p^{2p+1}=1$. $b_p^{2p}=\dfrac{1}{2-b_p}$.

$b_p^{2p}>0$ et $2-b_p>0$. Donc $\ln b_p^{2p}=\ln\dfrac{1}{2-b_p}=-\ln(2-b_p)$.

Donc $2p\ln\underline{\underline{|b_p|}}=-\ln(2-b_p)\underset{p\mapsto+\infty}{\sim}-\ln 3$ car $\lim\limits_{p\mapsto+\infty}[-\ln(2-b_p)]=-\ln 3\neq 0$.

Donc $\ln|b_p|\underset{p\mapsto+\infty}{\sim}-\dfrac{\ln 3}{2p}$. Or $\lim\limits_{p\mapsto+\infty}|b_p|=1$.

Alors $|b_p|-1\underset{p\mapsto+\infty}{\sim}\ln|b_p|\underset{p\mapsto+\infty}{\sim}-\dfrac{\ln 3}{2p}$.

Donc $b_p-\ell=b_p+1\underset{\substack{\uparrow\\ b_p<0}}{=}-(|b_p|-1)\underset{p\mapsto+\infty}{\sim}\dfrac{\ln 3}{2p}$.

$b_p-\ell=b_p-(-1)\underset{p\mapsto+\infty}{\sim}\dfrac{\ln 3}{2p}$.

Q5) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappelons que dans $M_n(\mathbb{R})$ les sous-espaces propres de M_n sont des droites vectorielles. De plus $Sp_{\mathbb{R}} M_n = \{a \in \mathbb{R} \mid P_n(a) = 0\}$.

Dans ces conditions M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si P_n admet n racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

1er cas.. $n = 1$. $M_1 \in M_1(\mathbb{R})$ donc M_1 est diagonalisable dans $M_1(\mathbb{R})$.

2ème cas.. $n = 2$ $P_2 = X^2 - X - 1$. P_2 admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ qui sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

donc M_2 est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

3ème cas.. $n \geq 3$ $P_n(1) = 1 - n > 0$. 1 n'est pas racine de P. Soit $a \in \mathbb{R} - \{1\}$.

$$P_n(a) = 0 \Leftrightarrow a^n - \sum_{k=0}^{n-1} a^k = 0 \Leftrightarrow a^n - \frac{1-a^n}{1-a} = 0 \underset{\text{déjà vu}}{\Leftrightarrow} a^{n+1} - 2a^n + 1 = 0$$

$P_n(a) = 0 \Leftrightarrow \varphi_n(a) = 0$.

Les zéros de P_n dans $\mathbb{R}$ sont les zéros de φ_n dans $\mathbb{R} - \{1\}$.

Nous avons déjà vu que φ_n admet un zéro et un seul dans $]1, +\infty[$: a_n

$\forall x \in [0, 1[$, $\varphi_n'(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1} = (n+1)x^{n-1}\left[x - \frac{2n}{n+1}\right]$ et $\frac{2n}{n+1} > 1$

Alors $\varphi_n'(0) = 0$ et $\forall x \in]0, 1[$, $\varphi_n'(x) < 0$.

φ_n est strictement décroissante sur $[0, 1[$ et continue sur $[0, 1[$

φ_n réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $]\lim_{x \to 1^-} \varphi_n(x), \varphi_n(0)] =]0, 1]$.

donc φ_n ne s'annule pas sur $[0, 1[$.

Si n est pair, φ_n admet un zéro et un seul dans $]-\infty, 0[$: $b_{\frac{n}{2}}$.

Supposons n impair. $\forall x \in]-\infty, 0]$, $\varphi_n'(x) = (n+1)x^{n-1}\left[x - \frac{2n}{n+1}\right]$

Alors $\varphi_n'(0) = 0$ et $\forall x \in]-\infty, 0[$, $\varphi_n'(x) < 0$ ($n-1$ est pair...)

Alors φ_n est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et $\varphi_n(0) = 1$. $\forall x \in]-\infty, 0]$, $\varphi_n(x) \geq \varphi_n(0) = 1$

donc φ_n ne s'annule pas sur $]-\infty, 0[$ si n est impair.

résumons. Si n est pair φ_n admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}-\{1\}$ et si n est impair φ_n admet une racine et une seule dans $\mathbb{R}-\{1\}$.

Alors P_n admet au plus deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

comme $n \geqslant 3$: M_n n'est pas diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

Finalement M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $n = 1$ ou $n = 2$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Comme dans Q 2 on montre que :

1) $\forall a \in \mathbb{C}$, $a \in Sp_{\mathbb{C}} M_n \iff P_n(a) = 1$

2) $\forall a \in Sp_{\mathbb{C}} M_n$, $\dim SEP_{\mathbb{C}}(M_n, a) = 1$

Alors M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ si et seulement si P_n admet n racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{C}$.

si $n = 1$ ou 2 M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ donc M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

Supposons que $n \geqslant 3$.

On montre comme dans ce qui précède que les zéros de P_n dans $\mathbb{C}$ sont les zéros de $\varphi_n = X^{n+1} - 2X^n + 1$ dans $\mathbb{C}-\{1\}$.

$\varphi'_n = (n+1)X^n - 2n X^{n-1} = (n+1) X^{n-1}\left(X - \frac{2n}{n+1}\right)$. Les zéros de φ'_n dans $\mathbb{C}$ sont 0 et $\frac{2n}{n+1}$.

$\varphi_n(0) = 1 \neq 0$ Nous avons déjà vu que φ_n est strictement décroissante sur $[1, \frac{2n}{n+1}]$ et $\varphi_n(1) = 0$ donc $\varphi_n(1) = 0$ donc $\varphi_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$.

Alors $\varphi_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) \neq 0$.

Les racines de φ'_n ne sont pas racine de φ_n donc les racines de φ_n sont simples.

Alors $Q_n \in \mathbb{C}[X]$, $\deg Q_n = n+1$ et les racines de Q_n sont simples.

Donc Q_n admet $n+1$ racines dans $\mathbb{C}$ deux à deux distinctes et $Q_n(1)=0$.

Ainsi Q_n admet n racines dans $\mathbb{C}-\{1\}$ deux à deux distinctes.

Alors P_n admet n racines dans $\mathbb{C}$ deux à deux distinctes. Donc M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

M_n est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Question 1 **HEC 2010** $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon i.i.d. de la loi de X.

Q1. Déterminer une densité de $Y_k = -\operatorname{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, pour tout k dans $[\![1, n-1]\!]$.

Q2. En déduire $P(\{X_n \geqslant X_1\} \cap \cdots \cap (\{X_n \geqslant X_{n-1}\}))$.

Q1 Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Y_k prend ses valeurs dans $[-1, 0]$. Notons F_{Y_k} la fonction de répartition de Y_k. $\forall x \in]-\infty, -1[$, $F_{Y_k}(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{Y_k}(x) = 1$.

Soit $x \in [-1, 0[$. $F_{Y_k}(x) = P(-\max(X_1, \ldots, X_k) \leq x) = P(\max(X_1, \ldots, X_k) \geq -x)$

$F_{Y_k}(x) = 1 - P(\max(X_1, \ldots, X_k) < -x) = 1 - P(\{X_1 < -x\} \cap \ldots \cap \{X_k < -x\})$.

Or $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sont indépendantes donc $F_{Y_k}(x) = 1 - P(X_1 < -x) \cdots P(X_k < -x)$.

Notons que $-x \in]0, 1]$ donc $P(X_i < -x) = P(X_i \leq -x) = -x$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

$F_{Y_k}(x) = 1 - (-x)^k$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Y_k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ 1 - (-x)^k & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1 & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases} \qquad \text{ou} \quad (*) \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1] \\ 1 - (-x)^k & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

Il est aisé de montrer (avec (*)) que F_{Y_k} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. Ainsi Y_k est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, $F'_{Y_k}(x) = 0$ et $\forall x \in]-1, 0[$, $F'_{Y_k}(x) = k(-x)^{k-1}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{Y_k}(x) = \begin{cases} k(-x)^{k-1} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_{Y_k} est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{Y_k} sur $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. f_{Y_k} est une densité de Y_k.

Q2 Notons α la probabilité demandée. $\alpha = P(X_n \geq \max(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}))$

$\alpha = P(X_n \geq -Y_{n-1}) = P(X_n + Y_{n-1} \geq 0)$.

Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f est une densité de X_n.

1) X_n et Y_{n-1} sont deux variables aléatoires à densité. f est une densité de X_n et $f_{Y_{n-1}}$ une densité de Y_{n-1}.

2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes donc X_n et $Y_{n-1} = -\max(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ sont indépendantes.

3) f est bornée.

Alors $X_n + Y_{n-1}$ est une variable aléatoire à densité et $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f_{Y_{n-1}}(x-t)\,dt$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

$\alpha = P(X_n + Y_{n-1} \geqslant 0) = \int_0^{+\infty} h(t)\,dt$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$h(x) = \int_0^1 1\, f_{Y_{n-1}}(x-t)\,dt \underset{u=x-t}{=} \int_{x-1}^{x} f_{Y_{n-1}}(u)\,du$

Si $x > 1$: $[x-1, x] \subset]0, +\infty[$ donc $h(x) = \int_{x-1}^{x} f_{Y_{n-1}}(u)\,du = \int_{x-1}^{x} 0\,du = 0$.

Si $0 \leqslant x \leqslant 1$: $h(x) = \int_{x-1}^{x} f_{Y_{n-1}}(u)\,du \underset{x-1 \in [-1,0]}{=} \int_{x-1}^{0} f_{Y_{n-1}}(u)\,du \underset{x-1 \in [-1,0]}{=} \int_{x-1}^{0} (n-1)(-t)^{n-2}\,dt$.

$$h(x) = (n-1)\left[-\frac{(-t)^{n-1}}{n-1}\right]_{x-1}^{0} = (1-x)^{n-1}.$$

Alors $\alpha = \int_0^{+\infty} h(t)\,dt = \int_0^1 (1-t)^{n-1}\,dt = \left[-\frac{(1-t)^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}$.

$P(\{X_n \geqslant X_1\} \cap \{X_n \geqslant X_2\} \cap \dots \cap \{X_n \geqslant X_{n-1}\}) = \frac{1}{n}$; normal non ?

Exercice.. Montrer que $\forall x \in]-\infty, 0[$, $h(x) = (1-x)^{n-1} - (-x)^{n-1}$.

HEC 2010 S 2

Sujet S 2 - Exercice

Soit p un réel donné de $]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère un couple (U,T) de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, dont la loi de probabilité est donnée par : pour tout entier $n \geqslant 2$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}([U=n] \cap [T=t]) = \begin{cases} p^2 q^{n-2} & \text{si } |t| \leqslant n-2 \text{ et si } n, |t| \text{ de même parité} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales, lois conditionnelles.
2) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{\substack{|t| \leqslant n-2 \\ n, |t| \text{ de même parité}}} p^2 q^{n-2} = 1$.
3) a) Déterminer la loi marginale de U.
   b) En distinguant les trois cas $t=0$, $t>0$ et $t<0$, montrer que la loi marginale de T est donnée par :
   pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}([T=t]) = \dfrac{pq^{|t|}}{1+q}$.
   c) Calculer $\mathbb{E}(T)$.
4) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   a) Déterminer la loi conditionnelle de T sachant $[U=n]$.
   b) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(T/U=n)$ de T sachant $[U=n]$.
5) a) Justifier l'existence de $\mathbb{E}(U)$ et de $\mathbb{E}(UT)$. Calculer $\mathbf{Cov}(U,T)$.
   b) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Sujet S 2 - Exercice sans préparation

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = 3XP + (X^2 - X)P' - (X^3 - X^2)P'',$$

où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2) Déterminer $f(X^k)$ $(k \in \mathbb{N})$. Que peut-on dire du degré de $f(X^k)$?
3) f est-elle injective ? surjective ?
4) a) Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par f ($\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant n$).
   b) n étant ainsi choisi, soit ϕ l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   ϕ est-il diagonalisable ?

HEC 2010 S2 Correction de l'exercice

(Q1) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- La loi du couple (X,Y) est l'application de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $[0,1]$ qui à tout élément (x,y) de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ associe $P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$.

- Les lois marginales du couple (X,Y) sont les lois de probabilité de X et de Y.

- Soit $x\in X(\Omega)$ tel que $P(X=x)\neq 0$. La loi de Y sachant $\{X=x\}$ est l'application de $Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ ou $[0,1]$ qui à tout élément y de $Y(\Omega)$ associe $P_{\{X=x\}}(Y=y)$.
  Soit $y\in Y(\Omega)$ tel que $P(Y=y)\neq 0$. La loi de X sachant $\{Y=y\}$ est l'application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ ou $[0,1]$ qui à tout élément x de $X(\Omega)$ associe $P_{\{Y=y\}}(X=x)$.
  Les lois précédentes sont les lois conditionnelles du couple (X,Y).

⚠ Commençons par deux remarques.

R1. Soit $n\in [\![2,+\infty[\![$. Posons $H_n=\{t\in\mathbb{Z} \mid |t|\leq n-2$ et $|t|$ de même parité que $n\}$.

1er cas. n est pair. $\exists k\in\mathbb{N}^*$, $n=2k$. $n-2=2(k-1)$.

Si $k\geq 2$ $H_n=\{0\}\cup\{2i\,;\,i\in[\![1,k-1]\!]\}\cup\{-2i\,;\,i\in[\![1,k-1]\!]\}$.

Alors $\operatorname{card} H_n = 1+k-1+k-1 = 2k-1=n-1$

Si $k=1$ $H_n=\{0\}$. $\operatorname{card} H_n=1$ et $n-2=2(1-1)=0$ donc $\operatorname{card} H_n=n-1$

2ème cas. n est impair. $\exists k\in\mathbb{N}^*$, $n=2k+1$. $n-2=2k-1$

$H_n=\{2i-1\,;\,i\in[\![1,k]\!]\}\cup\{-(2i-1)\,;\,i\in[\![1,k]\!]\}$

$\operatorname{card} H_n = 2k=(2k+1)-1=n-1$

Ainsi $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\operatorname{card} H_n=n-1$.

R2 Soit $t\in\mathbb{Z}$. Posons $K_t=\{n\in\mathbb{N} \mid |t|\leq n-2$ et, n et $|t|$ ont même parité$\}$

Notons que si $k\in\mathbb{N}$, $|t|+2k$ a même parité que $|t|$.

Réciproquement soit $i\in\mathbb{N}$ tel que $|t|+i$ a même parité que $|t|$.

Alors $(|t|+i)-|t|$ est pair donc $\exists k\in\mathbb{N}$, $i=2k$.

L'ensemble des éléments de $\mathbb{N}$ qui ont même parité que $|t|$ est $\{|t|+2k \,;\, k\in\mathbb{N}\}$

Alors $K_t=\{|t|+2k \mid k\in\mathbb{N}$ et $|t|\le |t|+2k-2\}=\{|t|+2k \,;\, k\in\mathbb{N}^*\}$.

ou encore $\underline{K_t=\{|t|+2k+2,\ k\in\mathbb{N}\}}$

(Q2) soit $n\in[\![2,+\infty[\![$. $\displaystyle\sum_{\substack{|t|\le n-2\\ n \text{ et } |t| \text{ ont même parité}}} p^2q^{n-2}=\sum_{t\in H_n}p^2q^{n-2}=(\operatorname{card}H_n)p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2}$.

$p\in]0,1[$ et $q=1-p$ donc $|q|<1$. Alors la série de terme général nq^{n-1} converge.
Ainsi la série de terme général $(n-1)q^{n-2}$ converge et de même de la série de terme général $(n-1)p^2q^{n-2}$.

Alors $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{t\in H_n}p^2q^{n-2}$ existe

et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{t\in H_n}p^2q^{n-2}=\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)p^2q^{n-2}\overset{n\leftarrow n-1}{=}p^2\sum_{n=1}^{+\infty}nq^{n-1}=p^2\times\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{p^2}{p^2}=1$.

$\underline{\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{\substack{|t|\le n-2\\ n \text{ et } |t| \text{ de même parité}}}p^2q^{n-2} \text{ existe et vaut } 1.}$

(Q3) a) $(\{T=t\})_{t\in\mathbb{Z}}$ est un système complet d'événements. Alors :

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ P(U=n)=\displaystyle\sum_{t\in\mathbb{Z}}P(\{U=n\}\cap\{T=t\})=\sum_{t\in H_n}p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2}$.

$\underline{\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ P(U=n)=(n-1)p^2q^{n-2}.}$

b) Soit $t\in\mathbb{Z}$. $(\{U=n\})_{n\in[\![2,+\infty[\![}$ est un système complet d'événements donc

$P(T=t)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}P(\{U=n\}\cap\{T=t\})=\sum_{n\in K_t}p^2q^{n-2}$

Pour faire plaisir au correcteur envisageons trois cas !! mais bon cela peut faciliter le travail des candidats.

1er cas. $t=0$. $K_t=\{2k+2 \,;\, k\in\mathbb{N}\}$

Alors $P(T=t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}p^2q^{2k+2-2}=p^2\times\sum_{k=0}^{+\infty}(q^2)^k=p^2\times\frac{1}{1-q^2}=\frac{p}{1+q}=\frac{pq^{|0|}}{1+q}$.

2ᵉ Cas. $t>0$. $K_t = \{t+2k+2\,;\,k\in\mathbb{N}\}$.

$$P(T=t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^2 q^{t+2k+2-2} = q^t\,P(T=0) = \frac{pq^t}{1+q} = \frac{pq^{|t|}}{1+q}.$$

3ᵉ Cas. $t<0$ $K_t = \{|t|+2k+2\,;\,k\in\mathbb{N}\} = \{|-t|+2k+2\,;\,k\in\mathbb{N}\} = K_{-t}$

Alors $P(T=t) = \sum_{n\in K_t} p^2 q^{n-2} = \sum_{n\in K_{-t}} p^2 q^{n-2} = P(T=-t) \underset{-t>0}{=} \frac{pq^{-t}}{1+q} = \frac{pq^{|t|}}{1+q}$.

Finalement $\forall t\in\mathbb{Z}$, $P(T=t) = \dfrac{pq^{|t|}}{1+q}$.

c) $\forall t\in\mathbb{N}$, $tP(T=t) = \frac{p}{1+q}\times tq^t$

$|q|<1$ donc la série de terme général $tP(T=t)$ est convergente et même absolument convergente.

$\forall t\in\mathbb{N}^*$, $-t\,P(T=-t) = -t\,\frac{p}{1+q}q^{|-t|} = -\frac{p}{1+q}\,tq^t$.

Donc la série de terme général $-tP(X=-t)$ est absolument convergente.

Cela doit suffire pour dire que $E(T)$ existe, non?

De plus $E(T) = \sum_{t=0 \text{ ou } 1}^{+\infty} tP(T=t) + \sum_{t=1}^{+\infty}(-tP(T=-t)) = \sum_{t=1}^{+\infty} t\,[P(T=t)-P(T=-t)]$

Or $\forall t\in\mathbb{N}^*$, $P(T=-t) = P(T=t)$. Donc $E(T)=0$.

Exercice.. Montrer que $E(U)$ existe et vaut $\frac{2}{p}$ ... voir plus loin.

Q4 a) Soit $n\in[\![2,+\infty[\![$. $\forall t\in\mathbb{Z}$, $P_{(U=n)}(T=t) = \dfrac{P(\{U=n\}\cap\{T=t\})}{P(U=n)}$ $(P(U=n)\neq 0!)$

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\forall t\in\mathbb{Z}$, $P_{(U=n)}(T=t) = \begin{cases} \dfrac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}} & \text{si } |t|\leq n-2 \text{ et si } n, |t| \text{ de même parité} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

R.

$$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \forall t \in \mathbb{Z},\ P_{\{U=n\}}(T=t) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{si } |t| \leq n-2 \text{ et } |t| \text{ a même parité que } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Rappelons que $H_n = \{t \in \mathbb{Z} \mid |t| \leq n-2 \text{ et } |t| \text{ a même parité que } n\}$ et que H_n a $n-1$ éléments.

Alors la loi de T sachant que $\{U=n\}$ est la loi uniforme sur H_n.

b) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Notons que $E(T \mid \{U=n\})$ existe car l'ensemble $\{t \in \mathbb{Z} \mid P_{\{U=n\}}(T=t) \neq 0\}$ est fini ... et est égal à H_n.

$$E(T \mid \{U=n\}) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} t\, P_{\{U=n\}}(T=t) = \sum_{t \in H_n} t \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{t \in H_n} t.$$

Rappelons que $H_n = \{t \in \mathbb{Z} \mid |t| \leq n-2\}$.

Alors $\forall t \in \mathbb{Z},\ t \in H_n \Leftrightarrow -t \in H_n$ donc $\sum_{t \in H_n} t = 0$. Ainsi $E(T \mid \{U=n\}) = 0$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ E(T \mid \{U=n\}) = 0.$

Remarque. Notons que ceci permet de retrouver $E(T) = 0$ avec le théorème des espérances conditionnelles.

Q5 a) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ n P(U=n) = n(n-1)p^2 q^{n-2} = p^2 n(n-1) q^{n-2}.$

$|q| < 1$ donc le cours donne la convergence de la série de terme général $n(n-1)q^{n-2}$ (série géométrique "dérivée" "deux fois").

Alors la série de terme général $n P(U=n)$ est convergente et même absolument convergente car c'est une série à termes positifs.

Ainsi $E(U)$ existe.

Remarque. $E(U) = \sum_{n=2}^{+\infty} n P(U=n) = p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) q^{n-2} = p^2 \times \frac{2}{(1-q)^3} = p^2 \times \frac{2}{p^3}.$

$E(U) = \frac{2}{p}.$

Pour montrer que UT possède une espérance il suffit de montrer que :
$\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{t\in\mathbb{Z}} |n t P(\{U=n\}\cap\{T=t\})|$ existe ou que $\sum_{n=2}^{+\infty}\left[n\left(\sum_{t\in\mathbb{Z}} |t| P(\{U=n\}\cap\{T=t\})\right)\right]$

existe ou encore que $\sum_{n=2}^{+\infty}\left[n\left(\sum_{t\in H_n} |t| p^2 q^{n-2}\right)\right]$.

Donc $E(UT)$ existe dès que $\sum_{n=2}^{+\infty}\left[n p^2 q^{n-2} \sum_{t\in H_n} |t|\right]$ existe ou encore dès que

$\sum_{n=2}^{+\infty}\left[n q^{n-2} \sum_{t\in H_n}|t|\right]$ existe. Montrons alors que la série de terme général

$u_n = n q^{n-2} \sum_{t\in H_n} |t|$ est convergente.

Soit $n\in[\![2,+\infty[\![$. $H_n = \{t\in\mathbb{Z} \mid |t|\leq n-2$ et, n et $|t|$ ont même parité$\}$.

Rappelons que $\mathrm{card}\, H_n = n-1$. De plus $\forall t\in H_n$, $|t|\leq n-2$.

Ainsi $\sum_{t\in H_n}|t| \leqslant (n-1)\times(n-2)$. Alors $n q^{n-2}\sum_{t\in H_n}|t| \leqslant n(n-1)(n-2)q^{n-2}$.

Donc $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $0\leqslant u_n \leqslant \frac{1}{q} n(n-1)(n-2) q^{n-3}$.

Or la série de terme général $n(n-1)(n-2)q^{n-3}$ converge car $|q|<1$ (série géométrique dérivée trois fois) donc la série de terme général $\frac{1}{q} n(n-1)(n-2) q^{n-3}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n converge.

Ceci achève de montrer que <u>UT possède une espérance</u>.

<u>Exercice</u>. Justifier l'existence de $E(UT)$ en montrant que :

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}} \sum_{n=2}^{+\infty} |tn\, P(\{U=n\}\cap\{T=t\})| \text{ existe}$$

Calculer $E(UT)$.

$E(UT) = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{t \in \mathbb{Z}} n t P(\{U=n\} \cap \{T=t\}) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left[n \sum_{t \in H_n} t \, p^2 q^{n-2} \right]$

$E(UT) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left[n p^2 q^{n-2} \sum_{t \in H_n} t \right]$

Or, comme nous l'avons vu au niveau du calcul de $E(T \mid U=n)$, $\sum_{t \in H_n} t = 0$ pour tout n dans $[\![2, +\infty[\![$.

Alors $E(UT) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(n p^2 q^{n-2} \times 0 \right) = 0$. $\underline{E(UT) = 0}$.

Alors $Cov(U,T) = E(UT) - E(U)E(T) = 0 - E(U) \times 0 = 0$. $\underline{Cov(U,T) = 0}$.

<u>Remarque</u>.. En toute rigueur et pour être conforme au programme il aurait fallu montrer que U et T possède un moment d'ordre 2 pour justifier que $cov(U,T)$ existe. Ceci n'est pas très difficile et est à faire en exercice. Notons néanmoins que l'existence de $E(UT)$, $E(U)$ et $E(T)$ suffit car $cov(U,T) = E\left((U - E(U))(T - E(T))\right)$...

<u>b)</u> $P(\{U=2\} \cap \{T=1\}) = 0$ car $|1| > 2-2$.

Or $P(U=2)P(T=1) = \left((2-1)p^2 q^{2-2}\right)\left(\frac{p q^{|1|}}{1+q}\right) = \frac{p^3 q}{1+q} \neq 0$.

Alors $P(\{U=2\} \cap \{T=1\}) \neq P(U=2)P(T=1)$.

Donc <u>U et T ne sont pas indépendantes</u>... et pourtant $Cov(U,T) = 0$.

R..

Question 2 **HEC 2010** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit f l' application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = 3XP + (X^2 - X)P' - (X^3 - X^2)P''$, où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q2. Déterminer $f(X^k)$ ($k \in \mathbb{N}$). Que peut-on dire du degré de $f(X^k)$?

Q3. f est injective ? surjective ?

Q4. a) Déterminer n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par f.

b) n étant ainsi choisi, soit ϕ l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$. ϕ est-il diagonalisable ?

Q1 * si $P \in \mathbb{R}[X]$, $3XP + (X^2-X)P' - (X^3-X^2)P''$ appartient à $\mathbb{R}[X]$.

<u>f est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$</u>

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.

$f(\lambda P+Q) = 3X(\lambda P+Q) + (X^2-X)(\lambda P+Q)' - (X^3-X^2)(\lambda P+Q)''$

$f(\lambda P+Q) = 3X(\lambda P+Q) + (X^2-X)(\lambda P'+Q') - (X^3-X^2)(\lambda P''+Q'')$.

$f(\lambda P+Q) = \lambda(3XP + (X^2-X)P' - (X^3-X^2)P'') + (3XQ + (X^2-X)Q' - (X^3-X^2)Q'')$

$f(\lambda P+Q) = \lambda f(P) + f(Q)$. <u>$f$ est linéaire.</u>

Ainsi <u>f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.</u>

Q2 $f(1) = 3X$, $f(X) = 3X^2 + X^2 - X = 4X^2 - X$.

$\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $f(X^k) = 3X^{k+1} + (X^2-X)kX^{k-1} - (X^3-X^2)k(k-1)X^{k-2}$.

$\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $f(X^k) = (-k^2+2k+3)X^{k+1} + (k^2-2k)X^k$

En fait <u>$\forall k \in \mathbb{N}$, $f(X^k) = (-k^2+2k+3)X^{k+1} + (k^2-2k)X^k$</u>

$\forall k \in \mathbb{N}$, $-k^2+2k+3 = 0 \iff k = -1$ ou $k = 3 \iff k = 3$.

<u>$\forall k \in \mathbb{N} - \{3\}$, $\deg f(X^k) = k+1$.</u>

$f(X^3) = 3X^3$ donc <u>$\deg f(X^3) = 3$</u>

Q3 * $f(X^2) = (-4+4+3)X^3 + (4-4)X^2 = 3X^3 = f(X^3)$. <u>$f$ n'est pas injectif.</u>

* $f(P)(0)=0$ donc $\operatorname{Im} f \subset \{\varphi \in \mathbb{R}[X] \mid \varphi(0)=0\}$.

Ainsi $X+1 \notin \operatorname{Im} f$. f n'est pas surjectif.

(Q3) a) Soit $n \in \mathbb{N}-\{3\}$. $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\deg f(X^n)=n+1$. $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f(X^n) \notin \mathbb{R}_n[X]$

Si $n \in \mathbb{N}-\{3\}$, $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas stable par f.

$f(\mathbb{R}_3[X]) = f(\operatorname{Vect}(1, X, X^2, X^3)) = \operatorname{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$

$f(\mathbb{R}_3[X]) = \operatorname{Vect}(3X, 4X^2-X, 3X^3, 3X^3) = \operatorname{Vect}(X, 4X^2-X, X^3) = \operatorname{Vect}(X, X^2, X^3) \subset \mathbb{R}_3[X]$.

$\mathbb{R}_3[X]$ est stable par f.

b) $n=3$. Soit $\mathcal{B}=(1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

$\varphi(1)=3X$, $\varphi(X)=4X^2-X$, $\varphi(X^2)=\varphi(X^3)=3X^3$

$A=M_{\mathcal{B}}(\varphi)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. A est triangulaire inférieure.

$\operatorname{Sp}\varphi = \operatorname{Sp} A = \{-1, 0, 3\}$. Soit $P = aX^3+bX^2+cX+d$ un élément de $\mathbb{R}_3[X]$.

$\varphi(P)=-P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=-d \\ 3d-c=-c \\ 4c=-b \\ 3b+3a=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ b=-4c \\ a=-\frac{3}{4}b=3c \end{cases}$

$SEP(\varphi,-1)=\{3cX^3-4cX^2+cX \,;\, c\in\mathbb{R}\}$; $SEP(\varphi,-1)=\operatorname{Vect}(3X^3-4X^2+X)$

$\varphi(P)=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} 3d-c=0 \\ 4c=0 \\ 3b+3a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=0 \\ b=-a \end{cases}$

$SEP(\varphi,0)=\{aX^3-aX^2 ; a\in\mathbb{R}\}$; $SEP(\varphi,0)=\operatorname{Vect}(X^3-X^2)$.

$\varphi(P)=3P \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} 0=3d \\ 3d-c=3c \\ 4c=3b \\ 3b+3a=3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ b=0 \end{cases}$. $SEP(\varphi,3)=\operatorname{Vect}(X^3)$.

$\sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}\varphi} \dim SEP(\varphi,\lambda) = 1+1+1 = 3 \neq 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$. φ n'est pas diagonalisable.

Sujet S 3 - Exercice

Soit a, b, c, α quatre nombres réels tels que $a \neq b$ et f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$f(P) = (X-a)(X-b)P' + \alpha(X-c)P.$$

1) Question de cours : Equations différentielles $h'(x) = h(x)\,g(x)$.

2) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant n$ (en attribuant au polynôme nul le degré $-\infty$). Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, α, n pour que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par f, c'est-à-dire que $f(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
   Dans toute la suite du problème, on suppose cette condition réalisée et on note f_n l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$.
4) Soit λ un réel.
   a) Trouver deux réels A et B indépendants de x, qu'on exprimera en fonction de n, a, b, c, λ, tels que :

$$\forall x \notin \{a, b\},\ \frac{nx - nc + \lambda}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

   b) Donner toutes les valeurs de λ telles que $(x-a)^A(x-b)^B$ soit un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f_n.
   f_n est-il diagonalisable ? f_n est-il bijectif ?

Sujet S 3 - Exercice sans préparation

1) Soit n un entier strictement supérieur à 3.
   n personnes jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée et de façon indépendante. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qu'on précisera.
   Quelle est la probabilité qu'une personne exactement obtienne un résultat différent des $n-1$ autres personnes (événement noté A) ?
2) Un jeu consiste à réitérer l'expérience précédente (appelée "partie") jusqu'à la réalisation de A. On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soit X la variable aléatoire à valeurs entières désignant le nombre de parties jouées si le jeu s'arrête et prenant la valeur 0 sinon. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

HEC 2010 S 3 Correction de l'exercice

(Q1) I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

g est une application continue de I dans $\mathbb{R}$ et G est une primitive de g sur I.

$\mathcal{S}_g$ est l'ensemble des applications h de I dans $\mathbb{R}$, dérivables sur I et

telles que $\forall x \in I,\ h'(x) = h(x)\, g(x)$.

Soit h une application de I dans $\mathbb{R}$.

$h \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ h(x) = \lambda e^{G(x)}$.

(Q2) • f est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.

$f(\lambda P + Q) = (X-a)(X-b)(\lambda P + Q)' + \alpha(X-c)(\lambda P + Q) = (X-a)(X-b)(\lambda P' + Q') + \alpha(X-c)(\lambda P + Q)$.

$f(\lambda P + Q) = \lambda\left[(X-a)(X-b)P' + \alpha(X-c)P\right] + (X-a)(X-b)Q' + \alpha(X-c)Q = \lambda f(P) + f(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in E^2,\ f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$. f est linéaire.

Donc f est un endomorphisme de E.

(Q3) • $f(1) = \alpha(X-c)$. Si $\alpha \neq 0$ $\deg f(1) = 1$ et si $\alpha = 0$, $f(1) = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

• $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(X^k) = (X-a)(X-b)\, k X^{k-1} + \alpha(X-c)X^k$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\deg f(X^k) \leq k+1$ car $\deg (X-a)(X-b)X^{k-1} = \deg (X-c)X^k = k+1$.

Le coefficient de X^{k+1} dans $f(X^k)$ est $k+\alpha$.

Donc si $k+\alpha \neq 0$ $\deg f(X^k) = k+1$ et si $k+\alpha = 0$ $\deg f(X^k) \leq k$.

Notons que ce résultat vaut pour $k=0$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N},\ \deg f(X^k) = k+1$ si $k+\alpha \neq 0$ et $\deg f(X^k) \leq k$ si $k+\alpha = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1er cas.. $n+\alpha \neq 0$. Alors $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f(X^n) \notin \mathbb{R}_n[X]$ car $\deg f(X^n) = n+1$

donc $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas stable par f.

<u>2ème cas.</u> $n+\alpha=0$.

Alors $\forall k\in [\![0,n-1]\!]$, $k+\alpha\neq 0$ donc $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $\deg f(X^k)=k+1$... au moins si $n\geqslant 1$.

Par conséquent $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $f(X^k)\in\mathbb{R}_n[X]$

comme $n+\alpha=0$ $\deg f(X^n)\leqslant n$; $f(X^n)\in\mathbb{R}_n[X]$

Par conséquent $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $f(X^k)\in\mathbb{R}_n[X]$.

$f(\mathbb{R}_n[X])=f(\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^n))=\mathrm{Vect}(f(1),f(X),\dots,f(X^n))\subset\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f.

Finalement, <u>si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f si et seulement si $\alpha=-n$.</u>

Dans toute la suite $\alpha=-n$, n étant un élément de $\mathbb{N}$.

Q4 $\lambda\in\mathbb{R}$.

<u>a)</u> $\forall x\in\mathbb{R}-\{a,b\}$, $\dfrac{nx-nc+\lambda}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$.

$\Updownarrow$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a,b\}$, $nx-nc+\lambda=A(x-b)+B(x-a)$

$\Updownarrow$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a,b\}$, $(n-A-B)x-nc+\lambda+Ab+Ba=0$ (1)

(1) entraîne que le polynôme $(n-A-B)X-nc+\lambda+Ab+Ba$ admet une infinité de racines,

donc est le polynôme nul et ainsi $n-A-B=-nc+\lambda+Ab+Ba=0$.

Réciproquement si $n-A-B=-nc+\lambda+Ab+Ba=0$ (1) est vérifiée.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}-\{a,b\}$, $\dfrac{nx-nc+\lambda}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}\iff\begin{cases}n-A-B=0\\-nc+\lambda+Ab+Ba=0\end{cases}$ (2)

(2) $\iff\begin{cases}B=n-A\\0=-nc+\lambda+Ab+a(n-A)=(b-a)A-nc+\lambda+an\end{cases}$. Rappelons que $a\neq b$. Alors :

(2) $\iff\begin{cases}A=\dfrac{nc-an-\lambda}{b-a}\\B=n-\dfrac{nc-an-\lambda}{b-a}=\dfrac{nb-na-nc+na+\lambda}{b-a}=\dfrac{nb-nc+\lambda}{b-a}.\end{cases}$

donc $\forall x\in\mathbb{R}-\{a,b\}$, $\dfrac{nx-nc+\lambda}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b} \iff \begin{cases} A=\dfrac{nc-na-\lambda}{b-a} \\ B=\dfrac{nb-nc+\lambda}{b-a} \end{cases}$.

Ainsi si $A=\dfrac{nc-na-\lambda}{b-a}$ et si $B=\dfrac{nb-nc+\lambda}{b-a}$ alors :

$\forall x\in\mathbb{R}-\{a,b\}$, $\dfrac{nx-nc+\lambda}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$.

b) Notons que $A+B=\dfrac{1}{b-a}(nc-na-\lambda+nb-nc+\lambda)=\dfrac{n(b-a)}{b-a}=n$.

donc $B=n-A$.

Ainsi $(x-a)^A(x-b)^B$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $A\in[\![0,n]\!]$.

Alors $(x-a)^A(x-b)^B$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si

$\exists k\in[\![0,n]\!]$, $\dfrac{nc-na-\lambda}{b-a}=k$ donc si et seulement si $\exists k\in[\![0,n]\!]$, $\lambda=nc-na+k(b-a)$.

$(x-a)^A(x-b)^B$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $\exists k\in[\![0,n]\!]$, $\lambda=nc-na+k(b-a)$.

(Q5) Trouvons les valeurs propres et les sous-espaces propres de f_n.

Version 1.. Pour faire plaisir aux concepteurs, mais la méthode n'est pas des meilleures.

- Soit λ une valeur propre de f_n et P un vecteur propre associé.

  $P\neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ et $f_n(P)=\lambda P$.

  $\forall x\in\mathbb{R}$, $(x-a)(x-b)P'-n(x-c)P=\lambda P$. Posons $M=\max(a,b)$ et $I=]M,+\infty[$.

  $\forall x\in I$, $P'(x)=\dfrac{nx-nc+\lambda}{(x-a)(x-b)}P(x)=\left(\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}\right)P(x)$.

  De plus $x\mapsto A\ln(x-a)+B\ln(x-b)$ est une primitive de $x\mapsto\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-c}$ sur I.

  Alors Q1 montre que $\exists d\in\mathbb{R}^*$, $\forall x\in I$, $P(x)=d\,e^{A\ln(x-a)+B\ln(x-b)}$

  $P\neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

  donc $\forall x\in I$, $P(x)=d(x-a)^A(x-b)^B$.

Comme P est polynomiale et que $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(x-a)^A(x-b)^B$ est polynomiale (... sur I).

Donc $\exists k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda = nc - na + k(a-b)$.

De plus $A = \dfrac{nc-na-\lambda}{b-a} = \dfrac{nc-na-nc+na-k(a-b)}{b-a} = k$ et $B = n-k$.

Alors $P = \alpha(X-a)^k(X-b)^{n-k}$

Ainsi $\forall P \in SEP(f_n,\lambda)$, $P \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]} \Rightarrow P \in Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

Mieux $\forall P \in SEP(f_n,\lambda)$, $P \in Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$. $SEP(f_n,\lambda) \subset Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

Or $SEP(f_n,\lambda) \neq \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$ donc $\dim SEP(f_n,\lambda) \geq 1$.

De plus $SEP(f_n,\lambda) \subset Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$ et $\dim Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k}) = 1$.

Alors $SEP(f_n,\lambda) \subset Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$ et $\dim SEP(f_n,\lambda) = 1 = \dim Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

Par conséquent $SEP(f_n,\lambda) = Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

Résumons cette première étape.

<u>Si</u> $\lambda \in Sp f_n$: $\exists k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda = nc - na + k(a-b)$ et $SEP(f_n,\lambda) = Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

• Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Posons $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. $P_k \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

$f_n(P_k) = (X-a)(X-b)\left[k(X-a)^{k-1}(X-b)^{n-k} + (X-a)^k(n-k)(X-b)^{n-k-1}\right] - n(X-c)P_k$ (à deux petits abus près : $k=0$ et $k=n$).

Alors $f_n(P_k) = k(X-b)P_k + (n-k)(X-a)P_k - n(X-c)P_k$.

$f_n(P_k) = (kX - kb + (n-k)X - (n-k)a - nX + nc)P_k$.

$f_n(P_k) = (-kb - na + ka + nc)P_k = (nc - na + k(a-b))P_k$ et $P_k \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

Ainsi $nc - na + k(a-b)$ est valeur propre de f_n et ceci pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

Les deux étapes précédentes montrent que

1) $Sp f_n = \{nc - na + k(a-b) \,;\, k \in [\![0,n]\!]\}$.

2) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $SEP(f_n, nc - na + k(a-b)) = Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

<u>Version 2</u> Une version plus naturelle qui pourrait être utilisée si l'on remplaçait $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$... Supposons $n \geqslant 1$. Je vous laisse le cas $n=0$!

- Soit $\lambda \in Sp f_n$. Soit P un vecteur propre associé. $P \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Soit r le degré de P et a_r le coefficient de X^r dans P. $a_r \neq 0$.

$(X-a)(X-b)P' - n(X-c)P = \lambda P$ car $f_n(P) = \lambda P$.

Le coefficient de X^{r+1} dans $(X-a)(X-b)P' - n(X-c)P$ est $r a_r - n a_r$

le coefficient de X^{r+1} dans λP est 0.

Alors $r a_r - n a_r = 0$. Comme a_r n'est pas nul : $r = n$. P est de degré n

Soit δ une racine de P dans $\mathbb{C}$. Supposons que $\delta \neq a$ et $\delta \neq b$.

Soit i l'ordre de multiplicité de δ dans P.

$(X-a)(X-b)P' = (\lambda + n(X-c))P$ et $(X-\delta)^i$ divise $(\lambda + n(X-c))P$ car il divise P.

Donc $(X-\delta)^i$ divise $(X-a)(X-b)P'$. Comme $\delta \neq a$ et $\delta \neq b$, $(X-\delta)^i$ divise P'.

Alors δ est racine d'ordre au moins i de P' et d'ordre i de P. Ceci est impossible.

Les seuls zéros possibles de P dans $\mathbb{C}$ sont a et b. Or P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$

et appartient à $\mathbb{R}_n[X] - \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$.

Alors $\exists d \in \mathbb{R}^*, \exists k \in \mathbb{N}, \exists k' \in \mathbb{N}, \ P = d(X-a)^k(X-b)^{k'}$.

mais $\deg P = n$, alors $k \in [\![0,n]\!]$ et $k' = n-k$. $P = d(X-a)^k(X-b)^{n-k}$.

Donc $P \in \text{Vect}((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

$SEP(f_n,\lambda)$ est contenu dans la droite vectorielle engendrée par $(X-a)^k(X-b)^{n-k}$

Comme $SEP(f_n,\lambda)$ est au moins de dimension 1 : $SEP(f_n,\lambda) = \text{Vect}((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

Nous venons donc de montrer que <u>si $\lambda \in Sp f_n$ il existe k dans $[\![0,n]\!]$ tel que</u>

<u>$SEP(f_n,\lambda) = \text{Vect}((X-a)^k(X-b)^{n-k})$</u>. Notons que nous avons rien dit sur la valeur de λ...

- Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Posons $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$.

Un calcul simple, déjà fait dans la version 1 montre que $f_n(P_k) = (nc - na + k(a-b))P_k$.

Comme P_k n'est pas nul, $nc-na+k(a-b)$ est une valeur propre de f_n et $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$ est un vecteur propre de f_n associé à cette valeur propre. Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

De ces deux étapes il résulte que :

1) $Sp f_n = \{nc-na+k(a-b) ; k \in [\![0,n]\!]\}$.

2) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $SEP(f_n, nc-na+k(a-b)) = Vect((X-a)^k(X-b)^{n-k})$.

Nous avons ainsi retrouvé le résultat de la version 1

$a \neq b$ donc f_n admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes.

Comme f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$: f_n est diagonalisable.

f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dim \mathbb{R}_n[X] < +\infty$. Alors :

f_n bijectif $\Leftrightarrow$ f_n injectif $\Leftrightarrow$ $0 \notin Sp f_n \Leftrightarrow$ il n'existe pas k dans $[\![0,n]\!]$ tel que $nc-na+k(a-b)=0$

f_n bijectif $\Leftrightarrow$ il n'existe pas k dans $[\![0,n]\!]$ tel que $k = \dfrac{na-nc}{a-b}$.

f_n est bijectif si et seulement si $\dfrac{na-nc}{a-b} \notin [\![0,n]\!]$.

Question 3 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Q1. Soit n un entier strictement supérieur à 3.

n personnes jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée et de façon indépendante. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on précisera.

Quelle est la probabilité qu'une personne exactement obtienne un résultat différent des $n-1$ autres personnes (événement noté A) ?

Q2. Un jeu consiste à réitérer l'expérience précédente (appelée "partie") jusqu'à la réalisation de A. On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X la variable aléatoire à valeurs entières désignant le nombre de parties jouées si le jeu s'arrête et prenant la valeur 0 sinon. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

Q1 $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P est la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$ notons A'_i (resp. A''_i) l'événement la i^{e} personne obtient pile (resp. face) et les autres face (resp. pile).

$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A'_i \cup A''_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A'_i \cup A''_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A'_i) + \sum_{i=1}^{n} P(A''_i)$ par incompatibilité.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(A'_i) = P(A''_i) = \frac{1}{2^n}$. $\quad P(A) = 2 \times \frac{n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

Q2 $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = \frac{n}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}$ (loi géométrique !!).

$P(X=0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}} \frac{1}{1-\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)} = 1 - 1 = 0$!!

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = \frac{n}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}$ et $P(X=0) = 0$.

Nous pouvons sans doute dire que $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)$.

$E(X) = \frac{2^{n-1}}{n}$ $\quad V(X) = \left(\frac{2^{n-1}}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)$.

HEC 2010 S4

Sujet S 4 - Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Si $P \in E$, on note $u(P)$ le polynôme Q tel que, pour tout x réel, $Q(x) = P(x+1)$.

1) Question de cours : Définition et propriétés d'une matrice inversible.
2) a) Montrer que u définit un endomorphisme de E.
   b) Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de E.
   Justifier l'existence de A^{-1} et la calculer.
   c) Déterminer A^2.
   d) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3) a) Déterminer, selon les valeurs du réel a, tous les polynômes P de E tels que pour tout x réel,
$$P(x+1) + aP(x) = 0$$
   b) Déterminer, selon les valeurs des réels a et b, tous les polynômes P de E tels que pour tout x réel,
$$P(x+2) + aP(x+1) + bP(x) = 0$$
4) On note $d = u - \mathrm{Id}_E$, où Id_E désigne l'endomorphisme identité de E.
   a) Déterminer Im d. Que vaut d^{n+1} ? (d^{n+1} désigne l'endomorphisme $d \circ d \circ \cdots \circ d$ la lettre d étant répétée $n+1$ fois).
   b) En déduire l'existence de $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que, pour tout P appartenant à E et tout x réel,
$$P(x+n+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k P(x+k)$$
   c) Si $P \in E$, on pose $s(P) = X.d(P)$. Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme de E. Cet endomorphisme s est-il diagonalisable ?

Sujet S 4 - Exercice sans préparation

1) Montrer qu'il existe un réel c pour lequel la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{c}{1+x^2}$$
est une densité de probabilité.
2) Une variable aléatoire réelle ayant une telle densité possède-t-elle une espérance ?
3) Montrer que si X est une variable aléatoire réelle de densité f, X et $1/X$ ont même loi.

HEC 2010 S4 Correction de l'exercice.

(Q1) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- A est inversible si $\exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AA' = A'A = I_n$.
- si A est inversible, $\exists !\, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AA' = A'A = I_n$; A' est l'inverse de A et se note A^{-1}
- les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est inversible
i') $\exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $AA' = A'A = I_n$
ii) $\exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AA' = I_n$
iii) $\exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A'A = I_n$
iv) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$
v) $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = Y$
vi) $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists !\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = Y$
vii) A est la matrice d'un automorphisme
viii) $\operatorname{rg} A = n$
ix) 0 n'est pas valeur propre de A.
x) A admet une réduite de Gauss inversible.

- Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- si A est inversible, A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$
- A est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible
- si A est inversible, ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
- Si A est triangulaire, A est inversible si et seulement si les éléments de sa diagonale sont non nuls.
- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$

Si $ad - bc \neq 0$, A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(Q2) Nous dirons que $\forall P \in E$, $u(P) = P(X+1)$

a) • u est une application de E dans E

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P,Q) \in E^2$, $u(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) = \lambda u(P) + u(Q)$

u est linéaire.

Ainsi u est un endomorphisme de E.

b) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $u(X^k) = (X+1)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} X^\ell$.

Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de u dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de E

$A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$, $a_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

A est triangulaire supérieure et tous les éléments de sa diagonale sont égaux à 1. Ainsi $\mathrm{Sp}\,A = \{1\}$. Donc 0 n'est pas valeur propre de A (!) et ainsi A est inversible. Déterminons A^{-1}.

V1 $\mathcal{B}' = (1, (X+1), (X+1)^2, \dots, (X+1)^n)$ est une famille d'éléments de E, non nuls et de degrés échelonnés. $\mathcal{B}'$ est donc une famille libre de cardinal $n+1$ de E qui est de dimension $n+1$. Alors $\mathcal{B}'$ est une base de E.

Notons alors que A est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Alors A^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Or $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $X^k = (X+1-1)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} (X+1)^\ell$

Ainsi $A^{-1} = (a'_{i,j})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$, $a'_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

V2 Notons que u est un automorphisme de E car A est inversible.

$\forall P \in E$, $u(P(X-1)) = P((X-1)+1) = P(X)$. Alors $\forall P \in E$, $P(X-1) = u^{-1}(P)$.

$\forall P \in E$, $u^{-1}(P) = P(X-1)$.

$\forall k\in [\![0,n]\!]$, $u^{-1}(X^k)=(X-1)^k=\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}(-1)^{k-\ell}X^\ell$. Comme $A^{-1}=M_{\mathcal{B}}(u^{-1})$:

$A^{-1}=(a'_{i,j})$ avec $\forall (i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2$, $a'_{i,j}=\begin{cases}\binom{j-1}{i-1}(-1)^{j-i} & \text{si } i\le j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

c) A^c est la matrice de $u\circ u$ dans $\mathcal{B}$.

$\forall P\in E$, $(u\circ u)(P)=u(P(X+1))=P(X+c)$.

$\forall k\in[\![0,n]\!]$, $(u\circ u)(X^k)=(X+c)^k=\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}c^{k-\ell}X^\ell$.

Alors $A^c=(b_{i,j})$ avec $\forall (i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2$, $b_{i,j}=\begin{cases}\binom{j-1}{i-1}c^{j-i} & \text{si } i\le j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

d) Rappelons que A est triangulaire supérieure et que tous ses éléments diagonaux sont égaux à 1. Alors $Sp\, A=\{1\}$ donc $Sp\, u=\{1\}$.

Supposons que u est diagonalisable. Alors $E=SEP(u,1)=Ker(u-Id_E)$.

Donc $u-Id_E=0_{\mathcal{L}(E)}$. $u=Id_E$.

$n\geq 1$. Alors $X\in E$ et $X=u(X)=X+1$!!

Ainsi u n'est pas diagonalisable.

Q3 a) Rappelons que $Sp\, u=\{1\}$.

Ainsi $\forall\lambda\in\mathbb{R}-\{1\}$, $Ker(u-\lambda Id_E)=\{0_E\}$.

On a également $\forall\lambda\in\mathbb{R}-\{-1\}$, $Ker(u+\lambda Id_E)=\{0_E\}$.

Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit $P\in E$.

$P(X+1)+aP(X)=0_E \Leftrightarrow u(P)+aP=0_E \Leftrightarrow (u+aId_E)(P)=0_E \Leftrightarrow P\in Ker(u+aId_E)$.

1er cas. $a\neq -1$. Alors $P(X+1)+aP(X)=0_E \Leftrightarrow P=0_E$.

2ème cas. $a=-1$. $P(X+1)+aP(X)=0_E \Leftrightarrow P(X+1)-P(X)=0_E \Leftrightarrow P(X+1)=P(X)$

$P(X+1)+aP(X)=0_E \Leftrightarrow u(P)=P$.

→ Supposons que $u(P) = P$.

<u>1er cas</u>.. P est constant alors $P \in \mathbb{R}_0[X]$

<u>2ème cas</u>.. $\deg P \geqslant 1$. Alors P admet au moins une racine α dans $\mathbb{C}$.

$u(P) = P$. $P(X+1) = P(X)$. Ainsi $P(\alpha+1) = P(\alpha) = 0$.

Une récurrence simple donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(\alpha+n) = 0$.

Alors P admet une infinité de racines. Ceci contredit $\deg P \geqslant 1$.

Finalement si $P \in u(P) = P$: $P \in \mathbb{R}_0[X]$.

→ Réciproquement supposons que $P \in \mathbb{R}_0[X]$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P(X) = \lambda$.

$u(P) = P(X+1) = \lambda = P$. Par conséquent : $\{P \in E \mid u(P) = P\} = \mathbb{R}_0[X]$.

Ainsi <u>pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{P \in E \mid P(X+1) + aP = 0_E\} =$</u> $\begin{cases} \mathbb{R}_0[X] & \text{si } a = -1 \\ \{0_E\} & \text{sinon} \end{cases}$.

<u>Remarque</u>.. Notons que nous avons montré que $SEP(u,1) = \mathbb{R}_0[X]$. Ce qui confirme que u n'est pas diagonalisable ...

b) $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. $\forall P \in E$, $P(X+2) + aP(X+1) + bP = u^2(P) + au(P) + bP = (u^2 + au + bId_E)(P)$

$\forall P \in E$, <u>$P(X+2) + aP(X+1) + bP = 0_E \Leftrightarrow P \in Ker(u^2 + au + bId_E)$</u>.

la matrice de $u^2 + au + bId_E$ est $A^2 + aA + bI_n$.

Notons que A^2, A et I_n sont trois matrices triangulaires dont les éléments diagonaux sont égaux à 1, non ?

Alors $A^2 + aA + bI_n$ est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont $1+a+b$. Alors $Sp(A^2 + aA + bI_n) = \{1+a+b\}$.

Ainsi $Sp(u^2 + au + bId_E) = \{1+a+b\}$.

Alors <u>$Ker(u^2 + au + bId_E) = \{0_E\} \Leftrightarrow 1+a+b \neq 0$</u>.

Si $1+a+b \neq 0$: $P(X+2) + aP(X+1) + P = 0_E \Leftrightarrow P = 0_E$. <u>Supposons $1+a+b = 0$</u>.

$b=-1-a$ donc $u^2+au+b\,Id_E = u^2-Id_E + a(u-Id_E) \underset{\uparrow\, u\circ Id_E = Id_E\circ u}{=} (u+Id_E)\circ(u-Id_E) + a(u-Id_E)$

$u^2+au+b\,Id_E = (u+(1+a)Id_E)\circ(u-Id_E)$.

Soit $P\in E$.

$P\in Ker(u^2+au+b\,Id_E) \Leftrightarrow (u+(1+a)Id_E)((u-Id_E)(P))=0_E \Leftrightarrow (u-Id_E)(P)\in Ker(u+(1+a)Id_E)$.

i) Supposons $1+a\neq -1$ donc $a\neq -2$. Alors $Ker(u+(1+a)Id_E)=\{0_E\}$.

$P\in Ker(u^2+au+b\,Id_E) \Leftrightarrow (u-Id_E)(P)=0_E \Leftrightarrow P\in Ker(u-Id_E) \Leftrightarrow P\in \mathbb{R}_0[X]$.

Dans ce cas $\{P\in E \mid P(X+2)+aP(X+1)+bP=0_E\} = \mathbb{R}_0[X]$.

ii) Supposons que $1+a=-1$ donc que $a=-2$. Comme $1+a+b=0$: $b=1$.

$u^2+au+b\,Id_E = (u-Id_E)\circ(u-Id_E)$.

$Ker(u^2+au+b\,Id_E) = Ker((u-Id_E)\circ(u-Id_E))$.

Alors $\forall P\in E$, $P\in Ker(u^2+au+b\,Id_E) \Leftrightarrow (u-Id_E)(P)\in Ker(u-Id_E) \Leftrightarrow u(P)-P\in\mathbb{R}_0[X]$.

Cherchons $\mathcal{S}=\{P\in E \mid u(P)-P\in\mathbb{R}_0[X]\}$. Soit $P\in\mathcal{S}$. Supposons que $\deg P\geqslant 2$.

Alors $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $u(P)-P=\lambda$. $P(X+1)-P=\lambda$. Posons $r=\deg P$. $r\geqslant 2$.

$\exists(a_0,a_1,\dots,a_r)\in\mathbb{R}^{r+1}$, $P=\sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ et $a_r\neq 0$

$\lambda = \sum_{k=0}^{r} a_k(X+1)^k - \sum_{k=0}^{r} a_k X^k = \sum_{k=1}^{r} a_k\left[(X+1)^k - X^k\right]$.

$\forall k\in[\![1,r]\!]$, $(X+1)^k-X^k = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^i$ donc $\forall k\in[\![1,r]\!]$, $\deg\left[(X+1)^k-X^k\right]=k-1$.

Comme $a_r\neq 0$ alors $\deg\left(\sum_{k=1}^{r} a_k\left[(X+1)^k-X^k\right]\right) = r-1\geqslant 2-1=1$. Donc

$\sum_{k=1}^{r} a_k\left[(X+1)^k-X^k\right]$ ne peut pas être égal à λ.

Alors $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}_1[X]$. Soit $P\in\mathbb{R}_1[X]$. $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $P=\alpha X+\beta$.

$u(P)-P = P(X+1)-P = \alpha(X+1)+\beta-\alpha X-\beta = \alpha \in \mathbb{R}_0[X]$; $P\in\mathcal{S}$.

Finalement $\mathcal{S}=\mathbb{R}_1[X]$.

Avant de calculer, notons que si $1+a+b=0$: $a=-2 \Leftrightarrow b=1$.

$$\{P\in E \mid P(X+2)+aP(X+1)+bP(X)\} = \begin{cases} \{0_E\} & \text{si } 1+a+b\neq 0 \\ \mathbb{R}_0[X] & \text{si } 1+a+b=0 \text{ et } a\neq -2 \\ \mathbb{R}_1[X] & \text{si } a=-2 \text{ et } b=1 \end{cases}$$

Q4 a) Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $d(\mathbb{R}_k[X]) = d(\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^k)) = \mathrm{Vect}(d(1),d(X),\dots,d(X^k))$.

Or $d(1)=0$ car $1\in\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$.

$\forall i\in[\![1,k]\!]$, $d(X^i) = u(X^i)-X^i = (X+1)^i - X^i = \sum_{\ell=0}^{i-1}\binom{i}{\ell}X^\ell$.

Donc $\forall i\in[\![1,k]\!]$, $\deg d(X^i) = i-1$.

Alors $(d(X),d(X^2),\dots,d(X^k))$ est une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de cardinal k qui est la dimension de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Ainsi $(d(X),d(X^2),\dots,d(X^k))$ est une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

Alors $\underline{d(\mathbb{R}_k[X]) = \mathbb{R}_{k-1}[X]}$ et ceci pour tout $k\in[\![1,n]\!]$. $(*)$

En particulier : $\mathrm{Im}\, d = d(E) = d(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $\underline{\mathrm{Im}\, d = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

Une récurrence très simple montre à partir de $(*)$ que $\forall q\in[\![0,n-1]\!]$, $d^q(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-q}[X]$

Alors $d^n(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_0[X]$.

Or $\mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\, d$. Alors $d^{n+1}(\mathbb{R}_n[X]) = d(\mathbb{R}_0[X]) = \{0_E\}$.

$d^{n+1}(E) = \{0_E\}$. $\underline{d^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

b) $0_{\mathcal{L}(E)} = d^{n+1} = (u-\mathrm{Id}_E)^{n+1} \underset{u\circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E\circ u}{=} \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} u^k\circ(-\mathrm{Id}_E)^{n+1-k}$.

Alors $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Donc $\binom{n+1}{n+1}(-1)^{n+1-(n+1)}u^{n+1} = -\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}u^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(-1)^{n-k}u^k$.

$u^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(-1)^{n-k}u^k$.

Notons que $\forall i\in\mathbb{N}$, $\forall P\in E$, $u^i(P) = P(X+i)$.

Alors $\forall P\in E$, $P(X+n+1) = u^{n+1}(P) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(-1)^{n-k}u^k(P) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(-1)^{n-k}P(X+k)$.

$\forall P\in E,\ P(X+n+1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(-1)^{n-k}P(X+k)$.

Donc $\exists(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1},\ \forall P\in E,\ P(X+n+1) = \sum_{k=0}^{n}a_k P(X+k)$.

c) • Nous avons vu que $\operatorname{Im} d = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Alors $\forall P\in E$, $d(P)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $\forall P\in E$, $s(P) = Xd(P)\in\mathbb{R}_n[X]$

$\forall P\in E$, $s(P)\in E$. s est une application de E dans E.

• $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(P,Q)\in E^2$, $s(\lambda P+Q) = Xd(\lambda P+Q) = X(\lambda d(P)+d(Q)) = \lambda Xd(P)+Xd(Q) = \lambda s(P)+s(Q)$.

Ainsi s est linéaire.

Finalement s est un endomorphisme de E.

$s(1) = Xd(1) = 0_E$. $s(X) = X(X+1-X) = X$. $\forall k\in[\![2,n]\!]$, $s(X^k) = X[(X+1)^k - X^k] = X\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^i$,

$\forall k\in[\![2,n]\!]$, $s(X^k) = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^{i+1} = \binom{k}{k-1}X^k + \sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i}X^{i+1} = kX^k + \sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i}X^{i+1}$.

Ceci permet de dire que la matrice A' de s dans la base $\mathcal{B} = (1,X,\dots,X^n)$ est triangulaire supérieure et que ses éléments diagonaux sont $0,1,2,\dots,n$.

Alors $\operatorname{Sp}A' = \{0,1,2,\dots,n\}$. $A'\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et A' possède $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes donc A' est diagonalisable. Ainsi s est diagonalisable.

Question 4 **HEC 2010** $\boxed{\text{F 2}}$

Q1. Montrer qu'il existe un réel c pour lequel la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{c}{1+x^2}$ est une densité de probabilité.

Q2. Une variable aléatoire réelle ayant une telle densité possède-t-elle une espérance ?

Q3. Montrer que si X est une variable aléatoire réelle de densité f, X et $\dfrac{1}{X}$ ont même loi.

Q1 * f est continue sur $\mathbb{R}$.

* f est positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $c \geqslant 0$.

* $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty}(\operatorname{Arctan} A) = \frac{\pi}{2}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Par parité $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ converge et vaut π

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $c\pi$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{\pi}$.

Comme $\frac{1}{\pi} \geqslant 0$ (!!), <u>f est une densité de probabilité si et seulement si $c = \frac{1}{\pi}$.</u>

Q2 $\forall A \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^A x f(x)\,dx = \int_0^A \frac{1}{\pi}\,\frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^A = \frac{\ln(1+A^2)}{2\pi}$.

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x f(x)\,dx = +\infty$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx$ diverge ; $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ également.

<u>X n'a pas d'espérance.</u>

Q3 Soit $x \in \mathbb{R}$.

<u>1er cas</u>.. $x < 0$. $\left\{\frac{1}{X} \leqslant x\right\} = \{X<0\} \cap \left\{\frac{1}{x} \leqslant X\right\} = \left\{\frac{1}{x} \leqslant X < 0\right\} = X^{-1}\left(\left[\frac{1}{x}, 0\right[\right)$

Alors 1) $\left\{\frac{1}{X} \leqslant x\right\} = X^{-1}\left(\left[\frac{1}{x}, 0\right[\right) \in \mathcal{A}$ car X est une variable aléatoire.

2) $P\left(\frac{1}{X} \leqslant x\right) = P\left(\frac{1}{x} \leqslant X < 0\right) = P(X<0) - P\left(X < \frac{1}{x}\right) = P(X\leqslant 0) - P\left(X \leqslant \frac{1}{x}\right)$.

<u>$P\left(\frac{1}{X} \leqslant x\right) = F_X(0) - F_X\left(\frac{1}{x}\right)$</u> ($F_X$ étant la fonction de répartition de X)

<u>2e cas</u>.. $x = 0$ $\left\{\frac{1}{X} \leqslant x\right\} = \left\{\frac{1}{X} \leqslant 0\right\} = \{X \leqslant 0\} = X^{-1}(]-\infty, 0])$

1) $\left\{\frac{1}{X} \leqslant x\right\} = X^{-1}(]-\infty, 0]) \in \mathcal{A}$.

2) <u>$P\left(\frac{1}{X} \leqslant x\right) = P(X \leqslant 0) = F_X(0)$.</u>

3^e cas. $x>0$ $\{\frac{1}{X}\leq x\}=\{X<0\}\cup(\{X>0\}\cap\{\frac{1}{x}\leq X\})$

$\{\frac{1}{X}\leq x\}=\{X<0\}\cup\{X\geq\frac{1}{x}\}=\underbrace{X^{-1}(]-\infty,0[)}_{\in\mathcal{A}}\cup\underbrace{X^{-1}([\frac{1}{x},+\infty[)}_{\in\mathcal{A}}\in\mathcal{A}$

1) $\{\frac{1}{X}\leq x\}\in\mathcal{A}$

2) $P(\frac{1}{X}\leq x)=P(X<0)+P(X\geq\frac{1}{x})=P(X\leq 0)+1-P(X<\frac{1}{x})=P(X\leq 0)+1-P(X\leq\frac{1}{x})$

$P(\frac{1}{X}\leq x)=F_X(0)+1-F_X(\frac{1}{x})$.

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}$, $\{\frac{1}{X}\leq x\}\in\mathcal{A}$ donc $\frac{1}{X}$ est une variable aléatoire.

de plus $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{1/X}(x)=\begin{cases}F_X(0)-F_X(\frac{1}{x}) & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ F_X(0) & \text{si } x=0\\ F_X(0)+1-F_X(\frac{1}{x}) & \text{si } x\in]0,+\infty[\end{cases}$

$\forall z\in\mathbb{R}$, $F_X(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1/\pi}{1+t^2}dt=\lim_{A\to-\infty}\left[\frac{1}{\pi}\arctan t\right]_A^z=\lim_{A\to-\infty}\left[\frac{1}{\pi}\arctan z-\frac{1}{\pi}\arctan A\right]$.

$\forall z\in\mathbb{R}$, $F_X(z)=\frac{1}{\pi}\arctan z-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\arctan z+\frac{\pi}{2}\right)$. En particulier $F_X(0)=\frac{1}{2}$.

Rappelons que $\forall z\in\mathbb{R}^*$, $\arctan z+\arctan\frac{1}{z}=\begin{cases}\pi/2 & \text{si } z>0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } z<0\end{cases}$ (*)

Soit x dans $\mathbb{R}$. Montrons que $F_{1/X}(x)=F_X(x)$.

. C'est clair pour $x=0$.

. Supposons $x>0$. $F_{1/X}(x)=F_X(0)+1-F_X(1/x)=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$

$F_{1/X}(x)=1-\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}=1-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\frac{1}{\pi}\left(\arctan x+\pi-\frac{\pi}{2}\right)$

$F_{1/X}(x)=\frac{1}{\pi}\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right)=F_X(x)$.

. Supposons $x<0$. $F_{1/X}(x)=F_X(0)-F_X(\frac{1}{x})=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)$

$F_{1/X}(x)=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\frac{1}{\pi}\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right)=F_X(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{1/X}(x)=F_X(x)$. <u>X et $1/X$ ont même loi.</u>

<u>Exercice</u>.. Démontrer (*) (on pourra dériver).

Sujet S 5 - Exercice

1) Question de cours : Rappeler la définition d'une série convergente. Démontrer qu'une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Cette équivalence demeure-t-elle valable pour les séries à termes réels de signe quelconque ?

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles positives.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$\begin{cases} m_n &= \min\{u_n, v_n\} \\ \mathrm{M}_n &= \max\{u_n, v_n\} \end{cases}$$
Démontrer que, si les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ sont convergentes, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} m_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{M}_n$ le sont aussi, et leurs sommes vérifient : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} m_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{M}_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$.

3) On suppose **désormais** que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} u_n &= \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \\ v_n &= \dfrac{4}{5^n} \end{cases}$.

   a) Démontrer que les deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ sont convergentes, et que leurs sommes sont égales.

   b) Prouver que, pour tout $n \geqslant 2$, on a : $v_n \leqslant u_n$.

4) Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les évènements $[\mathrm{X}_n = u_n]$ et $[\mathrm{X}_n = v_n]$ soient des parties complémentaires de Ω, de même probabilité $\dfrac{1}{2}$.

   a) Démontrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{X}_n(\omega)$ est convergente et que sa somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{X}_n(\omega)$ est comprise entre $\dfrac{8}{15}$ et $\dfrac{22}{15}$.

   b) Démontrer que $\left[\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{X}_n = \dfrac{22}{15}\right]$ et $\left[\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{X}_n = 1\right]$ sont des événements de probabilité nulle.

Sujet S 5 - Exercice sans préparation

1) La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

2) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que u^2 soit un projecteur de rang égal à 1.

   a) Montrer que 0 est valeur propre de u et que u possède au plus une autre valeur propre, égale à $+1$ ou à -1.

   b) Montrer que, si u admet 1 pour valeur propre et n'est pas lui-même un projecteur, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est A.

HEC 2010 SS Correction de l'exercice

(Q1) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels.

→ La série de terme général u_n converge si la suite de terme général $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ converge.

→ On suppose que $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $u_n \geqslant 0$. On pose $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

$\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $S_{n+1}-S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. La suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante ; ainsi, elle converge si et seulement si elle est majorée.

Par conséquent la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

→ Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 1$. Alors la suite de terme général u_n ne converge pas vers 0 donc la série de terme général u_n diverge.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1}{2}\left[1-(-1)^{n+1}\right] = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant S_n \leqslant 1$. Donc $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée et même bornée.

<u>Le résultat précédent ne vaut pas pour les séries à termes réels de signe quelconque.</u>

(Q2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant m_n \leqslant u_n$ et $0 \leqslant \Pi_n \leqslant u_n + v_n$.

Les séries de termes généraux u_n et u_n+v_n convergent car les séries de termes généraux u_n et v_n convergent.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que <u>les séries de termes généraux m_n et Π_n convergent.</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $u_n \leqslant v_n$: $m_n = u_n$ et $\Pi_n = v_n$ donc $m_n + \Pi_n = u_n + v_n$.

Si $u_n > v_n$: $m_n = v_n$ et $\Pi_n = u_n$ donc $m_n + \Pi_n = v_n + u_n = u_n + v_n$.

<u>$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $m_n + \Pi_n = u_n + v_n$.</u>

$\sum_{n=1}^{+\infty} m_n + \sum_{n=1}^{+\infty} n_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (m_n + n_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ car toutes les séries convergent.

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} m_n + \sum_{n=1}^{+\infty} n_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Q3 a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} = 2 \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right] = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n \to +\infty} \left(2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)\right) = 1$.

La série de terme général u_n converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

$\left|\frac{1}{5}\right| < 1$ donc la série de terme général $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ converge alors la série de terme général $v_n = \frac{4}{5^n}$ converge.

$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{5^n} = \frac{4}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{4}{5} \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = 1$.

La série de terme général v_n converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1$.

Les séries de termes généraux u_n et v_n convergent et ont même somme.

b) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.

$v_n \leq u_n \iff \frac{4}{5^n} \leq \frac{2}{(n+1)(n+2)} \iff 2(n+1)(n+2) \leq 5^n$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $2(n+1)(n+2) \leq 5^n$.

- Si $n=2$ $2(n+1)(n+2) = 24$ et $5^n = 25$ donc $2(n+1)(n+2) \leq 5^n$. La propriété est vraie pour $n=2$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $[\![2, +\infty[\![$ et montrons la pour $n+1$.

$5^n \geq 2(n+1)(n+2)$ donc $5^{n+1} \geq 10(n+1)(n+2) = 10(n+1)(n+2) - 2(n+2)(n+3) + 2(n+2)(n+3)$.

Alors $5^{n+1} \geq 2(n+2)(n+3) + 2(n+2)[5n+5-n-3] = 2(n+2)(n+3) + \underbrace{2(n+2)(4n+2)}_{\geq 0}$.

Alors $5^{n+1} \geq 2(n+2)(n+3) = 2((n+1)+1)((n+1)+2)$. Ceci achève la récurrence.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2 \Rightarrow 5^n \geq 2(n+1)(n+2) > 0$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\quad \frac{1}{5^n} \leqslant \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\quad \frac{4}{5^n} \leqslant \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

Alors $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\underline{v_n \leqslant u_n}$.

Variante. $v_n = u_n$ donne $5^n = 2(n+1)(n+2)$ ce qui est impossible si $n \geqslant 1$ pour des raisons de parité...

Remarques 1.. Si nous utilisons la récurrence il est clair que nous aurions pu montrer que : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $v_n < u_n$. ce qui est précieux pour la définition des X_n dans Q4...

2°.. $u_1 = \frac{1}{3}$ et $v_1 = \frac{4}{5}$ donc $u_1 < v_1$.

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\min(u_n, v_n) = \begin{cases} u_1 & \text{si } n=1 \\ v_n & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$ et $\max(u_n, v_n) = \begin{cases} v_1 & \text{si } n=1 \\ u_n & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$

Q4 a) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $m_n = \min(u_n, v_n)$ et $M_n = \max(u_n, v_n)$.

Les séries de termes généraux u_n et v_n convergent et sont à termes positifs donc les séries de terme généraux m_n et M_n convergent.

Soit $\omega \in \Omega$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) \in \{u_n, v_n\}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant X_n(\omega) \leqslant \max(u_n, v_n) \leqslant M_n$. Comme la série de terme général M_n converge, la série de terme général $X_n(\omega)$ converge d'après la règle de comparaison sur les séries à termes positifs.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $m_n = \min(u_n, v_n) \leqslant X_n(\omega) \leqslant M_n$.

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} m_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} M_n$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} m_n = u_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n = u_1 - v_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + 1 = \frac{1}{15}(5 - 12 + 15) = \frac{8}{15}$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n = v_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n = v_1 - u_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{15}(12 - 5 + 15) = \frac{22}{15}$.

Ainsi $\forall \omega \in \Omega$, $\quad \frac{8}{15} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) \leqslant \frac{22}{15}$.

b) Soit $\omega \in \Omega$. Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) \in \{u_n, v_n\}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) \leq \max(u_n, v_n) = m_n$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $m_n - X_n(\omega) \geq 0$. Rappelons encore que $\sum_{n=1}^{+\infty} m_n = \frac{22}{15}$. Alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = \frac{22}{15}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = \frac{22}{15} - \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} m_n - \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} (m_n - X_n(\omega))$$

$$\Updownarrow \text{ car } \forall n \in \mathbb{N}^*, m_n - X_n(\omega) \geq 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, m_n - X_n(\omega) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n(\omega) = m_n.$$

Ainsi $\{\omega \in \Omega \mid \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = \frac{22}{15}\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = m_n\}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\{X_n = m_n\} \in \mathcal{B}$ (X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$).

Alors $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = m_n\} \in \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ est stable par intersection dénombrable.

Alors $P(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = \frac{22}{15}) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = m_n\})$

$\forall r \in [\![2, +\infty[\![$, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = m_n\} \subset \bigcap_{n=2}^{r} \{X_n = m_n\} = \bigcap_{n=2}^{r} \{X_n = u_n\}$. Soit $r \in [\![2, +\infty[\![$

Alors $0 \leq P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = m_n\}) \leq P(\bigcap_{n=2}^{r} \{X_n = u_n\}) = \prod_{n=2}^{r} P(X_n = u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$.

$X_2, X_3, \ldots, X_r$ sont indépendantes

$\forall r \in [\![2, +\infty[\![$, $0 \leq P(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = \frac{22}{15}) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = m_n\}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$

En faisant tendre r vers $+\infty$ il vient $P(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = \frac{22}{15}) = 0$.

Soit $\omega \in \Omega$

- Observons que si ($\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) = u_n$) ou ($\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\omega) = v_n$) alors $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega) = 1$ car $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1$. Montrons la réciproque.

• Supposons que $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega)=1$.

1er cas.. $X_1(\omega)=u_1$.

Alors $\sum_{n=2}^{+\infty} X_n(\omega)=1-X_1(\omega)=1-u_1=\sum_{n=1}^{+\infty} u_n-u_1=\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

Donc $\sum_{n=2}^{+\infty}(X_n(\omega)-u_n)=0$. Soit $n\in[\![2,+\infty[\![$, $X_n(\omega)\in\{u_n,v_n\}$ et $u_n\geq v_n$.

Alors $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $X_n(\omega)-u_n\leq 0$.

Comme $\sum_{n=2}^{+\infty}(X_n(\omega)-u_n)=0$: $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $X_n(\omega)-u_n=0$.

Alors $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $X_n(\omega)=u_n$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $X_n(\omega)=u_n$ car $X_1(\omega)=u_1$.

2ème cas.. $X_1(\omega)=v_1$.

$\sum_{n=2}^{+\infty} X_n(\omega)=1-X_1(\omega)=1-v_1=\sum_{n=1}^{+\infty} v_n-v_1=\sum_{n=2}^{+\infty} v_n$. Alors $\sum_{n=2}^{+\infty}(X_n(\omega)-v_n)=0$.

De plus $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $X_n(\omega)\in\{u_n,v_n\}$ et $v_n\leq u_n$.

Alors $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $X_n(\omega)-v_n\geq 0$ et $\sum_{n=2}^{+\infty}(X_n(\omega)-v_n)\geq 0$

Donc $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $X_n(\omega)-v_n=0$. $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $X_n(\omega)=v_n$. De plus $X_1(\omega)=v_1$.

Par conséquent $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $X_n(\omega)=v_n$. Ceci achève de montrer que :

$\{\omega\in\Omega \mid \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega)=1\}=\{\omega\in\Omega \mid \forall n\in\mathbb{N}^*, X_n(\omega)=u_n\}\cup\{\omega\in\Omega \mid \forall n\in\mathbb{N}^*, X_n(\omega)=v_n\}$.

$\{\omega\in\Omega \mid \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega)=1\}=\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n^{-1}(\{u_n\})\right)\cup\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n^{-1}(\{v_n\})\right)$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $X_n^{-1}(\{u_n\})\in\mathcal{B}$ et $X_n^{-1}(\{v_n\})\in\mathcal{B}$ car pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$.

Comme $\mathcal{B}$ est stable par intersection dénombrable et réunion finie on peut dire que $\{\omega\in\Omega \mid \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega)=1\}\in\mathcal{B}$.

Notons que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n^{-1}(\{u_n\})$ et $\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n^{-1}(\{v_n\})$ sont disjoints.

Alors $P(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = 1) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = u_n\}) + P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = v_n\})$.

$\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = u_n\} \subset \bigcap_{n=1}^{r} \{X_n = u_n\}$.

donc $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = u_n\}) \leq P(\bigcap_{n=1}^{r} \{X_n = u_n\}) = \prod_{n=1}^{r} P(X_n = u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^r$

$X_1, X_2, \dots, X_r$ sont indépendantes.

En faisant tendre r vers $+\infty$ il vient $P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = u_n\}) = 0$

on montre de même que $P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n = v_n\}) = 0$.

Alors $P(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = 1) = 0$.

Question 5 HEC 2010 $\boxed{\text{F 2}}$

Q1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Q2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que u^2 soit un projecteur de rang égal à 1.

a) Montrer que 0 est valeur propre de u et que u possède une autre valeur propre, égale à 1 ou à -1.

b) Montrer que si u admet 1 pour valeur propre et n'est pas lui-même un projecteur, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est A.

le texte disait "au plus une autre"...

Q1 A est triangulaire supérieure. $\mathrm{Sp}\, A = \{0,1\}$. Soit (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

(E_1, E_2) est libre

. $\mathrm{rg}\, A = \dim \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \dim \mathrm{Vect}(E_1, E_2) = 2$.

Alors $\dim \mathrm{SEP}(A,0) = 3 - \mathrm{rg}\, A = 1$... et $\mathrm{SEP}(A,0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$.

. $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(A - I_3) = \dim \mathrm{Vect}(-E_1, E_1 - E_3) = \dim \mathrm{Vect}(E_1, E_3) = 2$.

Alors $\dim \mathrm{SEP}(A,1) = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3) = 1$ ... et $\mathrm{SEP}(A,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} A} \dim \mathrm{SEP}(A, \lambda) = 2 \neq 3$. A n'est pas diagonalisable.

Q2 a) $\mathrm{rg}\, u^2 = 1 \neq 3$ donc u^2 n'est pas bijectif. Alors u n'est pas bijectif (u bijectif $\Rightarrow u \circ u$ bijectif). Comme $\dim E < +\infty$ u n'est pas injectif.

Ainsi 0 est valeur propre de u.

$u^4 = (u^2)^2 = u^2$ car u^2 est un projecteur ; $u^4 - u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $X^4 - X^2$ est un polynôme annulateur de u dont les zéros sont 0, 1 et -1.

Ainsi $\mathrm{Sp}\, u \subset \{0, 1, -1\}$.

$1 \in \mathrm{Sp}\, u^2$ et $\dim \mathrm{SEP}(u^2, 1) = 1$ car u^2 est une projection de rang 1

($\mathrm{Im}\, u^2 = \mathrm{Ker}(u^2 - \mathrm{Id}_E)$ et $\dim \mathrm{Im}\, u^2 = 1$).

Soit x un vecteur propre de u^2 associé à la valeur propre 1. $x \neq 0_E$!

Posons $x_1 = \frac{1}{2}(x + u(x))$ et $x_2 = \frac{1}{2}(x - u(x))$.

$u(x_1) = \frac{1}{2}(u(u) + u^2(u)) = \frac{1}{2}(u(u)+u) = x_1$. $u(x_2) = \frac{1}{2}(u(u) - u^2(u)) = \frac{1}{2}(u(u)-u) = -x_2$

Supposons que $x_1 = x_2 = 0$. Alors $u(u) = -u$ et $u(u) = u$. $x = -x$; $x = 0_E$!

Donc $x_1 \neq 0_E$ ou $x_2 \neq 0_E$. Comme $u(x_1) = x_1$ et $u(x_2) = -x_2$ alors

ou 1 est valeur propre de u ou -1 est valeur propre de u .

<u>0 est valeur propre de u et u possède une autre valeur propre égale à 1 ou à -1.</u>

Pour éviter les doutes montrons que $Sp\, u = \{0,1\}$ ou $\{0,-1\}$.

D'après ce qui précède il suffit de montrer que 1 et -1 ne sont pas simultanément valeurs propres de u. Supposons le contraire. Soit z_1 (resp. z_2) un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1 (resp. -1).

(z_1, z_2) est libre (vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ...)

$u^2(z_1) = 1^2 z_1 = z_1$ et $u^2(z_2) = (-1)^2 z_2 = z_2$. (z_1, z_2) est une famille libre de $SEP(u^2, 1) = Ker(u^2 - Id_E) = Im\, u^2$ et $\dim Im\, u^2 = 1$!!

Finalement <u>$Sp\, u = \{0,1\}$ ou $\{0,-1\}$.</u> <u>Remarque</u>.. On aurait pu obtenir ce résultat en montrant que $Ke(u^2 - Id_E) = Ke(u - Id_E) \oplus Ke(u + Id_E)$

Analyse.

b) * Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E tel que $M_B(u) = A$.

Alors $u(e_1) = 0_E$, $u(e_2) = e_2$, $u(e_3) = e_1$. $0_E = u(e_1) = u^2(e_3)$

Donc $e_1 = u(e_3)$ (ainsi $u(e_3) \neq 0_E$) , $e_2 \in SEP(u,1)$, $e_3 \in Ke\, u^2$.

Ainsi $e_1 = u(e_3)$, $e_3 \notin Ke\, u$, $e_3 \in Ke\, u^2$ et $e_2 \in SEP(u,1)$.

Synthèse ou construction d'une base solution.

*. <u>Soit e_2 un élément non nul de $SEP(u,1)$.</u>

. $Ke\, u \subset Ke\, u^2$. Montrons par l'absurde que $Ke\, u \subsetneq Ke\, u^2$.

Supposons que $Ke\, u = Ke\, u^2$. Alors $\dim Ke\, u = \dim Ke\, u^2 = 3 - rg\, u^2 = 3 - 1 = 2$

Ainsi $\dim SEP(u,0) = 2$.

Ici $Sp\, u = \{0, 1\}$. Nous avons $\dim SEP(u,0) = 2$ et $\dim SEP(u,1) \geq 1$.

Comme $\dim E = 3$: $\dim SEP(u,1) = 1$.

$\dim SEP(u,0) + \dim SEP(u,1) = \dim E$. u est diagonalisable.

mieux il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A'^2 = A'$; $u^2 = u$; u est un projecteur !

Ainsi $\mathrm{Ker}\, u \subsetneq \mathrm{Ker}\, u^2$. Soit e_3 un élément de $\mathrm{Ker}\, u^2$ n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}\, u$. Posons $e_1 = u(e_3)$. $e_1 \neq 0_E$ car $e_3 \notin \mathrm{Ker}\, u$.

$u(e_2) = e_2$. $u(e_3) = e_1$, $u(e_1) = u^2(e_3) = 0_E$. Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une base de E. $\dim E = 3$, il suffit donc de montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_E$.

$0_E = u^2(0_E) = \alpha u^2(e_1) + \beta u^2(e_2) + \gamma u^2(e_3) = \alpha u(0_E) + \beta e_2 + \gamma . 0_E = \beta e_2$.

Or e_2 n'est pas nul donc $\beta = 0$.

$\alpha e_1 + \gamma e_3 = 0_E$. Alors $0_E = u(0_E) = \alpha u(e_1) + \gamma u(e_3) = \gamma u(e_3)$.

$\gamma u(e_3) = 0_E$ et $u(e_3) \neq 0_E$ car $e_3 \notin \mathrm{Ker}\, u$ donc $\gamma = 0$.

Alors $\alpha e_1 = 0_E$ avec $e_1 \neq 0_E$. $\alpha = 0$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

De plus $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$.

Sujet S 6 - Exercice

1) Question de cours : Rappeler les formules de Taylor-Lagrange (égalité et inégalité), ainsi que leurs conditions de validité.

2) On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{\frac{-x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

a) Calculer la dérivée à droite de f en 0.

b) Montrer que f est une densité de probabilité.

c) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, admettant f pour densité. Montrer que X possède une espérance et une variance, et les calculer.

3) Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi, admettant pour densité une fonction g continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et possédant une dérivée à droite non nulle en 0, égale à c.

a) Justifier le développement limité, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures :

$$\mathbb{P}\big([\mathrm{X}_1 \leqslant x]\big) = \frac{c}{2}x^2 + o(x^2) \quad .$$

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathrm{Y}_n = \inf\{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n\}$.

i) Démontrer que la suite $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0 quand n tend vers l'infini.

ii) Trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs tels que $a_n\mathrm{Y}_n$ converge en loi vers la variable aléatoire X de la question 2 quand n tend vers l'infini.

Sujet S 6 - Exercice sans préparation

Pour toute matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $f(\mathrm{M})$ la matrice $\begin{pmatrix} c'' & b'' & a'' \\ c' & b' & a' \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

1) Montrer que f est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Trouver les valeurs propres de f.

3) a) Montrer que, pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, le rang de $f(\mathrm{M})$ est égal au rang de M.

b) Cette propriété de préservation du rang est-elle vraie pour tous les automorphismes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

HEC 2010 S6 Correction de l'exercice

(Q1) I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^{n+1} sur I. a est un élément de I.

- $\forall x \in I - \{a\}, \exists c_x \in \overset{\leftrightarrow}{]a, x[}, \; f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$. (1)

- $\forall x \in I, \; \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{u \in \overset{\leftrightarrow}{[a,x]}} |f^{(n+1)}(u)|$ (2)

(1) est la formule de Taylor-Lagrange. (2) est l'inégalité de Taylor-Lagrange.

(Q2) a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x e^{-x^2/2} - 0}{x - 0} \right) = \lim_{x \to 0^+} e^{-x^2/2} = 1$.

Ainsi <u>f est dérivable à droite en 0 et le nombre dérivé à droite de f en 0 est 1.</u>

<u>Remarque</u>.. f est dérivable à gauche en 0 et le nombre dérivé à gauche de f en 0 est 0.
Ainsi f n'est pas dérivable en 0.

<u>b)</u> • f est définie et positive sur $\mathbb{R}$.

• $x \mapsto 0$ et $x \mapsto x e^{-x^2/2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$. Ainsi f est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

<u>Exercice</u>.. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

• $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ converge et vaut 0. Notons que $\forall x \in [0, +\infty[, \; f(x) = x e^{-x^2/2}$

Ainsi f est continue sur $[0, +\infty[$ et $\forall A \in [0, +\infty[, \int_0^A f(t)\,dt = \left[-e^{-t^2/2} \right]_0^A = 1 - e^{-A^2/2}$.

Alors $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(t)\,dt = \lim_{A \to +\infty} (1 - e^{-A^2/2}) = 1$. $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1. Ceci achève de montrer que <u>f est une densité de probabilité.</u>

c) Pour gagner du temps nous allons d'abord montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ $I_n=\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2/2}dt$ converge et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = n\, I_{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\forall t \in [0,+\infty[$, $g_n(t) = t^n e^{-t^2/2}$.

- g_n est continue sur $[0,+\infty[$. donc on peut au moins dire que $\int_0^1 g_n(t)dt$ existe !
- $\lim_{t\to+\infty} (t^2 g_n(t)) = \lim_{t\to+\infty}\left(2^{\frac{n+2}{2}}\ \frac{(t^2/2)^{\frac{n+2}{2}}}{e^{t^2/2}}\right) = 0$ par croissance comparée.

Alors $*$ $g_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$;

$*$ $\forall t \in [1,+\infty[$, $g_n(t) \geq 0$ et $\frac{1}{t^2} \geq 0$;

$*$ $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} g_n(t)dt$ converge.

Donc $\underline{\int_0^{+\infty} g_n(t)dt}$ converge et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$. I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall t \in [0,+\infty[$, $u(t) = t^n$ et $v(t) = -e^{-t^2/2}$. u et v sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et $\forall t \in [0,+\infty[$, $u'(t) = n t^{n-1}$ et $v'(t) = t e^{-t^2/2}$.
ceci justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $A \in]0,+\infty[$.

$\int_0^A g_{n+1}(t)dt = \int_0^A t^n (t e^{-t^2/2})dt = [t^n(-e^{-t^2/2})]_0^A - \int_0^A n t^{n-1}(-e^{-t^2})dt$.

$\int_0^A g_{n+1}(t)dt = -A^n e^{-A^2/2} + n\int_0^A g_{n-1}(t)dt$.

$\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)dt$ converge, $\int_0^{+\infty} g_{n-1}(t)dt$ converge et $\lim_{A\to+\infty}(A^n e^{-A^2/2}) = \lim_{A\to+\infty}\left(2^{\frac{n}{2}}\frac{(A^2/2)^{\frac{n}{2}}}{e^{A^2/2}}\right) = 0$
par croissance comparée.

Alors en faisant tendre A vers $+\infty$ il vient $\underline{\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)dt = n\int_0^{+\infty} g_{n-1}(t)dt}$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

ou $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = n\, I_{n-1}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\int_{-\infty}^0 t^n f(t)dt$ existe et vaut 0.

$\forall t \in [0,+\infty[$, $t^n f(t) = g_{n+1}(t)$ Alors $\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)dt$.

Alors <u>pour tout n dans $\mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre n</u>... que nous notons $m_n(X)$.

Donc X possède une espérance et une variance.

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt = \int_0^{+\infty} t f(t)dt = \int_0^{+\infty} g_2(t)dt = \int_0^{+\infty} g_{1+1}(t)dt = 1\times\int_0^{+\infty} g_0(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt.$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}dt = 1$ car $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Par parité $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{2}$.

Alors $E(X)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2\pi}\times\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. $\underline{E(X)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_0^{+\infty} g_{2+1}(t)dt = 2\int_0^{+\infty} g_{2-1}(t)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)dt = 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2.$

$\underline{E(X^2)=2}$. Alors $V(X)=2-\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2$. $\underline{V(X)=2-\frac{\pi}{2}}$.

<u>Exercice</u>.. calculer $m_n(X)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(Q3) g est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction de répartition F_{X_1} de X_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'_{X_1}=g$.

Notons <u>F la restriction de F_{X_1} à $[0,+\infty[$</u>. F est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et $\forall x\in[0,+\infty[$, $F'(x)=g(x)$. Comme g possède une dérivée à droite en 0 qui vaut c, F' est dérivable en 0 et $F''(0)=c$.

F est deux fois dérivable en 0 donc la formule de Taylor-Young permet d'écrire : $F(x)\underset{x\to 0}{=} F(0)+(x-0)F'(0)+\frac{(x-0)^2}{2}F''(0)+o(x^2)$.

$F(0)=F_{X_1}(0)=\int_{-\infty}^0 g(t)\,dt=0$. $F'(0)=F'_{X_1}(0)=g(0)$. $F''(0)=c$.

Or g est continue en 0 et nulle sur $]-\infty,0]$. Ainsi $g(0)=\lim_{x\to 0^-} g(x)=0$.

Alors $F(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{c}{2}x^2+o(x^2)$. Donc $F_{X_1}(x)\underset{x\to 0^+}{=}\frac{c}{2}x^2+o(x^2)$.

...

Finalement $P(X_1 \leq x) \underset{x \to 0^+}{=} \frac{c}{2} x^2 + o(x^2)$.

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) = P(\{Y_n \leq -\varepsilon\} \cup \{Y_n \geq \varepsilon\})$

$P(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) = P(Y_n \leq -\varepsilon) + P(Y_n \geq \varepsilon)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - P(\{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\} \cap \dots \cap \{X_n > x\}) \overset{*}{=} 1 - (P(X_1 > x))^n$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et ont même loi.

$P(Y_n \leq x) = 1 - (1 - P(X_1 \leq x))^n = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n$; $P(Y_n \leq x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n$.

$P(Y_n \geq x) = P(\{X_1 \geq x\} \cap \{X_2 \geq x\} \cap \dots \cap \{X_n \geq x\}) = [P(X_1 \geq x)]^n = (1 - P(X_1 < x)) = (1 - P(X_1 \leq x))^n$
$X_1, X_2, \dots, X_n$ ont même loi et sont indépendantes.

$P(Y_n \geq x) = (1 - P(X_1 \leq x))^n = (1 - F_{X_1}(x))^n$.

Alors $P(Y_n \geq \varepsilon) = (1 - P(X_1 \leq \varepsilon))^n$ $P(Y_n \leq -\varepsilon) = 1 - (1 - F_{X_1}(-\varepsilon))^n$

$F_{X_1}(-\varepsilon) = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} g(t)\,dt = 0$ car g est nulle sur $]-\infty, 0]$. Donc $P(Y_n \leq -\varepsilon) = 1 - (1-0)^n = 0$ ce qui n'est pas une grosse surprise ! Y_n prend des valeurs positives presque sûrement...

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) = (1 - P(X_1 \leq \varepsilon))^n$.

Supposons que $P(X_1 \leq \varepsilon) = 0$. Alors $F_{X_1}(\varepsilon) = 0$.

Comme F_{X_1} est croissante : $\forall x \in [0, \varepsilon]$, $0 \leq F_{X_1}(x) \leq F_{X_1}(\varepsilon) = 0$. $\forall x \in [0, \varepsilon]$, $F_{X_1}(x) = 0$.

Alors $\forall x \in [0, \varepsilon]$, $P(X_1 \leq x) = 0$.

Donc $\lim_{x \to 0^+} \frac{P(X_1 \leq x)}{x^2} = 0$. Or $P(X_1 \leq x) \underset{x \to 0^+}{=} \frac{c}{2} x^2 + o(x^2)$ et $\frac{c}{2} > 0$.

Donc $P(X_1 \leq x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{c}{2} x^2$. Alors $\lim_{x \to 0^+} \frac{P(X_1 \leq x)}{x^2} = \frac{c}{2}$. Ainsi $0 = \frac{c}{2}$!!

Finalement $P(X_1 \leq \varepsilon) > 0$. Donc $0 < P(X_1 \leq \varepsilon) \leq 1$. Alors $0 \leq 1 - P(X_1 \leq \varepsilon) < 1$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) = \lim_{n \to +\infty} (1 - P(X_1 \leq \varepsilon))^n = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Par conséquent $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 0.

ii) Notons F la fonction de répartition de X. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0 dt = 0$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $F(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} t e^{-t^2/2} dt = [-e^{-t^2/2}]_0^x = 1-e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty,0] \\ 1-e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$. Notons que F est continue en tout point de $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Posons pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $Z_n = a_n Y_n$ et notons F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) = P(a_n Y_n \leq x) \underset{a_n>0}{\overset{}{=}} P(Y_n \leq \frac{x}{a_n}) = F_{Y_n}\left(\frac{x}{a_n}\right) = 1-\left(1-F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)^n$.

$\forall x \in]-\infty,0]$, $F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) = \int_{-\infty}^{x/a_n} g(t)dt = 0$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 1-\left(1-F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)^n \text{ si } x \in]0,+\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) \underset{F_{Z_n}(x)=0\,!}{=} 0 = F(x)$. ⊙

Ainsi $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X

$\Updownarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = F(x)$

⊙ $\Updownarrow$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = F(x)$

$\Updownarrow$ $\forall x \in]0,+\infty[$, $\lim_{n \to +\infty} \left[1-\left(1-F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)^n\right] = 1-e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$\Updownarrow$ $\forall x \in]0,+\infty[$, $\lim_{n \to +\infty} \left(1-F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)^n = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $X \iff \forall x \in]0,+\infty[,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n \ln\left(1-F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)\right) = -\frac{x^2}{2}$

__Remarque..__ Soit $x \in]0,+\infty[$. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n \ln\left(1-F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)\right) = -\frac{x^2}{2}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1-F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right) = 1$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) = 0$. Il semble alors raisonnable de penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{a_n} = 0$ donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Nous montrerons en complément que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) = 0$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$\boxed{\text{Supposons donc maintenant que } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty.}$

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X

$\Updownarrow$

$n \ln\left(1-F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ pour tout x dans $]0,+\infty[$

$\Updownarrow \leftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{a_n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) = F_{X_1}(0) = 0$

$-n\left(-F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $P(X_1 \leqslant x) = \frac{c}{2} x^2 + o(x^2)$ donc $F_{X_1}(x) = P(X_1 \leqslant x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{c}{2} x^2$ $(c \neq 0)$.

Alors $\forall x \in]0,+\infty[$, $F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{2} \frac{x^2}{a_n^2}$.

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $X \iff \forall x \in]0,+\infty[,\ -n\left(-\frac{c}{2}\frac{x^2}{a_n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $X \iff c\,\frac{n}{a_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \iff a_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} c\,n$

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $X \iff a_n = |a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{cn} \iff a_n \sim \sqrt{cn}$.

Notons que cette équivalence suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

__Posons alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sqrt{cn}$.__

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > 0$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

3) $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{cn}$!

Alors $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sqrt{cn}$, $(a_nY_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

complément. Soit $x \in]0,+\infty[$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs.
Montrons pour le fun que si $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

Montrons que $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow a_n > A$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$\frac{x}{A} \in \mathbb{R}_+^*$. Comme nous l'avons vu dans i) $P(X_1 \leq \frac{x}{A}) > 0$. $F_{X_1}(\frac{x}{A}) > 0$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) = 0$. Ainsi $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow |F_{X_1}(\frac{x}{a_n}) - 0| < F_{X_1}(\frac{x}{A})$

donc $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right) \leq \left|F_{X_1}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right| < F_{X_1}\left(\frac{x}{A}\right)$. Or F_{X_1} est croissante sur $\mathbb{R}$.

donc $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $\frac{x}{a_n} < \frac{x}{A}$ $\quad \left(\frac{x}{a_n} \geq \frac{x}{A} \Rightarrow F_{X_1}(\frac{x}{a_n}) \geq F_{X_1}(\frac{x}{A})\right)$.

Alors $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $A < a_n$ (car $x > 0$, $a_n > 0$, $A > 0$).

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow a_n > A$.

Ainsi $\forall A \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow a_n > A$. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

Ce qui permet de dire que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs alors :

$(a_nY_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{cn}$

ou si et seulement si $\lim \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{c}$ ou si et seulement si $\lim \frac{a_n^2}{n} = c$.

Sujet S 7 - Exercice

1) Question de cours : Énoncer le théorème de réduction des matrices symétriques réelles.
2) Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre $n \geqslant 2$, ayant pour plus grande valeur propre, en valeur absolue $\lambda_{\max}(A)$. Montrer que :

$$|\lambda_{max}(A)| = \max\left\{\left|\frac{<Ax, x>}{<x, x>}\right|, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\} = \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}.$$

où $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ issue du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

3) Soit A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. Soit $\alpha \geqslant 0$. On pose :

$$M = (I - \alpha A)(I + \alpha A)^{-1}, \quad N = (I - \alpha B)(I + \alpha B)^{-1}$$

où I désigne la matrice identité d'ordre n.
Déterminer les valeurs propres des matrices M et N en fonction de celles de A et B. Montrer en particulier que ces valeurs propres sont toutes réelles et de valeur absolue inférieure ou égale à 1.

4) On considère la matrice $P = MN$. Montrer que les valeurs propres complexes de la matrice P sont toutes de module inférieur ou égal à 1.
5) Trouver un exemple en dimension 2 de deux matrices quelconques ayant des valeurs propres de module inférieur ou égal à 1 et dont le produit ne vérifie pas cette propriété.

Sujet S 7 - Exercice sans préparation

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi. On suppose qu'il existe deux réels, $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ tels :

$$\mathbb{P}([X_1 > x]) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x^\lambda}$$

Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}} \max(X_1, \ldots, X_n)$$

converge en loi vers une loi à déterminer.

HEC 2010 S7 Correction de l'exercice

Q1 Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. A est diagonalisable.

2. Il existe une base ~~base~~ orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A

3. Il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ~~telle que~~ ^tPAP ou $P^{-1}AP$ soit diagonale

Q2 Soit $\mathcal{B}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Notons que $Sp\, A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ne sont pas nécessairement distincts.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ la famille de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

$X=\sum_{k=1}^{n} \beta_k X_k$ et $AX=\sum_{k=1}^{n}\beta_k AX_k=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\alpha_k X_k$.

Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée : $\|X\|^2=\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2$ et $\langle AX,X\rangle=\sum_{k=1}^{n}(\beta_k\alpha_k)\beta_k=\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\alpha_k$.

$$|\langle AX,X\rangle|=\left|\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\alpha_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|\beta_k^2\alpha_k|=\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2|\alpha_k|\leq\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2|\lambda_{max}(A)|=|\lambda_{max}(A)|\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2.$$

$\forall k\in[\![1,n]\!]$, $|\alpha_k|\leq|\lambda_{max}(A)|$ et $\beta_k^2\geq 0$

$|\langle AX,X\rangle|\leq|\lambda_{max}(A)|\,\|X\|^2$

Supposons $X\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$: $\|X\|^2\neq 0$. Mieux $\|X\|^2>0$.

Alors $\dfrac{|\langle AX,X\rangle|}{\|X\|^2}\leq|\lambda_{max}(A)|$ ou $\dfrac{|\langle AX,X\rangle|}{\langle X,X\rangle}\leq|\lambda_{max}(A)|$ ou encore :

$\left|\dfrac{\langle AX,X\rangle}{\langle X,X\rangle}\right|\leq|\lambda_{max}(A)|$ et ceci pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_{max}(A)$ de A.

$\langle AU,U\rangle=\langle\lambda_{max}(A)U,U\rangle=\lambda_{max}\langle U,U\rangle$ et $\langle U,U\rangle=\|U\|^2\neq 0$

Donc $\dfrac{\langle AU,U\rangle}{\langle U,U\rangle}=\lambda_{max}(A)$. $\left|\dfrac{\langle AU,U\rangle}{\langle U,U\rangle}\right|=|\lambda_{max}(A)|$.

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\},\quad \left|\frac{\langle AX, X\rangle}{\langle X, X\rangle}\right| \leqslant \left|\frac{\langle AU, U\rangle}{\langle U, U\rangle}\right| = |\lambda_{max}(A)|.$$

ceci indique que $\max\left\{\left|\frac{\langle AX,X\rangle}{\langle X,X\rangle}\right| ; X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\right\}$ existe et vaut $|\lambda_{max}(A)|$.

Reprenons un élément non nul X de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ dans $\mathcal{B}$.

$X = \sum_{k=1}^{n} \beta_k X_k$ et $AX = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \alpha_k X_k$.

Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée $\|AX\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \alpha_k)^2$ et $\|X\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2$.

$$\|AX\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 |\alpha_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 |\lambda_{max}(A)|^2 = |\lambda_{max}(A)|^2 \|X\|^2.$$

Comme $\|X\|^2 > 0$: $\left(\frac{\|AX\|}{\|X\|}\right)^2 = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \leqslant |\lambda_{max}(A)|^2$

Or $\frac{\|AX\|}{\|X\|} \geqslant 0$ et $|\lambda_{max}(A)| \geqslant 0$ donc $\frac{\|AX\|}{\|X\|} \leqslant |\lambda_{max}(A)|$.

$U \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $AU = \lambda_{max}(A)U$. Alors $\|AU\| = \|\lambda_{max}(A)U\| = |\lambda_{max}(A)|\,\|U\|$.

Donc $\frac{\|AU\|}{\|U\|} = |\lambda_{max}(A)|$.

Ainsi $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\frac{\|AX\|}{\|X\|} \leqslant |\lambda_{max}(A)| = \frac{\|AU\|}{\|U\|}$.

ceci permet de dire que $\max\left\{\frac{\|AX\|}{\|X\|} ; X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\right\}$ existe et vaut $|\lambda_{max}(A)|$.

<u>Remarque</u>. En identifiant $\mathbb{R}^n$ et $M_{n,1}(\mathbb{R})$ on peut écrire, pour faire plaisir au concepteur :

$$|\lambda_{max}(A)| = \max\left\{\left|\frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}\right| ; x \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}\right\} = \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} ; x \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}\right\}.$$

(Q3) <u>Remarque</u>.. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$

si $\alpha = 0$: $I_n + \alpha A = I_n$ donc $I_n + \alpha A$ est inversible.

Supposons $\alpha \neq 0$. Alors $\alpha > 0$. $-\frac{1}{\alpha} \notin Sp\,A$ car $Sp\,A \subset [0, +\infty[$.

donc $A - (-\frac{1}{\alpha}) I_n$ est inversible. Comme α n'est pas nul $\alpha(A - (-\frac{1}{\alpha}) I_n)$ est inversible.

Par conséquent $\alpha A + I_n$ est inversible.

<u>Pour tout α dans $\mathbb{R}^+$, $I_n + \alpha A$ est inversible.</u>

<u>De même pour tout α dans $\mathbb{R}^+$, $I_n + \alpha B$ est inversible.</u> ▲

Il existe une matrice orthogonale $\hat{P}$ de $M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\hat{P} A \hat{P} = \hat{P}^{-1} A \hat{P}$ soit diagonale (Q1!).

Posons $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \hat{P}^{-1} A \hat{P} = {}^t\hat{P} A \hat{P}$.

$\hat{P}^{-1} M \hat{P} = \hat{P}^{-1}(I_n - \alpha A)(I_n + \alpha A)^{-1} \hat{P} = \hat{P}^{-1}(I_n - \alpha A)\hat{P}\hat{P}^{-1}(I_n + \alpha A)^{-1}\hat{P}$.

$\to \hat{P}^{-1}(I_n - \alpha A)\hat{P} = \hat{P}^{-1} I_n \hat{P} - \alpha \hat{P}^{-1} A \hat{P} = I_n - \alpha D = \mathrm{Diag}(1 - \alpha\alpha_1, 1 - \alpha\alpha_2, \dots, 1 - \alpha\alpha_n)$.

$\to \hat{P}^{-1}(I_n + \alpha A)^{-1}\hat{P} = \hat{P}^{-1}(I_n + \alpha A)^{-1}(\hat{P}^{-1})^{-1} = (\hat{P}^{-1}(I_n + \alpha A)\hat{P})^{-1} = (\hat{P}^{-1} I_n \hat{P} + \alpha \hat{P}^{-1} A \hat{P})^{-1}$.

$\hat{P}^{-1}(I_n + \alpha A)^{-1}\hat{P} = (I_n + \alpha D)^{-1} = (\mathrm{Diag}(1 + \alpha\alpha_1, 1 + \alpha\alpha_2, \dots, 1 + \alpha\alpha_n))^{-1}$.

$\hat{P}^{-1}(I_n + \alpha A)^{-1}\hat{P} = \mathrm{Diag}(\frac{1}{1 + \alpha\alpha_1}, \frac{1}{1 + \alpha\alpha_2}, \dots, \frac{1}{1 + \alpha\alpha_n})$

Alors $\hat{P}^{-1} M \hat{P} = \mathrm{Diag}(1 - \alpha\alpha_1, 1 - \alpha\alpha_2, \dots, 1 - \alpha\alpha_n)\,\mathrm{Diag}(\frac{1}{1 + \alpha\alpha_1}, \frac{1}{1 + \alpha\alpha_2}, \dots, \frac{1}{1 + \alpha\alpha_n})$.

$\hat{P}^{-1} M \hat{P} = \mathrm{Diag}(\frac{1 - \alpha\alpha_1}{1 + \alpha\alpha_1}, \frac{1 - \alpha\alpha_2}{1 + \alpha\alpha_2}, \dots, \frac{1 - \alpha\alpha_n}{1 + \alpha\alpha_n})$

M est donc semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\frac{1 - \alpha\alpha_1}{1 + \alpha\alpha_1}, \frac{1 - \alpha\alpha_2}{1 + \alpha\alpha_2}, \dots, \frac{1 - \alpha\alpha_n}{1 + \alpha\alpha_n})$.

Alors $Sp\,M = \left\{ \frac{1 - \alpha\alpha_k}{1 + \alpha\alpha_k} ; k \in [\![1, n]\!] \right\}$ et M est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

donc <u>$Sp\,M = \left\{ \frac{1 - \alpha\lambda}{1 + \alpha\lambda} ; \lambda \in Sp\,A \right\}$</u>. De même <u>$Sp\,N = \left\{ \frac{1 - \alpha\lambda'}{1 + \alpha\lambda'} ; \lambda' \in Sp\,B \right\}$</u>.

Notons que M et N sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$... alors $Sp_{\mathbb{C}} M = Sp_{\mathbb{R}} M$ et $Sp_{\mathbb{C}} N = Sp_{\mathbb{R}} N$

Ainsi <u>les valeurs propres de M et N sont toutes réelles !</u>

Soit $\mu \in Sp\,M$. $\exists \lambda \in Sp\,A$, $\mu = \frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}$.

$1-\mu^2 = 1 - \frac{(1-\alpha\lambda)^2}{(1+\alpha\lambda)^2} = \frac{1+\alpha^2\lambda^2+2\alpha\lambda-1-\alpha^2\lambda^2+2\alpha\lambda}{(1+\alpha\lambda)^2} = \frac{4\alpha\lambda}{(1+\alpha\lambda)^2} \geq 0$ car $\alpha \geq 0$ et $\lambda \geq 0$

$Sp\,A \subset \mathbb{R}^+$

donc $1-\mu^2 \geq 0$. $\mu^2 \leq 1$. $\sqrt{\mu^2} \leq \sqrt{1} = 1$; $|\mu| \leq 1$.

<u>Les valeurs propres de M sont réelles et de valeur absolue inférieure ou égale à 1.</u>

<u>De même les valeurs propres de N sont réelles et de valeur absolue inférieure ou égale à 1.</u>

Q4 Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(P)$. Soit Z un élément non nul de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $PZ = \lambda Z$

Posons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \mathrm{Re}(z_k)$ et $y_k = \mathrm{Im}(z_k)$.

Posons encore $P = (p_{k,\ell})_{\substack{1\leq k\leq n\\ 1\leq \ell\leq n}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $X' = PX = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ et $Y' = PY = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$.

$\lambda Z = PZ$ donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda(x_k + i y_k) = \lambda z_k \overset{\lambda Z = PZ}{=} \sum_{\ell=1}^{n} p_{k,\ell}\, z_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} p_{k,\ell}(x_\ell + i y_\ell)$.

Alors $|\lambda(x_k+iy_k)|^2 = \left|\sum_{\ell=1}^{n} p_{k,\ell}\, x_\ell + i \sum_{\ell=1}^{n} p_{k,\ell}\, y_\ell\right|^2$ pour tout k dans $[\![1,n]\!]$.

donc $|\lambda|^2(x_k^2+y_k^2) = \left(\sum_{\ell=1}^{n} p_{k,\ell}\, x_\ell\right)^2 + \left(\sum_{\ell=1}^{n} p_{k,\ell}\, y_\ell\right)^2$ pour tout k dans $[\![1,n]\!]$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|\lambda|^2(x_k^2+y_k^2) = (x'_k)^2 + (y'_k)^2$ car $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x'_k = \sum_{\ell=1}^{n} p_{k,\ell}\, x_\ell$ et

$y'_k = \sum_{\ell=1}^{n} p_{k,\ell}\, y_\ell$ puisque $X' = PX$ et $Y' = PY$.

En sommant de 1 à n il vient : $|\lambda|^2\left[\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^2 + \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell^2\right] = \sum_{k=1}^{n} (x'_k)^2 + \sum_{k=1}^{n} (y'_k)^2$.

donc <u>$|\lambda|^2\left[\|X\|^2+\|Y\|^2\right] = \|PX\|^2+\|PY\|^2$</u>

<u>Lemme</u> : $\boxed{\forall V \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PV\| \leq \|V\|}$

Admettons un instant le résultat du lemme.

Alors $|\lambda|^2\left[\|X\|^2+\|Y\|^2\right] \leq \|X\|^2+\|Y\|^2$. Supposons que $\|X\|^2+\|Y\|^2 = 0$.

Alors $\|X\|^2 = \|Y\|^2 = 0$. $\|X\| = \|Y\| = 0$. $X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $Y = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = y_k = 0$. Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $z_k = x_k + i y_k = 0$. $Z = 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$!!

Donc $\|X\|^2+\|Y\|^2 \neq 0$. Mieux $\|X\|^2+\|Y\|^2>0$.

Or $|\lambda|^2 [\|X\|^2+\|Y\|^2] \leq \|X\|^2+\|Y\|^2$. Donc en divisant par $\|X\|^2+\|Y\|^2$ on obtient $|\lambda|^2 \leq 1$. Ce qui donne $\underline{\underline{|\lambda| \leq 1}}$.

Il ne reste plus qu'à montrer le lemme.

Nous avons montré dans Q3 l'existence d'une matrice orthogonale $\hat{P}$ de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $\hat{P}^{-1} M \hat{P} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1-\alpha d_1}{1+\alpha d_1}, \frac{1-\alpha d_2}{1+\alpha d_2}, \dots, \frac{1-\alpha d_n}{1+\alpha d_n}\right)$. Notons Δ cette dernière matrice. $\hat{P}^{-1} M \hat{P} = \Delta$. $M = \hat{P} \Delta \hat{P}^{-1} = \hat{P} \Delta {}^t\hat{P}$.

Alors ${}^tM = {}^t(\hat{P}\Delta {}^t\hat{P}) = {}^t({}^t\hat{P}) {}^t\Delta {}^t\hat{P} \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta \text{ est diagonale}}}{=} \hat{P}\Delta {}^t\hat{P} = M$. Donc $\underline{\underline{M \text{ est une matrice symétrique}}}$ de $M_n(\mathbb{R})$.

De même $\underline{\underline{N \text{ est une matrice symétrique de } M_n(\mathbb{R})}}$.

$$|\lambda_{max}(M)| = \max\left\{ \frac{\|MT\|}{\|T\|} \; ; T \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\} \right\}$$

$$\forall T \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}, \quad \frac{\|MT\|}{\|T\|} \leq |\lambda_{max}(M)| \underset{\substack{\uparrow \\ Q3}}{\leq} 1 \quad \& \quad \|T\|>0.$$

Donc $\forall T \in M_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, $\|MT\| \leq \|T\|$.

Mieux $\underline{\forall T \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \|MT\| \leq \|T\|}$. De même $\underline{\forall T \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \|NT\| \leq \|T\|}$.

Alors $\forall V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|PV\| = \|MNV\| = \|M(NV)\| \leq \|NV\| \leq \|V\|$.

Ceci achève de montrer le lemme et permet de dire que :

$\underline{\underline{\text{les valeurs propres complexes de la matrice } P = MN \text{ sont toutes de module inférieur ou égal à } 1.}}$

Q5 Posons $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N' = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P' = M'N'$.

$Sp_{\mathbb{C}} M' = \{1\}$ et $Sp_{\mathbb{C}} N' = \{\frac{1}{2}, 1\}$ (M' et N' sont triangulaires ...).

<u>les valeurs propres de M' et N' sont de module inférieur ou égal à 1</u>

$P' = M'N' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}} P' \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)^2 - \frac{1}{2} = 0 \iff 1-\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $1-\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Alors $Sp_{\mathbb{C}} P' = \{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ et $|1 + \frac{1}{\sqrt{2}}| = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > 1$.

<u>les valeurs propres de P' ne sont pas toutes de module inférieur ou égal à 1.</u>

Question 7 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et de même loi.

On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs α et λ tels que $P(X_1 > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{x^\lambda}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}} \operatorname{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi

---

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_n la fonction de répartition de Z_n et F la fonction de répartition de X_1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_n(x) = P(Z_n \leqslant x) = P(\operatorname{Max}(X_1,\ldots,X_n) \leqslant n^{\frac{1}{\lambda}} x) = P(\{X_1 \leqslant n^{1/\lambda} x\} \cap \ldots \cap \{X_n \leqslant n^{1/\lambda} x\})$

$F_n(x) = P(X_1 \leqslant n^{1/\lambda} x) \ldots P(X_n \leqslant n^{1/\lambda} x)$ par indépendance.

$\underline{F_n(x) = \left(F(n^{1/\lambda} x)\right)^n = \left(1 - P(X_1 > n^{1/\lambda} x)\right)^n.}$

$\underline{1^{er} \text{ cas}}$.. $x < 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^{1/\lambda} x) = -\infty$. $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n^{1/\lambda} x) = 0$.

Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ 0 \leqslant F(n^{1/\lambda} x) \leqslant \frac{1}{2}$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ 0 \leqslant (F(n^{1/\lambda} x))^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Par encadrement il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} (F(n^{1/\lambda} x))^n = 0$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0}$.

$\underline{2^{ème} \text{ cas}}$.. $x = 0$.

Supposons $F(0) = 1$. Alors $\forall x \in [0, +\infty[$, $1 = F(0) \leqslant F(x) \leqslant 1$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $F(x) = 1$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $P(X_1 > x) = 1 - F(x) = 0$. Ceci contredit $P(X_1 > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{x^\lambda}$

Alors $F(0) \neq 1$. Ainsi $F(0) \in [0, 1[$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (F(0))^n = 0$; $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(0) = 0}$.

$\underline{3^{ème} \text{ cas}}$.. $x > 0$ $F_n(x) = (1 - P(X_1 > n^{1/\lambda} x))^n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^{1/\lambda} x) = +\infty$ donc

$$P(X_1 > n^{1/\lambda} x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{(n^{1/\lambda} x)^\lambda} = \frac{\alpha}{n x^\lambda}.$$

Ainsi En particulier $\lim_{n\mapsto+\infty} P(X_1 > n^{1/\lambda}x) = 0$.

Donc $\lim_{n\mapsto+\infty} \left(1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x)\right) = 1$.

Alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![n_1, +\infty [\![$, $1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x) > 0$.

$$n \ln(1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x)) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} n \times (-P(X_1 > n^{1/\lambda}x)) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} n\left(-\frac{\alpha}{n x^\lambda}\right) = -\frac{\alpha}{x^\lambda}.$$

$\lim_{n\mapsto+\infty} e^{n\ln(1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x))} = e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}}$ ... par continuité de la fonction exponentielle.

$\lim_{n\mapsto+\infty} \left(1 - P(X_1 > n^{1/\lambda}x)\right)^n = e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}}$. $\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}}$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha}{x^\lambda}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. montrons que G est la

fonction de répartition d'une variable aléatoire ... à densité.

1 * $\lim_{x\mapsto-\infty} G(x) = 0$ car G est nulle sur $]-\infty, 0]$.

$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\alpha}{x^\lambda} = 0$ car $\lambda > 0$ donc $\lim_{x\mapsto+\infty} G(x) = 1$.

2 * Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Supposons $a < b$

1er cas.. $a < b \leq 0$. Alors $G(a) = 0 \leq 0 = G(b)$.

2e cas.. $a \leq 0 < b$. Alors $G(a) = 0 \leq e^{-\frac{\alpha}{b^\lambda}} = G(b)$

3e cas.. $0 < a < b$. $\frac{1}{b^\lambda} \leq \frac{1}{a^\lambda}$ car $\lambda > 0$. $-\frac{\alpha}{a^\lambda} \leq -\frac{\alpha}{b^\lambda}$ $(\alpha > 0)$.

Donc $G(a) = e^{-\alpha/a^\lambda} \leq e^{-\alpha/b^\lambda} = G(b)$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b \Rightarrow G(a) \leq G(b)$. G est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. G est nulle sur $]-\infty,0]$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$

$x \mapsto -\frac{\alpha}{x^\lambda}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par composition G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Donc 1) G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (au moins) donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

2) G est continue à gauche en 0.

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^\lambda}\right) = +\infty$ donc $\lim_{x\to 0^+} G(x) = 0 = G(0)$; G est continue à droite en 0.

Finalement G est continue en 0.

G est continue sur $\mathbb{R}$. Ceci achève de montrer que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

$(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de fonction de répartition G.

Sujet S 8 - Exercice

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toute la loi exponentielle de paramètre 1.
On définit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ par la relation :

$$Y_1 = X_1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{n+1} X_{n+1}.$$

1) Question de cours : Définition et propriétés du produit de convolution de 2 densités.

2) Reconnaître la loi de $\dfrac{1}{n} X_n$.

3) Montrer que Y_2 possède une densité f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f_2(x) = \begin{cases} 2\exp(-x)(1-\exp(-x)) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4) Exprimer Y_n en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Les variables aléatoires Y_n et $\dfrac{1}{n+1} X_{n+1}$ sont-elles indépendantes ?

5) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, Y_n possède une densité f_n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f_n(x) = \begin{cases} n\exp(-x)(1-\exp(-x))^{n-1} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(on pourra raisonner par récurrence sur n).
- En déduire que Y_n et $Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ont la même loi.

6) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini (on pourra utiliser une comparaison série-intégrale).

Sujet S 8 - Exercice sans préparation

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$ tel que :

$$(f - \mathrm{I}d)^3 \, o \, (f - 2\mathrm{I}d) = 0 \quad \text{et} \quad (f - \mathrm{I}d)^2 \, o \, (f - 2\mathrm{I}d) \neq 0.$$

Etudier la diagonalisabilité de f.

(Q1) X et Y sont deux variables aléatoires à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- f_X (resp. f_Y) est une densité de X (resp. Y).
- X et Y sont indépendantes

si la fonction $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt$ (ou $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t)\,dt$) est définie et continue sauf peut-être en un nombre fini de points, $X+Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h.

<u>Remarque</u> : Si f_X ou f_Y est bornée, $X+Y$ est une variable aléatoire à densité et h en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc $X_n \hookrightarrow \Gamma(1,1)$.

Alors $\frac{1}{n} X_n \hookrightarrow \Gamma(\frac{1}{n}, 1)$ donc $\frac{1}{n} X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$.

(Q3) Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} \text{ si } x \in [0,+\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et $\varphi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} \text{ si } x \in [0,+\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$Y_2 = Y_1 + \frac{1}{2} X_2 = X_1 + \frac{1}{2} X_2$.

- X_1 et $\frac{1}{2} X_2$ sont deux variables aléatoires à densité indépendantes car X_1 et X_2 sont indépendantes
- f_1 (resp. φ) est une densité de X_1 (resp. X_2).
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f_1(x) \leq 1$ donc f_1 est bornée sur $\mathbb{R}$.

Alors $Y_2 = X_1 + \frac{1}{2} X_2$ est une variable aléatoire à densité et $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)\varphi(t)\,dt$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$h(x) = \int_0^{+\infty} f_1(x-t)\, 2e^{-2t}\,dt \underset{\text{"}u = x-t\text{"}}{=} \int_{-\infty}^{x} f_1(u)\, 2e^{-2(x-u)}\,du = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ \int_0^x e^{-u}\, 2e^{-2(x-u)}\,du \text{ si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

← un peu rapide mais changement de variable simple ...

Donc $\forall x \in]-\infty, 0[$, $h(x) = 0$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $h(x) = 2e^{-2x} \int_0^x e^{u}\,du = 2e^{-2x}(e^x - 1) = 2e^{-x}(1-e^{-x})$

Notons que l'on a encore $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} 2e^{-x}(1-e^{-x}) \text{ si } x \in]0,+\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Alors Y_2 est une variable aléatoire à densité et la fonction f_2 définie par

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = \begin{cases} 2e^{-x}(1-e^{-x}) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$ en est une densité.

(Q4) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n-1}(Y_{k+1}-Y_k) + Y_1 = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}X_{k+1} + X_1 = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}X_k + X_1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}X_k.$$

De plus $Y_1 = X_1 = \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}X_k$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}X_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ sont indépendantes.

Donc $\frac{1}{1}X_1, \frac{1}{2}X_2, \dots, \frac{1}{n}X_n, \frac{1}{n+1}X_{n+1}$ sont indépendantes.

Alors $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}X_k$ et $\frac{1}{n+1}X_{n+1}$ sont indépendantes.

Finalement Y_n et $\frac{1}{n+1}X_{n+1}$ sont indépendantes et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(Q5) Montrons cette propriété par récurrence sur n.

- Elle est vraie pour $n=1$ car Y_1 suit la loi exponentielle de paramètre 1 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

  Notons qu'elle est même vraie pour $n=2$ d'après Q3.

- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

  1) Par hypothèse de récurrence Y_n est une variable aléatoire à densité et la fonction f_n définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ en est une densité.

2.. $\frac{1}{n+1}X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{E}(n+1)$ donc $\frac{1}{n+1}X_{n+1}$ est une variable aléatoire à densité et la fonction ψ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \begin{cases} (n+1)e^{-(n+1)x} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ en est une densité.

3.. Y_n et $\frac{1}{n+1}X_{n+1}$ sont indépendantes.

4.. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq \psi(x) \leq n+1$ donc ψ est bornée.

Alors $Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{n+1}X_{n+1}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction $\hat{h}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \hat{h}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-t)\psi(t)\,dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\hat{h}(x) = \int_0^{+\infty} f_n(x-t)(n+1)e^{-(n+1)t}\,dt$

$\hat{h}(x) \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{x} f_n(u)(n+1)e^{-(n+1)(x-u)}\,du = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0] \\ \int_0^x f_n(u)(n+1)e^{-(n+1)(x-u)}\,du & \text{sinon} \end{cases}$

$u = x-t$... changement de variable simple...

Alors $\forall x \in]-\infty,0],\ \hat{h}(x) = 0$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

$\hat{h}(x) = \int_0^x f_n(u)(n+1)e^{-(n+1)(x-u)}\,du = (n+1)e^{-(n+1)x}\int_0^x n e^{-u}(1-e^{-u})^{n-1}e^{(n+1)u}\,du$.

$\hat{h}(x) = (n+1)e^{-(n+1)x}\int_0^x n e^{nu}(1-e^{-u})^{n-1}\,du = (n+1)e^{-(n+1)x}\int_0^x n e^{u}(e^{u})^{n-1}(1-e^{-u})^{n-1}\,du$

$\hat{h}(x) = (n+1)e^{-(n+1)x}\int_0^x n e^{u}(e^{u}-1)^{n-1}\,du = (n+1)e^{-(n+1)x}\left[(e^{u}-1)^{n}\right]_0^x$

$\hat{h}(x) = (n+1)e^{-(n+1)x}(e^{x}-1)^{n} = (n+1)e^{-x}\left(e^{-x}(e^{x}-1)\right)^{n} = (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^{n}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \hat{h}(x) = \begin{cases} (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^{(n+1)-1} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi Y_{n+1} est une variable aléatoire à densité et la fonction f_{n+1} définie par

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \begin{cases} (n+1)e^{-x}(1-e^{-x})^{(n+1)-1} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

ceci achève la récurrence. <u>La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.</u>

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, Y_n est une variable aléatoire à densité et la fonction f_n définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ en est une densité.

Remarque.. Notons F_n la fonction de répartition de Z_n ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt = 0$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt = \int_0^x n e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1}\,dt = \left[(1-e^{-t})^n\right]_0^x = (1-e^{-x})^n$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} (1-e^{-x})^n & \text{si } x \in]0,+\infty[\text{ ou } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $A_x = Z_n^{-1}(]-\infty, x])$. Soit $\omega \in \Omega$.

$\omega \in A_x \iff Z_n(\omega) \leq x \iff \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \leq x \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ X_k(\omega) \leq x$.

$\omega \in A_x \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ \omega \in X_k^{-1}(]-\infty, x])$. Alors $A_x = \bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(]-\infty, x])$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donc $\forall k \in [\![1,n]\!], X_k^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

Comme $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie : $A_x = \bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

De plus $P(A_x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(]-\infty, x])\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \leq x\}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x)$ car $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $Z_n^{-1}(]-\infty, x]) = A_x \in \mathcal{A}$ donc Z_n est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Notons F_{Z_n} sa fonction de répartition. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(x) = P(Z_n^{-1}(]-\infty, x])) = P(A_x) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x)$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X_k \leq x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(x) = \begin{cases} (1-e^{-x})^n & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors $F_{Z_n} = F_n$.

Ainsi, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, Y_n et $Z_n = $ "max"$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ont même loi.

(Q6) Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $E(X_k)$ existe et vaut 1.

Alors pour tout n dans $E(Y_n)$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} E(X_k)$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_n)$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. En intégrant il vient :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ (car $k \leq k+1$).

Alors $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = E(Y_n)$.

Donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^n = \ln n \leq E(Y_n)$. pour tout n dans $[\![2, +\infty[\![$

$E(Y_n) - 1 \leq \ln n \leq E(Y_n)$ pour tout n dans $[\![2, +\infty[\![$. De plus $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\ln n > 0$.

Donc $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $1 \leq \frac{E(Y_n)}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right) = 1$.

Ainsi par encadrement : $\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{\ln n} = 1$. Alors $E(Y_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$.

Remarque.. Cela figure dans le problème d'ECRICOME 2011 partie I.

R...

Question 8 HEC 2010 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit f un endomorphisme d'une espace vectoriel de dimension n supérieur ou égal à 1.

On suppose que $(f - \mathrm{Id}_E)^3 \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $(f - \mathrm{Id}_E)^2 \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_E) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Étudier la digonalisisabilité de f.

Posons $P = (X-1)^3(X-2)$ et $Q = (X-1)^2(X-2)$.

$P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $Q(f) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. P est un polynôme annulateur de f dont les zéros sont 1 et 2. Ainsi $Sp\, f \subset \{1,2\}$. Supposons que f est diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres respectivement associées aux valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = \alpha_i e_i$ et $\alpha_i \in \{1,2\}$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Q(f)(e_i) = Q(\alpha_i)\, e_i$. Or $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Q(\alpha_i) = 0$ car les racines de Q sont 1 et 2.

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Q(f)\, e_i = 0_E = 0_{\mathcal{L}(E)}(e_i)$. $Q(f)$ et $0_{\mathcal{L}(E)}$ sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur la base $\mathcal{B}$ de E donc $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Alors $(f - \mathrm{Id}_E)^2 \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ceci contredit l'hypothèse.

<u>f n'est pas diagonalisable.</u>

Sujet S 9 - Exercice

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$
Soit X une variable aléatoire dont la loi dépend du paramètre réel inconnu $\lambda > 0$.
Soit n un entier non nul et $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un n-échantillon i.i.d. de cette loi.
On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre inconnu λ, et on pose :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

On se propose d'étudier certaines propriétés de $\overline{X}_n$.

1) Question de cours : Donner la définition d'un estimateur de λ.
Dans quel cas peut-on dire que cet estimateur est sans biais ?
2) Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de λ.
3) On définit la fonction L de $\mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (k_1, k_2, \cdots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_*^+, \; L(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X = k_i).$$

On pose alors, pour tout $(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $G(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \ln(L(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda))$.

a) Vérifier que la fonction G est bien définie. Calculer $\dfrac{\partial G}{\partial \lambda}(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda)$.

b) Soit $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ un n-uplet fixé dans $\mathbb{N}^n$.
Etudier les variations de la fonction $h : \lambda \to G(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda)$.
Que représente le réel $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$ pour $\overline{X}_n$?

4) On considère la variable aléatoire $-\dfrac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(X_1, X_2, \cdots, X_n, \lambda)$. Exprimer cette variable aléatoire à l'aide de $\overline{X}_n$.
Calculer son espérance notée $I_n(\lambda)$ et déterminer une relation entre $I_n(\lambda)$ et la variance $V\left(\overline{X}_n\right)$.

Sujet S 9 - Exercice sans préparation

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x - y + z = 0 \text{ et } x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x - y + z = 0\}$
Déterminer une base ainsi que la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
Déterminer $F \cap G$ et $F \cup G$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer le noyau et l'image de f.

(Q1) un estimateur de λ est une statistique $T_n = \varphi_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$, φ_n étant une fonction de $\mathbb{R}^n$ et $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une suite de n variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

Il est sans biais s'il possède une espérance égale à λ.

(Q2) $E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda = \frac{1}{n} n\lambda = \lambda$.

Ainsi $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de λ.

(Q3) a) Soit $(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$

$L(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X = k_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda} \right) > 0.$

donc $\ln(L(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda))$ existe. Ainsi G est définie en $(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda)$.

G est bien définie sur $\mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$

$\forall (k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $G(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda} \right) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} - n\lambda$.

$\forall (k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $G(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i \right) \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(k_i!) - n\lambda$.

Alors $\forall (k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial G}{\partial \lambda}(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} k_i \times \frac{1}{\lambda} - n$ (existence claire!).

b) $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'(\lambda) = \frac{\partial G}{\partial \lambda}(k_1, k_2, \dots, k_n, \lambda) = \frac{n}{\lambda} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i - \lambda \right]$

1er cas.. $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.

Alors h est décroissante sur $]0, +\infty[$

2e cas.. $(k_1, k_2, \dots, k_n) \neq 0_{\mathbb{N}^n}$.

Alors h est croissante sur $\left]0, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i, +\infty\right[$

Notons que h admet un maximum sur $]0, +\infty[$ atteint en $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i$.

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$ est donc la valeur de λ qui rend maximum $\prod_{i=1}^{n} P(X=k_i)$.

Q4 $\forall (k_1,k_2,\dots,k_n,\lambda)\in \mathbb{N}^n\times \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial G}{\partial \lambda}(k_1,k_2,\dots,k_n,\lambda)=\sum_{i=1}^{n} k_i\times\frac{1}{\lambda}-n$

$\forall (k_1,k_2,\dots,k_n,\lambda)\in \mathbb{N}^n\times \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(k_1,k_2,\dots,k_n,\lambda)=-\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)\frac{1}{\lambda^2}$ (existence claire!).

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(X_1,X_2,\dots,X_n,\lambda)=\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\times\frac{1}{\lambda^2}=\frac{n}{\lambda^2}\overline{X_n}.$$

$$\underline{\underline{-\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(X_1,X_2,\dots,X_n,\lambda)=\frac{n}{\lambda^2}\overline{X_n}}}$$

$E\left(\frac{n}{\lambda^2}\overline{X_n}\right)=\frac{n}{\lambda^2}E(\overline{X_n})=\frac{n}{\lambda^2}\times\lambda=\frac{n}{\lambda}$.

L'espérance $I_n(\lambda)$ de $-\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(X_1,X_2,\dots,X_n,\lambda)$ est $\frac{n}{\lambda}$.

$X_1,X_2,\dots,X_n$ sont indépendantes et ont une variance égale à λ.

Alors $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ existe et vaut $n\lambda$.

Donc $V(\overline{X_n})$ existe et vaut $\frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ donc $\frac{\lambda}{n}$.

Alors $\underline{\underline{I_n(\lambda)=\frac{1}{V(\overline{X_n})}}}$.

R

Question 9 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$ ou FO J. HÉRY

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } x + y = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

Déterminer une base ainsi que la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels. Déterminer $F \cap G$ et $F \cup G$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer le noyau et l'image de f.

cours. Définition d'un estimateur et d'un estimateur sans biais.

Nous notons $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$(x,y,z) \in F \iff \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ z=-2x \end{cases}$.

$F = \{(x,-x,-2x) \,;\, x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-1,-2)) = \mathrm{Vect}(e_1-e_2-2e_3)$.

De plus $e_1-e_2-2e_3$ n'est pas nul.

$(e_1-e_2-2e_3)$ est une base de F. $\dim F = 1$.

G est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ donc $\dim G = 2$. De plus (e_1+e_2, e_2+e_3) est une famille libre de G dont le cardinal est 2.

(e_1+e_2, e_2+e_3) est une base de G.

$F \subset G$. $F \cap G = F$ et $F \cup G = G$.

$\mathrm{Im}\, f = f(\mathbb{R}^3) = f(\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_1+e_2, e_1-e_3, e_1-e_2-2e_3) = \mathrm{Vect}(e_1+e_2, e_1-e_3)$

$e_1-e_2-2e_3 = 2(e_1-e_3)-(e_1+e_2)$

(e_1+e_2, e_1-e_3) est libre.

Alors (e_1+e_2, e_1-e_3) est une base de $\mathrm{Im}\, f$. $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$.

Alors $\dim \mathrm{Ker}\, f = 3 - \dim \mathrm{Im}\, f = 1$. $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$

Or $f(e_1) = 2f(e_2) - f(e_3)$; $f(e_1-2e_2+e_3) = 0_E$. $e_1-2e_2+e_3$ est un élément non nul de $\mathrm{Ker}\, f$ qui est de dimension 1.

$(e_1-2e_2+e_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

C'est tout ?

HEC 2010 S 10

Sujet S 10 - Exercice

1) Question de cours : Enoncé du théorème de la limite centrée.
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, qui suit une loi de Poisson de paramètre λ inconnu strictement positif.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose d'un n-échantillon i.i.d. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de la loi de X.
On pose : $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X}_n = \dfrac{Y_n}{n}$.

2) **a)** Rappeler sans démonstration, la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y_n.
   b) Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre λ.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la loi conditionnelle du vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sachant l'événement $[Y_n = k]$ où $k \in \mathbb{N}^*$, ne dépend pas de λ.

4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $T_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.
   a) Quelle est la limite en loi de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$? On note T cette limite en loi.
   b) On admet que n est suffisamment grand pour approcher la loi de T_n par la loi de T. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
   Soit α un réel donné vérifiant $0 < \alpha < 1$, et t_α le réel strictement positif tel que :
$$\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$
   Déterminer un intervalle de confiance pour λ au risque α.

Sujet S 10 - Exercice sans préparation

Soit n un entier supérieur ou égal à deux. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que le rang de A est égal au rang de ${}^tA\,A$.

HEC 2010 S 10 Correction de l'exercice

(Q1) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, ayant même loi, ayant une espérance commune m et une variance commune σ^2 ($\sigma>0$).
On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.
La suite de terme général $S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n^* \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Notons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^* = \dfrac{S_n - nm}{\sqrt{n}\,\sigma}$.

(Q2) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la loi de Poisson de paramètre λ. Alors, d'après le cours, $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

Ainsi $E(Y_n) = n\lambda$ et $V(Y_n) = n\lambda$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\overline{X}_n = \frac{1}{n} Y_n$ donc $E(\overline{X}_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n}(n\lambda)$ donc λ.

$\overline{X}_n$ est donc un estimateur sans biais de λ.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $V(Y_n)$ existe et vaut $n\lambda$ donc $V(\overline{X}_n)$ existe et vaut $\frac{1}{n^2} n\lambda$ donc $\frac{\lambda}{n}$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant P(|\overline{X}_n - \lambda| \geqslant \varepsilon) = P(|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\lambda}{\varepsilon^2} \times \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\lambda}{\varepsilon^2} \times \dfrac{1}{n}\right) = 0$.
Par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\overline{X}_n - \lambda| \geqslant \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.
Alors $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à λ.
$\overline{X}_n$ est donc un estimateur sans biais et convergent de λ.

<u>Remarque</u>.. On aurait pu directement utiliser la loi faible des grands nombres pour montrer la convergence en probabilité de $(\overline{X_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la variable certaine égale à λ

(Q3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $P(Y_n=k)=\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}\neq 0$. $X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)=\mathbb{N}^n$.

Soit $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{N}^n$.

$$P_{\{Y_n=k\}}(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\})=\frac{1}{P(Y_n=k)}P(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\}\cap\{Y_n=k\}).$$

$$P_{\{Y_n=k\}}(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\})=\frac{1}{P(Y_n=k)}P(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\}\cap\{X_1+X_2+\dots+X_n=k\})$$

<u>1er cas</u>.. $x_1+x_2+\dots+x_n\neq k$

Alors $\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\}\cap\{X_1+X_2+\dots+X_n=k\}=\emptyset$.

donc $P_{\{Y_n=k\}}(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\})=0$.

<u>2ème cas</u>.. $x_1+x_2+\dots+x_n=k$

Alors $\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\}\cap\{X_1+X_2+\dots+X_n=k\}=\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\}$.

De plus, par indépendance : $P(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\})=P(X_1=x_1)P(X_2=x_2)\cdots P(X_n=x_n)$.

Donc $P(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\})=\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda}\times\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}e^{-\lambda}\times\dots\times\frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{x_1+x_2+\dots+x_n}}{x_1!x_2!\dots x_n!}e^{-n\lambda}$.

$$P(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\})=\frac{\lambda^k}{x_1!x_2!\dots x_n!}e^{-n\lambda}.$$

Donc $P(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\}\cap\{X_1+X_2+\dots+X_n=k\})=\frac{\lambda^k}{x_1!x_2!\dots x_n!}e^{-n\lambda}$

Alors $P_{\{Y=k\}}(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\})=\frac{1}{P(Y=k)}\times\frac{\lambda^k}{x_1!x_2!\dots x_n!}e^{-n\lambda}$. Or $Y_n\hookrightarrow\mathcal{P}(n\lambda)$.

donc $P_{\{Y=k\}}(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\})=\frac{1}{\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}}\frac{\lambda^k}{x_1!x_2!\dots x_n!}e^{-n\lambda}=\frac{k!}{n^k(x_1!x_2!\dots x_n!)}$.

Finalement si $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ est un élément quelconque de $X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)$:

$$P_{\{Y_n=k\}}(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\}\cap\dots\cap\{X_n=x_n\}) = \begin{cases} \dfrac{k!}{n^k(x_1!\,x_2!\dots x_n!)} & \text{si } x_1+x_2+\dots+x_n=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc la loi conditionnelle de $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ sachant l'événement $\{Y_n=k\}$ ne dépend pas de λ, et ceci pour tout $k\in\mathbb{N}^*$... et même pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Q4 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $T_n=\sqrt{n}\,\dfrac{\bar X_n-\lambda}{\sqrt\lambda} = \dfrac{n\bar X_n - n\lambda}{\sqrt n\sqrt\lambda} = \dfrac{Y_n-E(Y_n)}{\sqrt{n\lambda}} = \dfrac{Y_n-E(Y_n)}{\sqrt{V(Y_n)}}$ et

$Y_n=X_1+X_2+\dots+X_n$.

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$ indépendantes, de même loi (la loi de Poisson de paramètre λ) ayant une espérance commune λ et une variance commune $(\sqrt\lambda)^2$ $(\sqrt\lambda>0)$. Le théorème de la limite centrée montre alors que la suite de terme général $\dfrac{Y_n-E(Y_n)}{\sqrt{V(Y_n)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

b) Nous supposerons ici n suffisamment grand pour confondre les fonctions de répartition de T_n et T.

$\Phi(t_\alpha)=1-\dfrac{\alpha}{2}$. $\alpha = 2(1-\Phi(t_\alpha)) = 1-\Phi(t_\alpha)+1-\Phi(t_\alpha) = \Phi(-t_\alpha)+1-\Phi(t_\alpha)$.

Alors $\alpha = P(T_n\leq -t_\alpha)+P(T_n\geq t_\alpha) = P(|T_n|\geq t_\alpha)$.

$$\alpha = P\left(\left|\sqrt n\, \frac{\bar X_n-\lambda}{\sqrt\lambda}\right|\geq t_\alpha\right) \underset{t_\alpha>0}{=} P\left(n\,\frac{(\bar X_n-\lambda)^2}{\lambda}\geq t_\alpha^2\right) = P\left(\bar X_n^2 - 2\lambda\bar X_n + \lambda^2 \geq \frac{\lambda}{n}t_\alpha^2\right).$$

$$\alpha = P\left(\lambda^2 - \left(2\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{n}\right)\lambda + \overline{X}_n^2 \geq 0\right) = P\left(\lambda^2 - 2\left(\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{2n}\right)\lambda + \overline{X}_n^2 \geq 0\right).$$

$$\alpha = P\left(\left(\lambda - \overline{X}_n - \frac{t_\alpha^2}{2n}\right)^2 - \left(\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{2n}\right)^2 + \overline{X}_n^2 \geq 0\right).$$

$$\alpha = P\left(\left(\lambda - \overline{X}_n - \frac{t_\alpha^2}{2n}\right)^2 - \left(\frac{t_\alpha^2}{n}\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^4}{4n^2}\right) \geq 0\right).$$

$$1-\alpha = P\left(\left(\lambda - \overline{X}_n - \frac{t_\alpha^2}{2n}\right)^2 - \left(\frac{t_\alpha^2}{n}\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^4}{4n^2}\right) < 0\right)$$

$$1-\alpha = P\left(-\sqrt{\frac{t_\alpha^2}{n}\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^4}{4n^2}} < \lambda - \overline{X}_n - \frac{t_\alpha^2}{2n} < \sqrt{\frac{t_\alpha^2}{n}\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^4}{4n^2}}\right)$$

$$1-\alpha = P\left(\underbrace{\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{2n} - \sqrt{\frac{t_\alpha^2}{n}\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^4}{4n^2}}}_{U_n} < \lambda < \underbrace{\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{2n} + \sqrt{\frac{t_\alpha^2}{n}\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^4}{4n^2}}}_{V_n}\right)$$

Donc $1-\alpha = P(\lambda \in]U_n, V_n[)$. Or $\{\lambda \in]U_n, V_n[\} \subset \{\lambda \in [U_n, V_n]\}$.

Donc $P(\lambda \in [U_n, V_n]) \geq P(\lambda \in]U_n, V_n[) = 1-\alpha$. $P(\lambda \in [U_n, V_n]) \geq 1-\alpha$.

Ainsi $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance de λ à la confiance $1-\alpha$ ou au risque α. Pour finir donnons une "autre forme" à U_n et V_n.

$$V_n = \overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{2n} + \sqrt{\frac{t_\alpha^2}{n}\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^4}{4n^2}} = \overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{2n} + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{4n}}.$$

$$V_n = \frac{t_\alpha^2}{4n} + \overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{4n} + 2\,\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{4n}} = \left(\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{4n}}\right)^2.$$

$$U_n = \overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{2n} - \sqrt{\frac{t_\alpha^2}{n}\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^4}{4n^2}} = \overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{2n} - 2\,\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{4n}} = \frac{t_\alpha^2}{4n} + \overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{4n} - 2\,\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{4n}}.$$

$$U_n = \left(\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} - \sqrt{\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{4n}}\right)^2.$$

Donc $\left[\left(\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} - \sqrt{\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{4n}}\right)^2, \left(\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} - \sqrt{\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{4n}}\right)^2\right]$ est un intervalle de confiance de λ au risque α.

Remarque.- Retrouver Q4 b dans une ESP HEC 2009.

R...

Question 10 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$ W. MARTUCCI

n est un entier supérieur ou égal à deux. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que le rang de A est égal au rang de ${}^tAA$.

Posons $E = \mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit f (resp. g) l'endomorphisme de E de matrice A (resp. ${}^tAA$) dans la base $\mathcal{B}$.

Soit u un élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$.

* Supposons que u est élément de $\operatorname{Ker} f$. Alors $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

${}^tAAX = {}^tA\,0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$; donc $g(u) = 0_E$; $u \in \operatorname{Ker} g$.

* Supposons que u est élément de $\operatorname{Ker} g$. Alors ${}^tAAX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Donc ${}^tX\,{}^tA\,A\,X = {}^tX\,0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0$. ${}^t(AX)\,AX = 0$. $\langle AX, AX\rangle = 0$.

$\|AX\|^2 = 0$. $\|AX\| = 0$. $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $u \in \operatorname{Ker} f$.

Finalement $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

Alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} g = \operatorname{rg} g = \operatorname{rg} {}^tAA$.

$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tAA$.

Exercice... Et si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$?

Sujet S 11 - Exercice

1) Question de cours : Dans une série statistique associée à un échantillon, définition de la moyenne empirique et de la variance empirique.

On observe conjointement deux caractères quantitatifs X et Y sur un échantillon de taille n ($n \geqslant 2$) d'une population.
Ces observations sont donc constituées par un n-uplet $\big((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\big)$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$. A chaque individu k de $[\![1, n]\!]$, on associe le couple d'observations (x_k, y_k) de $\mathbb{R}^2$. On suppose que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, avec $i \neq j$, on a : $x_i \neq x_j$ et $y_i \neq y_j$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles qui, à tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, associe :

$$f(a,b) = \sum_{k=1}^{n} \big(y_k - (ax_k + b)\big)^2.$$

a) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

b) Ecrire le système d'équations (S) permettant de déterminer les points critiques de f.

c) On pose : $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$. Etablir la formule : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(x_k - \overline{x}\big)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - n\overline{x}^2$.

En déduire que : $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - n\overline{x}^2 > 0$.

d) Résoudre le système (S). En déduire que f admet un unique point critique, noté $(\hat{a}, \hat{b})$.

e) Montrer que f admet un minimum local en $(\hat{a}, \hat{b})$. Est-ce un minimum global pour f ?

3) On note $r_{x,y}$ le coefficient de corrélation linéaire de X et Y. Montrer que : $|r_{x,y}| \leqslant 1$.

Sujet S 11 - Exercice sans préparation

Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que :
$2A^4 - 2A^3 + I = 0$ (I désigne la matrice identité d'ordre p et 0 la matrice nulle carrée d'ordre p).

1) Déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels la matrice $A + \dfrac{n}{n^2+1} I$ est inversible.

2) Existe-t-il un entier naturel n tel que $((n^2+1)A^2 + nA)^n = B$ où B est la matrice carrée d'ordre p définie par $B = \begin{pmatrix} n & n & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ n & n & \ldots & n \end{pmatrix}$?

R.

HEC 2010 S11 Correction de l'exercice

(Q1) Soit $(x_i, n_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une série statistique associée à un échantillon.

La moyenne empirique est $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$ où $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$.

La variance empirique est $v_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2$ où $v_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \bar{x}^2$

(Q2) Notons que l'on redémontre un résultat de cours.

a) f est une fonction polynôme donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

b) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \sum_{k=1}^{n} 2(-x_k)(y_k-(ax_k+b))$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \sum_{k=1}^{n} 2(-1)(y_k-(ax_k+b))$.

$$\nabla f(a,b) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \iff \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} 2(-x_k)(y_k-(ax_k+b)) = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} 2(-1)(y_k-(ax_k+b)) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(a,b) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} 0 = \sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - ax_k - b) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - b\sum_{k=1}^{n} x_k \\ 0 = \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b) = \sum_{k=1}^{n} y_k - a\sum_{k=1}^{n} x_k - nb \end{cases}$$

$$\nabla f(a,b) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)a + nb = \sum_{k=1}^{n} y_k \end{cases}$$

<u>Le système (S) permettant de déterminer les points critiques de f est</u>

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)a + nb = \sum_{k=1}^{n} y_k \end{cases}$$

c) $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_k^2-2x_k\bar{x}+\bar{x}^2) = \sum_{k=1}^{n}x_k^2 - 2\bar{x}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}x_k}_{n\bar{x}} + n\bar{x}^2 = \sum_{k=1}^{n}x_k^2 - 2\bar{x}(n\bar{x}) + n\bar{x}^2$

Alors $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{n}x_k^2 - n\bar{x}^2$.

$\forall k\in[\![1,n]\!], (x_k-\bar{x})^2\geqslant 0$ donc $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\geqslant 0$.

Supposons que $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2=0$ alors $\forall k\in[\![1,n]\!], (x_k-\bar{x})^2=0$ (car pour tout $k\in[\![1,n]\!], (x_k-\bar{x})^2\geqslant 0$). Donc $\forall k\in[\![1,n]\!], x_k-\bar{x}=0$.

$\forall k\in[\![1,n]\!], x_k=\bar{x}$. Alors $x_1=x_2=\cdots=x_n$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\geqslant 0$ et $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\neq 0$. Ainsi $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2>0$

donc $\sum_{k=1}^{n}x_k^2-n\bar{x}^2>0$.

Notons que l'hypothèse $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2, i\neq j \Rightarrow x_i\neq x_j$ est trop forte. On peut se contenter de $x_1,x_2,\dots,x_n$ non tous égaux.

d) Posons, comme "d'habitude", $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k$, $\sigma_{x,y}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_ky_k-\bar{x}\bar{y}$ et

$\sigma_x^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\bar{x}^2$. Notons que $\sigma_x^2>0$ d'après ce qui précède.

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(a,b)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)a+\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)b=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\\ \left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)a+nb=\sum_{k=1}^{n}y_k\end{cases}$$

En divisant chaque équation par n il vient

$$\nabla f(a,b)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)a+\bar{x}b=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\\ \bar{x}a+b=\bar{y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\sigma_x^2+\bar{x}^2)a+\bar{x}b=\sigma_{xy}+\bar{x}\bar{y}\\ b=\bar{y}-a\bar{x}\end{cases}$$

$$\nabla f(a,b)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\bar{y}-a\bar{x}\\ \sigma_{xy}+\bar{x}\bar{y}=(\sigma_x^2+\bar{x}^2)a+\bar{x}(\bar{y}-a\bar{x})=\sigma_x^2a+\bar{x}\bar{y}\end{cases} \underset{\sigma_x^2>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}b=\bar{y}-a\bar{x}\\ a=\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\end{cases}$$

f admet un point critique $(\hat{a}, \hat{b})$ et un seul. $\begin{cases} \hat{a} = \dfrac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} \\ \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} \end{cases}$

e) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -2\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - a x_k - b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = -2\sum_{k=1}^{n}(y_k - a x_k - b)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = 2\sum_{k=1}^{n} 1 = 2n$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = 2\sum_{k=1}^{n} x_k$.

"$rt - s^2$" $= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{a},\hat{b})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\hat{a},\hat{b})\right)^2 = 4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \times n - 4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$.

"$rt - s^2$" $= 4n\left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{1}{n}(n\bar{x})^2\right] = 4n\left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n\bar{x}^2\right] \underset{\uparrow c)}{>} 0$.

de plus $r = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq 0$.

le cours indique alors que f admet en $(\hat{a}, \hat{b})$ un minimum local. minimum global ?? →

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Posons $\alpha = a - \hat{a}$ et $\beta = b - \hat{b}$. Posons $\Delta(a,b) = f(a,b) - f(\hat{a},\hat{b})$.

$\Delta(a,b) = \sum_{k=1}^{n}\left[(y_k - a x_k - b)^2 - (y_k - \hat{a}x_k - \hat{b})^2\right]$.

$\Delta(a,b) = \sum_{k=1}^{n}\left[(y_k - a x_k - b - y_k + \hat{a}x_k + \hat{b})(y_k - a x_k - b + y_k - \hat{a}x_k - \hat{b})\right]$.

$\Delta(a,b) = \sum_{k=1}^{n}\left[(-\alpha x_k - \beta)(2y_k - x_k(a+\hat{a}) - b - \hat{b})\right]$.

$\Delta(a,b) = \sum_{k=1}^{n}\left[(-\alpha x_k - \beta)(2y_k - x_k(2\hat{a}+\alpha) - (2\hat{b}+\beta))\right]$.

$\Delta(a,b) = \sum_{k=1}^{n}\left[(-\alpha x_k - \beta)(-\alpha x_k - \beta + 2(y_k - \hat{a}x_k - \hat{b}))\right]$.

$\Delta(a,b) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha x_k + \beta)^2 + 2\sum_{k=1}^{n}\left[(\alpha x_k + \beta)(\hat{a}x_k + \hat{b} - y_k)\right]$.

or $\sum_{k=1}^{n}\left[(\alpha x_k+\beta)(\hat{a}x_k+\hat{b}-\hat{y}_k)\right]=\alpha\Big[\underbrace{(\sum_{k=1}^{n}x_k^2)\hat{a}+(\sum_{k=1}^{n}x_k)b-\sum_{k=1}^{n}x_ky_k}_{=0}\Big]+\beta\Big[\underbrace{(\sum_{k=1}^{n}x_k)\hat{a}+n\hat{b}-\sum_{k=1}^{n}y_k}_{=0}\Big]$

$\to$ $(\hat{a},\hat{b})$ est solution de (S).

Alors $\Delta(a,b)=\sum_{k=1}^{n}(\alpha x_k+\beta)^2\geqslant 0$. donc $f(a,b)-f(\hat{a},\hat{b})\geqslant 0$; $f(a,b)\geqslant f(\hat{a},\hat{b})$.

$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $f(a,b)\geqslant f(\hat{a},\hat{b})$. f admet un minimum global en (a,b).

Exercice.. "Retrouver" ce résultat en utilisant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.

Q3) Rappel.. $r_{x,y}=\dfrac{\sigma_{x,y}}{\sqrt{\sigma_x^2\sigma_y^2}}$. $\quad r_{x,y}^2=\dfrac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_x^2\,\sigma_y^2}$.

Remarque.. $\sigma_y^2>0$ car $y_1,y_2,\dots,y_n$ ne sont pas tous égaux (voir Q2 c)).

$f(\hat{a},\hat{b})=\sum_{k=1}^{n}(y_k-\hat{a}x_k-\hat{b})^2\geqslant 0$. Rappelons que $\hat{b}=\bar{y}-a\bar{x}$.

$\sum_{k=1}^{n}(y_k-\hat{a}x_k-\hat{b})^2=\sum_{k=1}^{n}(y_k-\hat{a}x_k-\bar{y}+a\bar{x})^2=\sum_{k=1}^{n}\left((y_k-\bar{y})-\hat{a}(x_k-\bar{x})\right)^2$

$f(\hat{a},\hat{b})=\sum_{k=1}^{n}(y_k-\bar{y})^2-2\hat{a}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\bar{y})(x_k-\bar{x})+\hat{a}^2\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2$.

$f(\hat{a},\hat{b})=n\Big[\sigma_y^2-2\hat{a}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\bar{y})(x_k-\bar{x})}_{\sigma_{x,y}}+\hat{a}^2\sigma_x^2\Big]$. Rappelons que $\hat{a}=\dfrac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2}$.

$f(\hat{a},\hat{b})=n\left[\sigma_y^2-2\dfrac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2}\times\sigma_{x,y}+\dfrac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_x^4}\sigma_x^2\right]=n\left[\sigma_y^2-\dfrac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_x^2}\right]$.

$f(\hat{a},\hat{b})=n\sigma_y^2\left[1-\dfrac{\sigma_{x,y}^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}\right]=n\sigma_y^2(1-r_{x,y}^2)$. Or $f(\hat{a},\hat{b})\geqslant 0$ et $n\sigma_y^2>0$.

donc $1-r_{x,y}^2\geqslant 0$. $r_{x,y}^2\leqslant 1$. Ainsi $|r_{x,y}|\leqslant 1$.

R·

Question 11 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $2A^4 - 2A^3 + I = 0$ (I désigne la matrice identité d'ordre p et 0 la matrice nulle carrée d'ordre p).

Q1. Déterminer l'ensemble des entiers n de $\mathbb{Z}$ pour lesquels la matrice $A + \dfrac{n}{n^2+1} I$ est inversible.

Q2. Existe-t-il un entier naturel n tel que $\left((n^2+1)A^2 + nA\right)^n = B$ où B est la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à n ?

Q1 $\operatorname{Sp} A \subset \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^4 - 2x^3 + 1 = 0\}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 8x^3 - 6x^2 = 8x^2\left(x - \frac{3}{4}\right)$

f est croissante sur $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty, \frac{3}{4}\right]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{101}{128} > 0$. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^4 - 2x^3 + 1 = 0\} = \emptyset$.

A n'a pas de valeur propre dans $\mathbb{R}$. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $A - \lambda I$ est inversible.

Donc $\forall n \in \mathbb{Z}$, $A + \frac{n}{n^2+1} I$ est inversible. En particulier A est inversible ($n = 0$ ...)

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$. $A + \frac{n}{n^2+1} I$ et A sont inversibles.

Donc $A^2 + \frac{n}{n^2+1} A$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles.

Comme $n^2 + 1 \neq 0$ $(n^2+1)A^2 + nA$ est inversible.

$\left((n^2+1)A^2 + nA\right)^n$ est alors inversible (clair pour $n = 0$ et $n = 1$; si $n \geq 2$: produit de n matrices inversibles).

Comme $p \geq 2$, $B = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$ n'est pas inversible(*). On ne peut donc pas avoir

$\left((n^2+1)A^2 + nA\right)^n = B$.

La réponse est NON.

(*) $\operatorname{rg} B = 1 < p \ldots$

HEC 2010 S 12

Sujet S 12 - Exercice

1) Question de cours : Coefficient de corrélation linéaire ; définition et propriétés.
   Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$, des réels non nuls donnés.
2) Soit f la fonction définie sur $(\mathbb{R}^*)^n$ par $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$, et soit D l'ensemble des solutions dans $(\mathbb{R}^*)^n$ de l'équation : $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 1$.
   a) Montrer que la restriction f_1 de f à D admet un unique point critique que l'on déterminera.
   b) Etablir qu'en ce point critique, la fonction f_1 admet un minimum global.
3) Soit $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, n variables aléatoires discrètes indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et soit θ un paramètre réel non nul inconnu. On suppose que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}(Z_j) = \theta . a_j$ et $\mathbb{V}(Z_j) = 1$, où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent respectivement l'espérance et la variance.

   On pose : $X_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j Z_j$, où $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ désigne un n-uplet de réels non nuls quelconques.
   a) Déterminer la relation que doivent satisfaire $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ pour que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$, on ait : $\mathbb{E}(X_n) = \theta$.
      On suppose dans la suite que cette condition est vérifiée.
   b) Calculer en fonction de $a_1, a_2, \dots, a_n$, les valeurs $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_n^*$ de $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, pour lesquelles $\mathbb{V}(X_n)$ est minimale.
4) On pose : $X_n^* = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^* Z_j$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, des réels non nuls tels que $Y_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$ soit un estimateur sans biais de θ. On note ρ le coefficient de corrélation linéaire de X_n^* et Y_n.
   a) Montrer que $\rho > 0$.
   b) Si $\rho = 1$, que peut-on en déduire sur les variables aléatoires X_n^* et Y_n ?

Sujet S 12 - Exercice sans préparation

Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ engendré par la famille $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ où $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E. En déduire la dimension de E.
2) Soit D l'application définie sur E par :

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{D}(f) = f' - f''$$

   où f' et f'' désignent les dérivées première et seconde de f.
   Montrer que D est un endomorphisme de E et écrire sa matrice M dans la base $\mathscr{B}$.
3) M est-elle inversible ? diagonalisable ?

HEC 2010 S12 Correction de l'exercice

(Q1) X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui possèdent une variance non nulle. ↑ programme oblige...

- le coefficient de corrélation du couple (X,Y) est le réel noté $\rho_{X,Y}$ et égal à $\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\,\sqrt{V(Y)}}$.
- $|\rho_{X,Y}| \leq 1$
- $|\rho_{X,Y}| = 1$ si et seulement X (resp. Y) est une fonction quasi affine de Y (resp. X).

donc $|\rho_{X,Y}| = 1 \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P(X = aY+b) = 1$.

$|\rho_{X,Y}| = 1 \iff \exists (a',b') \in \mathbb{R}^2,\ P(Y = a'X+b') = 1$.

(Q2) On comprendra qu'il s'agit d'optimisation de f sous la contrainte $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 1$.

Posons $\Omega = (\mathbb{R}^*)^n$. $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ et $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 1\}$.

$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. donc $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ comme réunion de deux ouverts de $\mathbb{R}$.

Alors Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ comme produit de n ouverts de $\mathbb{R}$.

g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

f est de classe C^1 sur l'ouvert Ω car f est polynomiale.

Posons $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} g$. Pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}^\perp = \operatorname{Vect}(\nabla g(x))$ donc $\mathcal{B}^\perp = \operatorname{Vect}(a_1, a_2, \dots, a_n)$

car $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(x) = a_k$.

un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$ est un point x de $\mathcal{C} \cap \Omega$ tel que $\nabla f(x) \in \mathcal{B}^\perp$. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$x \in \mathcal{C} \cap \Omega \text{ et } \nabla f(x) \in \mathcal{B}^\perp \iff \begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \neq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 1 \\ (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n) \in \operatorname{Vect}((a_1, a_2, \dots, a_n)) \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \iff \begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \neq 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ 2x_i = \lambda a_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 1 \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \neq 0 \text{ et } x_i = \frac{\lambda}{2} a_i \\ 1 = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\lambda}{2} a_j = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \end{cases}$$

$(1) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda = \dfrac{2}{\sum_{j=1}^n a_j^2} \\ \forall i \in [\![1,n]\!], x_i \neq 0 \text{ et } x_i = \frac{1}{2} \dfrac{2}{\sum_{j=1}^n a_j^2} a_i \end{cases} \iff \begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!], x_i \neq 0 \text{ et} \\ x_i = \dfrac{a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2} \end{cases}$

$\sum_{j=1}^n a_j^2 \neq 0$ ← $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont non nuls.

$(1) \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \; x_i = \dfrac{a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}$.

<u>Ainsi f admet un unique point critique dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$ ou sous la contrainte $\sum_{j=1}^n a_j x_j = 1$: $A = \left(\frac{a_1}{S}, \frac{a_2}{S}, \dots, \frac{a_n}{S}\right)$ où $S = \sum_{j=1}^n a_j^2$.</u>

<u>b)</u> Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{B} \cap \Omega$.

Notons que $f(A) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{S}\right)^2 = \frac{1}{S^2} \sum_{i=1}^n a_i^2 = \frac{1}{S^2} S = \frac{1}{S}$.

$1 = 1^2 \underset{X \in \Omega}{=} \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j\right)^2 \underset{\text{Cauchy-Schwarz dans } \mathbb{R}^n}{\leq} \left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right) = S f(X)$. Comme $S > 0$: $f(X) \geq \frac{1}{S} = f(A)$.

$A \in \Omega \cap \mathcal{B}$ et $\forall X \in \Omega \cap \mathcal{B}, f(X) \geq f(A)$.

<u>f admet un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}$ ou sous la contrainte $\sum_{j=1}^n a_j x_j = 1$ en son unique point critique dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.</u>

Q3 <u>a)</u> $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $E(Z_j)$ existe et vaut θa_j.

Mais $E(X_n)$ existe et vaut $\sum_{j=1}^n \beta_j E(Z_j)$ donc $\sum_{j=1}^n (\beta_j \theta a_j)$.

$E(X_n) = \theta \iff \theta = \theta \sum_{j=1}^n \beta_j a_j \underset{\theta \neq 0}{\iff} \sum_{j=1}^n a_j \beta_j = 1$.

<u>$E(X_n) = \theta$ si et seulement si $\sum_{j=1}^n a_j \beta_j = 1$</u>

b) 1) Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $V(Z_j)$ existe et vaut 1.

2) $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sont indépendantes.

Alors 1) Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $V(\beta_j Z_j)$ existe et vaut β_j^2.

2) $\beta_1 Z_1, \beta_2 Z_2, \ldots, \beta_n Z_n$ sont indépendantes.

Par conséquent $V(X_n)$ existe et $V(X_n) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^2$.

Comme $\sum_{j=1}^{n} a_j \beta_j = 1$ et que $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in (\mathbb{R}^{n})^{n}$, $V(X_n)$ est minimale si et seulement

si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\beta_i = \dfrac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}$.

Les valeurs $\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_n^*$ de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ pour lesquelles $V(X_n)$ est minimale sont

$\frac{a_1}{S}, \frac{a_2}{S}, \ldots, \frac{a_n}{S}$ où $S = \sum_{j=1}^{n} a_j^2$. La valeur minimale de $V(X_n)$ est $\frac{1}{S} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}$.

Q4 a) . Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, Z_i et Z_j possèdent un moment d'ordre 2 donc $\operatorname{cov}(Z_i, Z_j)$ existe.

. $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ possèdent un moment d'ordre 2. Il en est donc de même pour

$X_n^* = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^* Z_j$ et $Y_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$. Alors $\operatorname{cov}(X_n^*, Y_n)$ existe.

De plus $\operatorname{cov}(X_n^*, Y_n) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^* Z_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i^* \alpha_j \operatorname{cov}(Z_i, Z_j)$

Or $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\operatorname{cov}(Z_i, Z_j) = \begin{cases} V(Z_i) & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ car $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sont indépendantes.

Alors $\operatorname{cov}(X_n^*, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^* \alpha_i V(Z_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S} \alpha_i \times 1 = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = \frac{1}{S}$ car

$Y_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$ est un estimateur sans biais de θ donc $\theta = E(Y_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j E(Z_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j \theta$

et ainsi $\sum_{j=1}^{n} a_j \alpha_j = 1$ ... comme nous l'avons déjà vu dans Q3 a)

Donc $\operatorname{cov}(X_n^*, Y_n) = \frac{1}{S}$ et $S = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 > 0$. Alors $\operatorname{cov}(X_n^*, Y_n) > 0$.

Par conséquent $\rho = \dfrac{\mathrm{cov}(X_n^*, Y_n)}{\sqrt{V(X_n^*)}\sqrt{V(Y_n)}} > 0$. $\rho > 0$.

▼ Remarque. Nous venons de voir que $\mathrm{cov}(X_n^*, Y_n) = \frac{1}{S}$ avec $S = \sum_{j=1}^{n} a_j^2$.

Or $V(X_n^*) = \sum_{j=1}^{n} (\beta_j^*)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{S}\right)^2 = \frac{1}{S^2} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 = \frac{1}{S}$.

donc $\rho = \dfrac{1/S}{\sqrt{1/S}\sqrt{V(Y_n)}} = \dfrac{1}{\sqrt{S}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2}}$. ▲

b) Supposons que $\rho = 1$. Alors $\sqrt{S}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2} = 1$; $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 = \frac{1}{S}$. $V(Y_n) = \frac{1}{S}$.

Rappelons que $V(X_n)$ a pour valeur minimale $\frac{1}{S}$ et $V(X_n)$ est minimale si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = \beta_i^*$.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = \beta_i^*$. Ainsi $Y_n = X_n^*$.

R..

Question 12 HEC 2010 $\boxed{\text{F 1}}$ ATTIAS et ALLAIN

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ où $f_k : x \to x^k e^{-x}$ pour k dans $\mathbb{N}$.

Q1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E. En déduire la dimension de E.

Q2. Soit D l'application définie sur E par $\forall f \in E,\ D(f) = f' - f''$ où f' et f'' désignent les dérivées première et seconde de f.

Montrer que D est un endomorphisme de E et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

Q3. M est-elle inversible ? diagonalisable ?

Q1.. Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0_{\mathcal{F}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $0 = \alpha_0 e^{-x} + \alpha_1 x e^{-x} + \alpha_2 x^2 e^{-x} + \alpha_3 x^3 e^{-x} = e^{-x}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = 0$. Le polynôme $\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3$ est le polynôme nul. Alors $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

$\mathcal{B}$ est alors une famille libre et génératrice de E. $\mathcal{B}$ est une base de E. $\dim E = 4$.

Q2 • $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in E^2$, $D(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' - (\lambda f + g)'' = \lambda f' + g' - \lambda f'' - g'' = \lambda(f' - f'') + g' - g'' = \lambda D(f) + D(g)$.

D est linéaire.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0'(x) = -e^{-x}$. $\forall k \in [\![1,3]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) = e^{-x}(k x^{k-1} - x^k)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0''(x) = e^{-x}$ et $f_1''(x) = e^{-x}(x-2)$. $\forall k \in [\![2,3]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k''(x) = e^{-x}\left(k(k-1)x^{k-2} - 2k x^{k-1} + x^k\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $D(f_0)(x) = -2e^{-x} = -2 f_0(x)$; $D(f_0) = -2 f_0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $D(f_1)(x) = e^{-x}(1-x) - e^{-x}(x-2) = 3e^{-x} - 2x e^{-x} = 3 f_0(x) - 2 f_1(x)$

$D(f_1) = 3 f_0 - 2 f_1$

$\forall k \in [\![2,3]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $D(f_k)(x) = e^{-x}(k x^{k-1} - x^k) - e^{-x}\left(k(k-1)x^{k-2} - 2k x^{k-1} + x^k\right)$.

$\forall k \in [\![2,3]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $D(f_k)(x) = -k(k-1) f_{k-2}(x) + 3k f_{k-1}(x) - 2 f_k(x)$

$\forall k \in [\![2,3]\!]$, $D(f_k) = -k(k-1) f_{k-2} + 3k f_{k-1} - 2 f_k$ ... ou $D(f_2) = -2 f_0 + 6 f_1 - 2 f_2$ et

$D(f_3) = -6 f_1 + 9 f_2 - 2 f_3$.

Notons que $\forall k \in [\![0,3]\!]$, $D(f_k) \in \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3) = E$.

Soit $f \in E$. $\exists (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{R}^4$, $f = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k f_k$.

$D(f) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k D(f_k)$ car D est linéaire.

$D(f) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k D(f_k) \in \mathrm{Vect}(D(f_0), D(f_1), D(f_2), D(f_3)) \subset \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3) = E$.

<u>D est une application de E dans E.</u>

Ceci achève de montrer que <u>D est un endomorphisme de E.</u>

(Q3) Posons $A = M_{\mathcal{B}}(D)$. D'après ce qui précède $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

A est triangulaire supérieure.

$\mathrm{Sp} A = \{-2\}$.

0 n'est pas valeur propre de A donc <u>A est inversible.</u>

Supposons A diagonalisable. Alors $M_{4,1}(\mathbb{R}) = SEP(A,-2)$.

Donc $4 = \dim M_{4,1}(\mathbb{R}) = \dim SEP(A,-2) = 4 - \mathrm{rg}(A+2I_4)$.

$\mathrm{rg}(A+2I_4) = 0$. Alors $A + 2I_4 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. $A = -2I_4$!!

<u>A n'est pas diagonalisable.</u>

Question de cours. Coefficient de corrélation : définition et propriétés.