HEC 2009 S1

Sujet S 1 - Exercice

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$. On considère la variable aléatoire T définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par :

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \,/\, S_n \geqslant 1\}.$$

1) Question de cours : Densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
2) On admet dans cette question que : $\mathbb{P}([S_n < 1]) = \dfrac{1}{n!}$ pour $n \geqslant 2$.
   a) Que vaut $\mathbb{P}([T = 1])$?
   b) Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'événement $[T = n]$ en fonction des événements $[S_n \geqslant 1]$ et $[S_{n-1} < 1]$.
   c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la valeur de $\mathbb{P}([T = n])$.
   d) Établir l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(T)$; calculer $\mathbb{E}(T)$.
3) a) Déterminer une densité de la variable aléatoire S_2.

   (*) b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une densité f_{S_n} de la variable aléatoire S_n est donnée par :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j} (x-j)^{n-1} & \text{si} \quad x \in [k-1, k], (1 \leqslant k \leqslant n) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0, n] \end{cases}$$

   c) En déduire que $\mathbb{P}([S_n < 1]) = \dfrac{1}{n!}$.

Sujet S 1 - Exercice sans préparation

Soit $(E, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$. Soit f et g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

(*)(*) 1) Prouver qu'il existe un endomorphisme ϕ de E ayant des valeurs propres positives tel que $f = \phi^2$ (ϕ^2 désigne $\phi \circ \phi$).

2) Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g.$$

(*) On peut se contenter de montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, S_n possède une densité f_n qui vérifie $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f_n(x) = 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. C'est suffisant et beaucoup moins difficile que Q 3 b.

(*)(*) Il est préférable de dire "Prouver qu'il existe un endomorphisme symétrique ..."

(Q1) X et Y sont deux variables aléatoires à densités sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes.
f (resp. g) est une densité de X (resp. Y).

* Si $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)\,dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points :

1) $X+Y$ est une variable aléatoire à densité
2) h en est une densité.

<u>Remarque</u>. Si x est dans $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t)\,dt$ sont de même nature et en cas d'existence elles sont égales.

* Si f est bornée ou si g est bornée :

1) $X+Y$ est une variable aléatoire à densité
2) $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)\,dt$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

(Q2) a) $P(T=1) = P(S_1 \geqslant 1) = P(U_1 \geqslant 1) = 0$ car $U_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

b) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.

$\{T=n\} = \{S_1 < 1\} \cap \{S_2 < 1\} \cap \dots \cap \{S_{n-1} < 1\} \cap \{S_n \geqslant 1\}$

Or $\forall k \in [\![1, n-2]\!]$, $\{S_{n-1} < 1\} \subset \{S_{n-2} < 1\} \subset \dots \subset \{S_1 < 1\}$

car les variables aléatoires U_i prennent leurs valeurs dans $[0,1]$.

donc $\underline{\underline{\{T=n\} = \{S_{n-1} < 1\} \cap \{S_n \geqslant 1\}}}$.

c) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$

$\{S_{n-1} < 1\} = \{S_{n-1} < 1\} \cap \{S_n < 1\} \cup \{S_{n-1} < 1\} \cap \{S_n \geqslant 1\}$.

par incompatibilité $P(S_{n-1} < 1) = P(\{S_{n-1} < 1\} \cap \{S_n < 1\}) + P(\{S_{n-1} < 1\} \cap \{S_n \geqslant 1\})$.

$P(S_{n-1} < 1) = P(S_n < 1) + P(\{S_{n-1} < 1\} \cap \{S_n \geqslant 1\}) = P(S_n < 1) + P(T=n)$.

$\{S_n < 1\} \subset \{S_{n-1} < 1\}$

Alors $P(T=n) = P(S_{n-1} < 1) - P(S_n < 1) = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \quad P(T=n) = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$. Notons que ceci vaut aussi pour $n = 1$!

d) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![, \quad n P(T=n) = n\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) = \frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$.

La série de terme général $\frac{1}{(n-2)!}$ converge donc la série de terme général $n P(T=n)$ converge. Comme elle est à termes positifs elle est absolument convergente. Alors <u>T possède une espérance</u>.

$E(T) = \sum_{n=2}^{+\infty} n P(T=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. $\quad \underline{E(T) = e}$.

$\underset{P(T=1)=0}{\uparrow}$

(Q3) a) • U_1 et U_2 sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ indépendantes

• Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f est une densité de U_1 et de U_2 et f est bornée.

Alors 1) $S_2 = U_1 + U_2$ est une variable aléatoire à densité.

2) $h_2 : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t)\, dt$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $h_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t)\, dt = \int_0^1 f(x-t)\, dt \underset{u=x-t}{=} -\int_x^{x-1} f(u)\, du = \int_{x-1}^{x} f(u)\, du$.

1) $x \in]-\infty, 0[$. f est nulle sur $[x-1, x]$. $h_2(x) = 0$

2) $x \in]2, +\infty[$. f est nulle sur $[x-1, x]$. $h_2(x) = 0$

3) $x \in [0, 1]$. f est nulle sur $[x-1, 0[$ et vaut 1 sur $[0, x]$

$h_2(x) = \int_0^x 1\, du = x$.

4) $x \in]1, 2]$. f est nulle sur $]1, x]$ et vaut 1 sur $[x-1, 1]$.

$h_2(x) = \int_{x-1}^{1} 1\, du = 1 - (x-1) = 2 - x$.

la fonction h_2 définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_2(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in [0,1] \\ 2-x \text{ si } x \in]1,2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une densité de S_2

▼ <u>Remarque</u>.. $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_2(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in [0,1] \\ 2-x \text{ si } x \in [1,2] \\ 0 \text{ si } x \notin [0,2] \end{cases}$. Notons que h_2 est continue sur $\mathbb{R}$. ▲

b) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j} (x-j)^{n-1} \text{ si } x \in [k-1,k] \ (1 \leq k \leq n) \\ 0 \quad \text{si } x \notin [0,n] \end{cases}$

▼ <u>Remarque</u>. Supposons $n \in [\![2,+\infty[\![$. Notons que la définition de φ_n est cohérente. Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. $\varphi_n(k)$ a "deux" valeurs . celle de l'intervalle $[k-1,k]$ qui est $\dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n}{j} (k-j)^{n-1}$ et celle de l'intervalle $[k, k+1]$ qui est $\dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} (k-j)^{n-1}$. Or le dernier terme de la seconde somme vaut 0 donc les "deux" valeurs de $\varphi_n(k)$ sont les mêmes. ▲

Nous allons montrer par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, S_n est une variable aléatoire à densité admettant φ_n pour densité.

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-1)!} \displaystyle\sum_{j=0}^{0} (-1)^j \binom{1}{j} (x-j)^{1-1} \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \quad \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Pas de doute $S_1 = U_1$ est une variable aléatoire à densité et φ_1 en est une densité. La propriété est vraie pour $n=1$.

<u>Exercice</u>.. Notez qu'elle est vraie pour $n=2$ (aisé avec Q3 a) !).

* Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$S_{n+1} = S_n + U_{n+1}$

- S_n est une variable aléatoire à densité de densité φ_n.
- U_{n+1} est une variable aléatoire à densité de densité f et f est bornée.
- $U_1, U_2, \dots, U_n, U_{n+1}$ sont indépendantes donc $U_1+\dots+U_n$ et U_{n+1} sont indépendantes

Ainsi S_n et U_{n+1} sont indépendantes.

<u>Dans ces conditions</u> | 1) S_{n+1} est une variable aléatoire à densité.
$h_{n+1} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} (t)\,(x-t)\,dt$ est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Il ne reste plus qu'à calculer h_{n+1}...

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\underline{h_{n+1}(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_n(x-t)\,dt = \int_0^1 \varphi_n(x-t)\,dt \underset{u=x-t}{=} \int_x^{x-1} \varphi_n(u)(-du) = \underline{\int_{x-1}^{x} \varphi_n(u)\,du}$.

<u>1er cas</u>.. $x \in]-\infty, 0[$. Alors φ_n est nulle sur $[x-1, x]$ donc $h_{n+1}(x) = 0 = \varphi_{n+1}(x)$.

<u>2ème cas</u>.. $x \in]n+1, +\infty[$. Alors φ_n est nulle sur $[x-1, x]$ car $x-1 > n$. Ainsi $h_{n+1}(x) = 0 = \varphi_{n+1}(x)$.

<u>3ème cas</u>.. $x \in [0, n+1]$. Alors il existe un entier k appartenant à $[\![1, n+1]\!]$ tel que

$x \in [k-1, k]$. φ_n est nulle sur $]-\infty, 0[$.

<u>i) $k=1$</u>. $x \in [0,1]$. Alors $h_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} \varphi_n(u)\,du = \int_0^x \varphi_n(u)\,du$.

Or si $u \in [0, x]$, $u \in [0,1]$ donc $\varphi_n(u) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{1-1} (-1)^j \binom{n}{j}(u-j)^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} u^{n-1}$.

donc $h_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(u)\,du = \int_0^x \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\,du = \left[\frac{u^n}{n!}\right]_0^x = \frac{x^n}{n!}$.

Mais comme $x \in [0,1]$, $\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1-1)!}\sum_{j=0}^{1-1} (-1)^j \binom{n+1}{j}(x-j)^{(n+1)-1} = \frac{1}{n!} x^n$. $h_{n+1}(x) = \varphi_{n+1}(x)$.

ii) $k \in [\![2, n]\!]$. $x \in [k-1, k]$ donc $x-1 \in [k-2, k-1]$.

Alors $h_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} \varphi_n(u)\,du = \int_{x-1}^{k-1}\varphi_n(u)\,du + \int_{k-1}^{x}\varphi_n(u)\,du$.

$$h_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{k-1} \frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\binom{n}{j}(u-j)^{n-1}du + \int_{k-1}^{x}\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{n}{j}(u-j)^{n-1}du.$$

$$h_{n+1}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\binom{n}{j}\left[\frac{(u-j)^n}{n}\right]_{x-1}^{k-1} + \frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{n}{j}\left[\frac{(u-j)^n}{n}\right]_{k-1}^{x}$$

Alors $h_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\binom{n}{j}(k-1-j)^n - \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\binom{n}{j}(x-1-j)^n + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{n}{j}(x-j)^n \,\underline{-}$

$$\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{n}{j}(k-1-j)^n.$$

Remarque que le dernier terme de la dernière somme est nulle ; elle est donc égale à la première somme. Ainsi ces deux sommes "s'éliminent". En faisant un petit changement d'indice dans la deuxième somme il vient :

$$h_{n+1}(x) = \frac{-1}{n!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j-1}\binom{n}{j-1}(x-j)^n + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{n}{j}(x-j)^n.$$

premier terme de la seconde somme

$$h_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j\left[\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right](x-j)^n + \frac{1}{n!}(-1)^0\binom{n}{0}(x-0)^n.$$

$$h_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j\binom{n+1}{j}(x-j)^n + \frac{1}{n!}x^n = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{n+1}{j}(x-j)^n = \varphi_{n+1}(x).$$

$x \in [k-1, k]$

iii) $k = n+1$. $x \in [n, n+1]$ et $x-1 \in [n-1, n]$. φ_n est nulle sur $]n, x]$.

Ainsi $h_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x}\varphi_n(u)\,du = \int_{x-1}^{n}\varphi_n(u)\,du = \int_{x-1}^{n}\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}(u-j)^{n-1}du.$

$$h_{n+1}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}\left[\frac{(u-j)^n}{n}\right]_{x-1}^{n} = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}\left[(n-j)^n - (x-1-j)^n\right]$$

$h_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^n - \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}(x-1-j)^n$. Effectuons les changements d'indice $j \leftarrow n-j$ dans la première somme et $j \leftarrow j-1$ dans la seconde en remarquant que $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$

$h_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^n - \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j-1}(x-j)^n.$

Rappelons que $\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n+1}{j}(x-j)^n$ car $x \in [n, n+1]$.

Alors $\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}x^n + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\left[\binom{n}{j}+\binom{n}{j-1}\right](x-j)^n$.

$\varphi_{n+1}(x) = \underbrace{\frac{1}{n!}x^n + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(x-j)^n} - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j-1}(x-j)^n.$

$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(x-j)^n - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j-1}(x-j)^n.$

Alors $h_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^n + \varphi_{n+1}(x) - \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(x-j)^n.$

Posons $\mathcal{G} = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(X-j)^n$ et $T = \mathcal{G}(0) - \mathcal{G}$.

$\mathcal{G}(0) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(-j)^n \underset{(-1)^j=(-1)^{-j}}{=} \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^n = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^n.$

Ainsi $h_{n+1}(x) = \varphi_{n+1}(x) + \mathcal{G}(0) - \mathcal{G}(x) = \varphi_{n+1}(x) + T(x)$.

Nous allons montrer que T est le polynôme nul. Le coefficient constant de $\mathcal{G}$ est $\mathcal{G}(0)$. Donc le coefficient constant de T est nul. Notons t_i le coefficient de X^i dans T et ceci pour tout $i \in [\![0,n]\!]$. $t_0 = 0$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$T = \mathcal{G}(0) - \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(X-j)^n.$

Alors $t_n = -\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\times 1 = -\frac{1}{n!}(1-1)^n = 0$. $t_n = 0$.

$\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $t_i = -\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n}{i}(-j)^{n-i} = -\frac{1}{n!}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^{n-i}.$

$\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $t_i = 0 \iff \forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^{n-i} = 0$

$\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $t_i = 0 \underset{i \leftarrow n-i}{\iff} \forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^{i} = 0$.

montrons que $\forall i\in [\![0,n-1]\!]$, $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^i=0$

__Version 1__ Version "pavoîte". Le nombre de surjections d'un ensemble de i éléments dans un ensemble de n éléments est $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}j^i$. Prenons i dans $[\![1,n-1]\!]$, le nombre de surjections d'un ensemble de i éléments dans un ensemble de n éléments est 0 car $i<n$. Ainsi $0=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}j^i=(-1)^n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{-j}j^i \underset{\uparrow}{=}(-1)^n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^jj^i$.
Alors $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^jj^i=0$, ceci pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$. $(-1)^{-j}=(-1)^j$

__Version 2__.. A la main ! Nous allons montrer par récurrence sur i que :
$$\forall i\in\mathbb{N}^*,\ \forall n'\in[\![i+1,+\infty[\![,\ \sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^i=0$$ ce qui redonnera le résultat.

- $i=1$. Soit $n'\in[\![i+1,+\infty[\![$. $n'\in[\![2,+\infty[\![$.

$$\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^i=\sum_{\underline{\underline{j=1}}}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j=\sum_{j=1}^{n'}(-1)^j\underbrace{\frac{n'}{j}\binom{n'-1}{j-1}}_{\binom{n'}{j}}j=n'\sum_{j=1}^{n'}(-1)^j\binom{n'-1}{j-1}.$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n'}{j}j^i\underset{\substack{\uparrow\\ j\leftarrow j+1}}{=}n'\sum_{j=0}^{n'-1}(-1)^{j+1}\binom{n'-1}{j}=-n'\sum_{j=0}^{n'-1}(-1)^j\binom{n'-1}{j}=-n'(-1+1)^{n'-1}\overset{n'\geq 2}{\underset{\downarrow}{=}}0.$$

La propriété est donc vraie pour $i=1$.

- Supposons la propriété vraie pour un élément i de $\mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $i+1$.
Par hypothèse $\forall n'\in[\![i+1,+\infty[\![$, $\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^i=0$. On veut montrer que $\forall n'\in[\![i+2,+\infty[\![$, $\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^{i+1}=0$. Soit $n'\in[\![i+2,+\infty[\![$.

$$\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^{i+1}=\sum_{\underline{\underline{j=1}}}^{n'}(-1)^j\,j\binom{n'}{j}j^i=\sum_{j=1}^{n'}(-1)^jn'\binom{n'-1}{j-1}j^i.$$

$\binom{n'}{j}=\frac{n'}{j}\binom{n'-1}{j-1}$ si $j\in[\![1,n']\!]$.

$$\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^{i+1}=n'\sum_{j=1}^{n'-1}(-1)^j\left[\binom{n'}{j}-\binom{n'-1}{j}\right]j^i+n'(-1)^{n'}n'^i \quad \text{car } \binom{n'-1}{j-1}=\binom{n'}{j}-\binom{n'-1}{j} \text{ pour } j\in[\![1,n'-1]\!]$$

$$\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^{i+1}=n'\sum_{j=1}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^i-n'\sum_{j=1}^{n'-1}(-1)^j\binom{n'-1}{j}j^i+n'(-1)^{n'}n'^i.$$

$$\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^{i+1}=n'\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^i-n'\sum_{j=0}^{n'-1}(-1)^j\binom{n'-1}{j}j^i.$$

[a regroupé la première somme et le dernier terme

le terme "$j=0$" vaut 0.

$n'\geqslant i+2$ donc $n'\geqslant i+1$ et $n'-1\geqslant i+1$. En appliquant la propriété à l'ordre i pour n' et $n'-1$ on a : $\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^i=\sum_{j=0}^{n'-1}(-1)^j\binom{n'-1}{j}j^i=0$.

Ainsi $\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^{i+1}=0$. Ceci achève la récurrence.

Ainsi $\forall i\in\mathbb{N}^*, \forall n'\in[\![i+1,+\infty[\![$, $\sum_{j=0}^{n'}(-1)^j\binom{n'}{j}j^i=0$. donc $\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^i=0$

Reprenons alors notre calcul. Nous avons montré que $t_0=t_n=0$. De plus :

$\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $t_i=0$ d'après tout ce qui précède alors $T=0_{\mathbb{R}[X]}$.

Donc $h_{n+1}(x)=\varphi_{n+1}(x)+T(x)=\varphi_{n+1}(x)$.

Ce qui achève de montrer que si $x\in[n,n+1]$, $h_{n+1}(x)=\varphi_{n+1}(x)$.

Cela achève aussi de montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $h_{n+1}(x)=\varphi_{n+1}(x)$.

Alors $h_{n+1}=\varphi_{n+1}$. Ceci achève la récurrence commencée p. 3 !!

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, S_n est une variable aléatoire à densité et φ_n en est une densité.

Donc pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, S_n est une variable aléatoire à densité et la fonction f_{S_n} définie par $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_{S_n}(x)=\begin{cases}\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{n}{j}(x-j)^{n-1} & \text{si } x\in[k-1,k]\ (1\leqslant k\leqslant n)\\ 0 & \text{si } x\notin[0,n]\end{cases}$ en est une densité.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(S_n<1)=\int_{-\infty}^{1} f_{S_n}(x)dx=\int_0^1 f_{S_n}(x)dx=\int_0^1 \frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{0-1}(-1)^j\binom{n}{j}(x-j)^{n-1}dx$.

$P(S_n<1)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1=\frac{1}{n!}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(S_n<1)=\frac{1}{n!}$.

Remarques 1.. On avait juste besoin de f_{S_n} sur $]-\infty,1]$. Donc on aurait pu se contenter de montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, S_n est une variable aléatoire à densité qui possède une densité f_{S_n} qui vérifie $\forall x\in]-\infty,0[$, $f_{S_n}(x)=0$ et $\forall x\in[0,1]$, $f_{S_n}(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. C'est très simple à faire ... par récurrence ..

2.. Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $U'_n=1-U_n$ et $S'_n=\sum_{k=1}^{n}U'_k$. $\forall n\in\mathbb{N}^*, S'_n=\sum_{k=1}^{n}(1-U_k)=n-S_n$.
$(U'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est encore une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Ainsi soit $n\in\mathbb{N}^*$ S'_n a même loi que S_n. Or $S'_n=n-S_n$.

Donc f_{S_n} et $x\mapsto f_{S_n}(n-x)$ sont deux densités de S_n. Or comme nous l'avons aperçu f_{S_n} est continue sur $[0,n]$. Alors $x\mapsto f_{S_n}(n-x)$ est continue sur $[0,n]$.

Donc f_{S_n} et $x\mapsto f_{S_n}(n-x)$ sont deux densités continues sur $[0,n]$ de S_n.

Alors $\forall x\in[0,n]$, $f_{S_n}(x)=f_{S_n}(n-x)$.

En particulier $\forall x\in[n-1,n]$, $f_{S_n}(x)=f_{S_n}(n-x)\overset{n-x\in[0,1]}{=}\frac{1}{(n-1)!}(n-x)^{n-1}$.

Cette remarque constitue sans doute une piste intéressante pour rendre plus simple le point iii) de la récurrence ...

R.

Question 1 **HEC 2009-1**

Soit $(E, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$. Soit f et g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

Q1. Prouver qu'il existe un endomorphisme ϕ de E ayant sdes valeurs propres positives tel que $f = \phi^2$ (ϕ^2 désigne $\phi \circ \phi$).

Q2. Montrer que $\operatorname{Ker}(f+g) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.

On traitera le cas général où les valeurs propres de f et de g sont des réels positifs ou nuls. On ajoutera ϕ symétrique !

Q1 f est un endomorphisme symétrique de E donc f est diagonalisable. Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$.

$\mathrm{Sp} f=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$. Alors $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\alpha_k\geqslant 0$. Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\phi(e_k)=\sqrt{\alpha_k}\,e_k$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\phi^2(e_k)=(\sqrt{\alpha_k})^2 e_k=\alpha_k e_k=f(e_k)$.

Ainsi ϕ^2 et f sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$. Alors $\phi^2=f$. La matrice de ϕ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est une matrice diagonale donc symétrique. Alors ϕ est symétrique.

$\mathrm{Sp}\,\phi=\mathrm{Sp}\,M_{\mathcal{B}}(\phi)=\mathrm{Sp}\,\mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1},\sqrt{\alpha_2},\dots,\sqrt{\alpha_n})$. Ainsi les valeurs propres de ϕ sont positives.

<u>Il existe un endomorphisme symétrique ϕ de E ayant des valeurs propres positives tel que $\phi^2=f$.</u>

<u>Remarque</u>.. De même il existe un endomorphisme symétrique ψ de E ayant des valeurs propres positives tel que $\psi^2=g$.

Q2 Soit $x\in E$.

- Supposons que $x\in\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Ker} g$. $f(x)=g(x)=0_E$. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=0_E$. $x\in\operatorname{Ker}(f+g)$.
- Réciproquement supposons que $x\in\operatorname{Ker}(f+g)$. $f(x)+g(x)=0_E$. $f(x)=-g(x)$.

$$\|\phi(x)\|^2=\langle\phi(x),\phi(x)\rangle\underset{\uparrow\ \phi\text{ est symétrique}}{=}\langle x,\phi^2(x)\rangle=\langle x,f(x)\rangle=-\langle x,g(x)\rangle=-\langle x,\psi^2(x)\rangle\underset{\uparrow\ \psi\text{ est symétrique}}{=}-\langle\psi(x),\psi(x)\rangle=-\|\psi(x)\|^2$$

$0\leqslant\|\phi(x)\|^2=-\|\psi(x)\|^2\leqslant 0$. $\|\phi(x)\|^2=\|\psi(x)\|^2=0$. $\|\phi(x)\|=\|\psi(x)\|=0$. $\phi(x)=\psi(x)=0_E$.

Alors $f(v) = \varphi^2(v) = \varphi(\varphi(v)) = \varphi(0_E) = 0_E$ et $g(w) = \psi^2(w) = \psi(\psi(w)) = \psi(0_E) = 0_E$.

donc $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g$.

Finalement $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g$. et ceci pour tout x dans E.

donc $\underline{\underline{\mathrm{Ker}(f \cap g) = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g}}$.

<u>Exercice</u> Montrer l'unicité de ϕ (ϕ symétrique à valeurs propres positives tel que $\varphi^2 = f$ ...).

HEC 2009 S 3

1) Question de cours : Donner la définition et les principales propriétés d'une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

   On admettra que si f est convexe sur I et $(x, y, z) \in I^3$, alors

$$f(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z) \leqslant \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) + \frac{1}{3}f(z).$$

2) Soient a, b et c trois réels strictement positifs, montrer que :

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

   En déduire que :

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

   en posant $(a', b', c') = (1/a, 1/b, 1/c)$,

3) Soient a_0, b_0 et c_0 trois réels strictement positifs. On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$ par les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \\[2ex] b_{n+1} = (a_n b_n c_n)^{\frac{1}{3}} \\[2ex] c_{n+1} = \dfrac{3}{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{c_n}} \end{cases}$$

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les réels a_n, b_n et c_n sont bien définis et $0 < c_n \leqslant b_n \leqslant a_n$.
   b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$ sont monotones et que les trois suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes. On note λ, μ et ν leurs limites respectives.
   c) Montrer que $\lambda = \mu = \nu$.

      $n \geqslant 1$

   d) On cherche maintenant à montrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est toujours monotone.
      i) Soient x, y et z trois réels, tels que $0 < x < y < z$. On note :

$$\begin{cases} s = x + y + z \\ d = xy + xz + yz \\ p = xyz \end{cases}$$

         Montrer que $ps^3 - d^3$ est du signe de $xz - y^2$.
         (on pourra remarquer que $ps^3 - d^3 = -(yz - x^2)(zx - y^2)(xy - z^2)$).
      ii) En appliquant le résultat précédent à a_1, b_1 et c_1, montrer que $b_3 - b_2$ est du signe de $b_2 - b_1$. Conclure.

Sujet S 3 - Exercice sans préparation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille de n variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω, indépendantes et de même loi .
On définit la variable aléatoire :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'espérance $\mathbb{E}(e^{xS_n})$ existe et $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}([S_n \geqslant a]) \leqslant e^{-ax}\mathbb{E}(e^{xS_n})$.
2) Appliquer ce résultat au cas où chaque X_i suit la loi définie par :

$$\mathbb{P}([X_i = 1]) = p, \ \ \mathbb{P}([X_i = -1]) = 1 - p.$$

(Q1) I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une application de I dans $\mathbb{R}$.

- f convexe sur I

$\Updownarrow$ $\forall (x,y)\in I^2,\ \forall \lambda\in[0,1],\ f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

$\Updownarrow$ $\forall a\in I,\ x\mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I-\{a\}$

- On suppose que f est dérivable sur I

f convexe sur I

$\Updownarrow$ f' est croissante sur I

$\Updownarrow$

$\forall (a,x)\in I^2,\ f(x)\geq (x-a)f'(a)+f(a)$.

- On suppose que f est deux fois dérivable sur I

f convexe sur I

$\Updownarrow$ $\forall x\in I,\ f''(x)\geq 0$

(Q2) * Posons $g=-\ln$. g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ g''(x)=\dfrac{1}{x^2}\geq 0$.

g est donc convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3,\ g\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)\leq \dfrac{g(a)+g(b)+g(c)}{3}$.

$\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3,\ \ln\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)\geq \dfrac{\ln a+\ln b+\ln c}{3}=\ln\sqrt[3]{abc}$.

voir à la fin une preuve qui n'utilise pas $g\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\leq\frac{g(a)+g(b)+g(c)}{3}$

donc $\underline{\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3,\quad \dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}}$.

Soit $(a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$. Alors $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$ donc $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c}}>0$

donc $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\dfrac{1}{\sqrt[3]{abc}}>0$. Alors $\sqrt[3]{abc}\geq\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

$\forall (a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3,\quad \dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\leq\sqrt[3]{abc}\leq\dfrac{a+b+c}{3}$

<u>Exercice</u>.. Généraliser.

(Q3) a) Montrons par récurrence que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, a_n, b_n, c_n sont définis et strictement positifs.

- c'est clair pour $n=0$.
- Supposons que la propriété est vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

a_n, b_n, c_n sont définis et strictement positifs.

Alors $\dfrac{3}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}}$, $\sqrt[3]{a_n b_n c_n}$ et $\dfrac{a_n+b_n+c_n}{3}$ sont définis et strictement positifs.

Ainsi a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} sont définis et strictement positifs. Ceci achève la récurrence.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, a_n, b_n et c_n sont définis et strictement positifs.

Alors d'après Q 2 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \dfrac{3}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}} \leq \sqrt[3]{a_n b_n c_n} \leq \dfrac{a_n+b_n+c_n}{3}$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < c_{n+1} \leq b_{n+1} \leq a_{n+1}$ ou $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < c_n \leq b_n \leq a_n$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, les éléments a_n, b_n et c_n sont bien définis et $0 < c_n \leq b_n \leq a_n$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(a_n+b_n+c_n) - a_n = \frac{1}{3}\underbrace{(b_n-a_n)}_{\leq 0} + \frac{1}{3}\underbrace{(c_n-a_n)}_{\leq 0} \leq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} \leq a_n$. $(a_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante et minorée par 0 ; elle est donc convergente.

Alors $(a_n)_{n\geq 0}$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $c_{n+1} - c_n = \dfrac{3}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}} - c_n = c_n \left[\dfrac{\frac{3}{c_n}}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}} - 1 \right]$.

$0 < c_n \leq b_n \leq a_n$ donc $0 < \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{c_n}$.

Alors $0 < \frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n} \leq \frac{3}{c_n}$; $\dfrac{\frac{3}{c_n}}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}} \geq 1$ et $c_n > 0$.

Alors $c_{n+1} - c_n = c_n \left[\dfrac{\frac{3}{c_n}}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}} - 1 \right] \geq 0$; $c_{n+1} \geq c_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} \geq c_n$. $(c_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_n \leq a_n \leq a_1$ donc $(c_n)_{n\geq 1}$ est majorée par a_1.

$(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Ainsi $(c_n)_{n\geq 1}$ converge. Alors $(c_n)_{n\geq 0}$ converge.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+b_n+c_n)$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n=3a_{n+1}-a_n-c_n$.

Alors la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ converge comme combinaison linéaire de trois suites convergentes.

c) En passant à la limite dans les relations de récurrence il vient :

$\lambda=\frac{1}{3}(\lambda+\mu+\nu)$, $\mu=\sqrt[3]{\lambda\mu\nu}$ et $\nu=\dfrac{3}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}}$ car $\lambda\geq\mu\geq\nu>0$

($\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0<c_1\leq c_n\leq b_n\leq a_n$ donc $0<c_1\leq\nu\leq\mu\leq\lambda$ donc $\lambda\geq\mu\geq\nu>0$).

Ainsi $2\lambda=\mu+\nu$, $\mu^3=\lambda\mu\nu$, $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\nu}$.

$2\lambda=\mu+\nu$, $\mu^2=\lambda\nu$ et $\nu=\dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$.

$\mu^2=\lambda\nu=\frac{\mu+\nu}{2}\nu$; $2\mu^2=\mu\nu+\nu^2$; $0=2\mu^2-\mu\nu-\nu^2=(\mu-\nu)(2\mu+\nu)$.

Comme $2\mu+\nu>0$: $\mu=\nu$. Alors $2\lambda=\mu+\nu=2\mu$; $\lambda=\mu$.

Finalement $\lambda=\mu=\nu$.

d) i) Remarque.. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

$(a+b+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3b^2c+6abc+$
$3ac^2+3bc^2+c^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$.

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$.

$ps^3=xyz(x+y+z)^3=xyz(x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz)$

$ps^3=x^4yz+xy^4z+xyz^4+3x^3y^2z+3x^3z^2y+3y^3x^2z+3y^3z^2x+3z^3x^2y+3z^3y^2x+6x^2y^2z^2$.

$d^3=(xy+yz+zx)^3=x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+3x^2y^2yz+3x^2y^2zx+3y^2z^2xy+3y^2z^2zx+3z^2x^2xy+$

$3z^2x^2yz+6xyyzzx$.

$d^3=x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+3x^2y^3z+3x^3y^2z+3xy^3z^2+3xy^2z^3+3x^3yz^2+3x^2yz^3+6x^2y^2z^2$.

Alors $ps^3-d^3=x^4yz+xy^4z+xyz^4-x^3y^3-y^3z^3-z^3x^3$.

$ps^3-d^3=(x^2-yz)(x^2yz-x(y^3+z^3)+y^2z^2)=(x^2-yz)(y^2-xz)(-xy+z^2)$

Ainsi $p\sigma^3 - d^3 = (x^2-yz)(y^2-xz)(z^2-xy)$.

$$\underline{\underline{p\sigma^3 - d^3 = -(yz-x^2)(xz-y^2)(xy-z^2)}}.$$

ii) Appliquons plutôt le résultat à a_n, b_n, c_n en ayant fixé n dans $\mathbb{N}^*$

$a_n+b_n+c_n = 3a_{n+1}$. $a_nb_nc_n = b_{n+1}^3$.

$$c_{n+1} = \frac{3}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}} = \frac{3a_nb_nc_n}{a_nb_n+b_nc_n+c_na_n} \; ; \quad a_nb_n+b_nc_n+c_na_n = \frac{3b_{n+1}^3}{c_{n+1}}$$

Mais d'après i) : $\begin{cases} x \leftarrow c_n \\ y \leftarrow b_n \\ z \leftarrow a_n \end{cases}$

$$\underbrace{b_{n+1}^3(3a_{n+1})^3 - \left(\frac{3b_{n+1}^3}{c_{n+1}}\right)^3}_{\alpha_n} = \underbrace{\overset{(4)}{-}\overset{(1)}{(b_na_n-c_n^2)}\overset{(2)}{(a_nc_n-b_n^2)}\overset{(3)}{(b_nc_n-a_n^2)}}_{\beta_n}.$$

$$\alpha_n = \frac{27}{c_{n+1}^3}\left[(a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1})^3 - b_{n+1}^9\right] = \frac{27}{c_{n+1}^3}\left[\left(b_{n+2}^3\right)^3 - b_{n+1}^9\right]$$

$\alpha_n = \frac{27}{c_{n+1}^3}\left(b_{n+2}^9 - b_{n+1}^9\right)$. α_n est du signe de $b_{n+2}^9 - b_{n+1}^9$ donc du signe de

$b_{n+2}-b_{n+1}$ car $x \mapsto x^9$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\beta_n = \underbrace{\frac{1}{b_n}}_{>0}\;\underbrace{\overset{(2)}{(a_nb_nc_n - b_n^3)}}_{=b_{n+1}^3-b_n^3}\;\underbrace{(b_na_n-c_n^2)}_{\geqslant 0 \;\; (1)}\;\underbrace{(a_n^2-b_nc_n)}_{\geqslant 0 \;\; (4)\times(3)} \quad \leftarrow \text{car } 0 < c_n \leqslant b_n \leqslant a_n.$$

Distinguons deux cas.

<u>1er cas</u> $\beta_n \neq 0$. Alors $b_na_n - c_n^2$ et $a_n^2 - b_nc_n$ sont strictement positifs donc

β_n est du signe de $b_{n+1}^3 - b_n^3$ donc du signe de $b_{n+1}-b_n$.

Comme $\alpha_n = \beta_n$: $b_{n+2}-b_{n+1}$ est du signe de $b_{n+1}-b_n$.

<u>2e cas.</u> $\beta_n = 0$. Ainsi $\alpha_n = 0$ donc $b_{n+2} = b_{n+1}$.

Alors $b_{n+2}-b_{n+1} = 0$. On peut encore dire que

$b_{n+2}-b_{n+1}$ est du signe de $b_{n+1}-b_n$.

Donc pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $b_{n+2}-b_{n+1}$ est du signe de $b_{n+1}-b_n$.

Alors $(b_{n+1}-b_n)_{n\geqslant 1}$ est de signe constant.

Ainsi $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est toujours monotone.

<u>Remarque</u> -- $(b_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas toujours monotone. Pour $a_0=1$, $b_0=5$ et $c_0=1$

On a $b_1 \simeq 1{,}71$ et $b_2=1{,}76$ donc $b_0>b_1$ et $b_1<b_2$.

<u>Retour sur Q.2</u> $g=-\ln$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $g(x)\geqslant g'(1)(x-1)+g(1)$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $-\ln x\geqslant -(x-1)+0$; $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln x\leqslant x-1$.

Posons $S=\dfrac{a+b+c}{3}$. $\ln\dfrac{a}{S}\leqslant\dfrac{a}{S}-1$, $\ln\dfrac{b}{S}\leqslant\dfrac{b}{S}-1$, $\ln\dfrac{c}{S}\leqslant\dfrac{c}{S}-1$.

Alors $\ln\dfrac{a}{S}+\ln\dfrac{b}{S}+\ln\dfrac{c}{S}\leqslant\dfrac{a+b+c}{S}-3=\dfrac{3S}{S}-3=0$

Donc $\ln\left(\dfrac{abc}{S^3}\right)\leqslant 0$; $\dfrac{abc}{S^3}\leqslant 1$ et $S^3>0$. $abc\leqslant S^3$.

Alors $\sqrt[3]{abc}\leqslant\sqrt[3]{S^3}=S$. $\sqrt[3]{abc}\leqslant\dfrac{a+b+c}{3}$.

Question 3 HEC 2009-3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille de n variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω, indépendantes et de même loi .

On définit la variable aléatoire : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Q1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'espérance $E(e^{xS_n})$ existe et $\forall a \in \mathbb{R}$, $P([S_n \geqslant a]) \leqslant e^{-ax}\, E(e^{xS_n})$.

Q2. Appliquer ce résultat au cas où chaque X_i suit la loi définie par : $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = 1 - p$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que $E(e^{xS_n})$ existe. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$\{S_n \geqslant a\} = \{x S_n \geqslant a x\} = \{e^{x S_n} \geqslant e^{ax}\}$.

e^{xS_n} possède une espérance, prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $e^{ax} \in \mathbb{R}_+^*$

l'inégalité de Markov donne : $P(S_n \geqslant a) = P(e^{xS_n} \geqslant e^{ax}) \leqslant \dfrac{E(e^{xS_n})}{e^{ax}}$.

$P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-ax} E(e^{xS_n})$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. e^{xS_n} est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs donc $E(e^{xS_n})$ existe.

$E(e^{xS_n}) = E(e^{xX_1} e^{xX_2} \cdots e^{xX_n}) \underset{\text{indépendance}}{=} E(e^{xX_1}) E(e^{xX_2}) \cdots E(e^{xX_n})$.

$E(e^{xX_i}) = e^{-x}(1-p) + e^{x} p$ (théorème de transfert). $E(e^{xS_n}) = \left((1-p)e^{-x} + p e^{x}\right)^n$

Soit $a \in \mathbb{R}$. $P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-ax} \left((1-p)e^{-x} + p e^{x}\right)^n$.

HEC 2009 S4

Sujet S 4 - Exercice

Si $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4$, on pose $M(a)=\begin{pmatrix}0&0&0&a_1\\0&0&0&a_2\\0&0&0&a_3\\a_1&a_2&a_3&a_4\end{pmatrix}$.

On note F le sous-ensemble de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ constitué des matrices $M(a)$ quand a parcourt $\mathbb{R}^4$.

On note $J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n.

a) Question de cours : Rappeler la définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille $(x_1,\dots,x_p)$ de vecteurs de E. Dans quel cas la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est-elle une base de $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)$?

b) Soient E_1 de base $(x_1,\dots,x_p)$ et E_2 de base $(y_1,\dots,y_q)$ deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E_1\cap E_2=\{0_E\}$. Montrer que la famille $(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$ est libre. Qu'en déduit-on sur $p+q$?

2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et en donner la dimension.

3) Soit (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Pour $i\in[\![1,4]\!]$, on pose $M_i=M(e_i)$. Montrer que $\forall i\in[\![1,4]\!]$, la matrice M_i+J est inversible et que la famille $(M_i+J)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ est libre.

4) Soit $a\in\mathbb{R}^4$. Montrer que si pour tout réel θ non nul, la matrice $M(a)+\theta J$ est non inversible, alors $a=(0,0,0,0)$.

5) Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui ne contient aucune matrice inversible et tel que $J\in G$.

a) Déterminer $G\cap F$ et en déduire que la dimension de G est inférieure ou égale à 12.

b) Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de dimension 12 ne contenant aucune matrice inversible et contenant J ?

Sujet S 4 - Exercice sans préparation

Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, de loi binomiale de paramètres n et p avec $p\in]0,1[$.

1) Montrer que pour $a>0$ fixé, $\mathbb{P}([X_n\leqslant a])$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) Montrer que si $b>0$,

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right]\right)\leqslant\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}\min(\sqrt{p(1-p)},b\sqrt{n})$$

Qu'en déduit-on pour $\mathbb{P}([|X_n-np|\leqslant nb])$ quand n tend vers $+\infty$?

R.

Q1 a) $Vect(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Si $u \in E$: $u \in Vect(x_1, x_2, \dots, x_p) \iff \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ u = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k$.

$(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est une base de $Vect(x_1, x_2, \dots, x_p)$ si et seulement si cette famille est libre.

b) Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ et soit $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q) \in \mathbb{K}^q$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^{q} \beta_k y_k = 0_E. \quad \text{Alors} \quad \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k = -\sum_{k=1}^{q} \beta_k y_k.$$

Or $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k \in E_1$, $-\sum_{k=1}^{q} \beta_k y_k \in E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

donc $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_k = 0_E$ et $-\sum_{k=1}^{q} \beta_k y_k = 0_E$. Les familles $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_q)$ étant libres on a : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 0$.

Ceci achève de montrer que $(x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q)$ est libre.

$(x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q)$ est une famille libre de cardinal $p+q$ de E.

Alors $p+q \leq \dim E$. Donc $\underline{p+q \leq n}$.

Q2 * $F \subset \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

* $0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})} = M(0_{\mathbb{R}^4}) \in F$ donc F n'est pas vide.

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient M et N deux éléments de F.

$\exists a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4,\ M = M(a)$ et $\exists b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4,\ N = M(b)$.

$$\lambda M + N = \lambda M(a) + M(b) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda M + N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda a_1 + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda a_2 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda a_3 + b_3 \\ \lambda a_1 + b_1 & \lambda a_2 + b_2 & \lambda a_3 + b_3 & \lambda a_4 + b_4 \end{pmatrix}.$$

Posons $c = (\lambda a_1 + b_1, \lambda a_2 + b_2, \lambda a_3 + b_3, \lambda a_4 + b_4)$. $c \in \mathbb{R}^4$ et $\lambda M + N = M(c)$.

Donc $\lambda M + N \in F$. Ceci achève de montrer que $\underline{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$

Soit $M \in M_4(\mathbb{R})$

$M \in F \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^4,\ M = M(a) \Leftrightarrow \exists (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4,\ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$

$$M \in F \Leftrightarrow \exists (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4,\quad M = a_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M \in F \Leftrightarrow \exists (a_1, a_2, a_3, a_4),\ M = a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3 + a_4 M_4.$

<u>$F = \mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3, M_4)$.</u> (M_1, M_2, M_3, M_4) est une famille génératrice de F.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \alpha_4 M_4 = 0_{M_4(\mathbb{R})}$

Alors $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = 0_{M_4(\mathbb{R})}$. donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Ainsi (M_1, M_2, M_3, M_4) est une famille libre de F.

Finalement <u>(M_1, M_2, M_3, M_4) est une base de F.</u> <u>$\dim F = 4$.</u>

(Q3) * Un peu plus pour le même prix ! Soit $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4$.

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Posons $N(a)=M(a)+J$.

$$N(a)X=0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&a_1\\0&1&0&a_2\\0&0&1&a_3\\a_1&a_2&a_3&a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+a_1t=0\\y+a_2t=0\\z+a_3t=0\\a_1x+a_2y+a_3z+a_4t=0\end{cases}$$

$$N(a)X=0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-a_1t\\y=-a_2t\\z=-a_3t\\(-a_1^2-a_2^2-a_3^2+a_4)t=0\end{cases}$$

1er cas... $-a_1^2-a_2^2-a_3^2+a_4\neq0$.

Alors $N(a)X=0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\x=0\\y=0\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow X=0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$. $N(a)$ est inversible.

2ième cas... $-a_1^2-a_2^2-a_3^2+a_4=0$.

$$N(a)X=0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-a_1t\\y=-a_2t\\z=-a_3t\end{cases}$$

Alors $\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\\1\end{pmatrix}\neq0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ et $N(a)\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\\1\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$; $N(a)$ n'est pas inversible.

Ainsi $\forall a=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{R}^4$: $M(a)+J$ inversible $\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2=a_4$.

$1^2+0^2+0^2\neq0$, $0^2+1^2+0^2\neq0$, $0^2+0^2+1^2\neq0$, $0^2+0^2+0^2\neq1$.

Ainsi les matrices $M(e_1)+J$, $M(e_2)+J$, $M(e_3)+J$ et $M(e_4)+J$ sont inversibles.

Pour tout i dans $[\![1,4]\!]$, $M_i+J=M(e_i)+J$ est inversible.

Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\sum_{i=1}^{4}\alpha_i(M_i+J)=0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$.

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}.$$

La quatrième colonne de la matrice de gauche est $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$.

Alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

ceci achève de montrer que la famille $(M_i + J)_{1 \leq i \leq 4}$ est libre.

Q4 Soit $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$. Supposons que pour tout réel non nul θ la matrice $M(a) + \theta J$ est non inversible. Montrons que $a = 0_{\mathbb{R}^4}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. $M(a) + \theta J$ est non inversible donc $\frac{1}{\theta} M(a) + J$ est non inversible.

Alors $M(\frac{1}{\theta} a) + J$ est non inversible.

D'après ce que nous avons vu dans Q3 : $(\frac{1}{\theta} a_1)^2 + (\frac{1}{\theta} a_2)^2 + (\frac{1}{\theta} a_3)^2 = a_4$.

Finalement $\forall \theta \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{\theta^2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = a_4$.

En faisant tendre θ vers $+\infty$ il vient $a_4 = 0$.

Alors $\forall \theta \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{\theta^2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0$. Donc $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$. Ainsi $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Finalement $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. $a = 0_{\mathbb{R}^4}$.

Si pour θ dans $\mathbb{R}^*$, $M(a) + \theta J$ est non inversible : $a = (0, 0, 0, 0)$.

Q5 a) Soit $M \in G \cap F$. $\exists a \in \mathbb{R}^4$, $M = M(a)$.

$M \in G$ et $J \in G$ donc $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $M + \theta J \in G$.

Alors pour tout θ dans $\mathbb{R}^*$ $M(a) + \theta J \in G$.

Pour tout θ dans $\mathbb{R}^*$, $M(a) + \theta J$ n'est pas inversible

D'après Q4 : $a = (0, 0, 0, 0)$. Alors $M = M(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{M_4(\mathbb{R})}$.

Ainsi $G \cap F = \{0_{M_4(\mathbb{R})}\}$.

Alors d'après Q1 $\dim G + \dim F \leq \dim M_4(\mathbb{R}) = 16$; $\dim G \leq 16 - \dim F = 16 - 4 = 12$.

$\dim G \leq 12$.

b) Soit G l'ensemble des matrices de $M_4(\mathbb{R})$ de quatrième colonne nulle.

Soit $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le 4\\ 1\le j\le 4}}$ la base canonique de $M_4(\mathbb{R})$.

G est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le 4\\ 1\le j\le 3}}$.

Alors G est un sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$ et $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le 4\\ 1\le j\le 3}}$ en est une famille génératrice. Or cette famille est libre comme sous-famille de la base $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le 4\\ 1\le j\le 4}}$. Donc $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le 4\\ 1\le j\le 3}}$ est une base de G.

Alors G est un sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$ de dimension 12.

$$J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ donc $J\in G$

Les matrices de G ne sont pas inversibles car leur quatrième colonne est nulle.

Donc il existe un sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$ de dimension 12 ne contenant aucune matrice inversible et contenant J.

R.

Question 4 HEC 2009-4

Pour n entier naturel non nul, soit X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0, 1[$.

Q1. Montrer que pour $a > 0$ fixé, $P([X_n \leqslant a])$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Q2. Montrer que si $b > 0$,

$$P\left(\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > b\right]\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \operatorname{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$$

Qu'en déduit-on pour $P([|X_n - np| \leqslant nb])$ quand n tend vers $+\infty$?

Q1 Posons $n_0 = \operatorname{Ent}(a)$. Soit $n \in [\![\max(1, n_0), +\infty[\![$.

$P(X_n \leqslant a) = \sum_{k=0}^{n_0} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Soit $k \in [\![1, n_0]\!]$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$. ceci vaut encore pour

$k=0$ car $\binom{n}{0} = 1$ et $\dfrac{n^0}{0!} = 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Alors $\forall k \in [\![0, n_0]\!]$, $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!} p^k q^{n-k} = \dfrac{p^k}{q^k k!} (n^k q^n)$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} (n^k q^n) = 0$ par croissance comparée car $|q| = q < 1$.

Alors pour tout k dans $[\![0, n_0]\!]$, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \left[\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right] = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} P(X_n \leqslant a) = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right] = 0$.

Pour tout réel a strictement positif : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} P(X_n \leqslant a) = 0$.

Q2 $b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>1er Cas.</u> $b\sqrt{n} \leqslant \sqrt{p(1-p)}$. $\operatorname{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n}) = b\sqrt{n}$.

Alors $1 \leqslant \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{b\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} b\sqrt{n} = \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2 n} \operatorname{Min}(\sqrt{p(1-p)}, b\sqrt{n})$.

$b\sqrt{n} > 0$

Or $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq 1$. donc $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}\min\left(\sqrt{p(1-p)},b\sqrt{n}\right)$

<u>2ème cas</u>.. $b\sqrt{n}>\sqrt{p(1-p)}$. Alors $\min\left(\sqrt{p(1-p)},b\sqrt{n}\right)=\sqrt{p(1-p)}$

$E(X_n)$ (resp. $V(X_n)$) existe et vaut np (resp. $np(1-p)$).

Alors $E\left(\frac{X_n}{n}\right)$ existe et vaut p. $V\left(\frac{X_n}{n}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{n^2}np(1-p)$ ou $\frac{p(1-p)}{n}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :

$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)=P\left(\left|\frac{X_n}{n}-E\left(\frac{X_n}{n}\right)\right|>b\right)\leq\frac{V\left(\frac{X_n}{n}\right)}{b^2}=\frac{p(1-p)}{b^2n}=\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}\times\sqrt{p(1-p)}$.

donc $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}\min\left(\sqrt{p(1-p)},b\sqrt{n}\right)$

Ainsi pour tout réel b strictement positif $P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}\min\left(\sqrt{p(1-p)},b\sqrt{n}\right)$.

Soit $b\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\leq\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}\min\left(\sqrt{p(1-p)},b\sqrt{n}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}b\sqrt{n}=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\min\left(\sqrt{p(1-p)},b\sqrt{n}\right)=\sqrt{p(1-p)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}=0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{p(1-p)}}{b^2n}\min\left(\sqrt{p(1-p)},b\sqrt{n}\right)\right)=0$. Par encadrement il vient $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)=0$.

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\leq b\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|>b\right)\right)=1-0=1$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(|X_n-np|\leq b\right)=1$.

HEC 2009 S5

Sujet S 5 - Exercice

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p ($p \in]0,1[$).

On pose $q = 1 - p$, $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

1) Question de cours : Définition et propriétés de la loi géométrique.
2) Déterminer la loi de U.
3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   a) Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $[U = n]$.
   b) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_1 / U = n)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_1)$.
4) Déterminer la loi de T.
5) a) Calculer $\mathbf{Cov}(U, T)$.
   b) Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Sujet S 5 - Exercice sans préparation

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant comme matrice u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1) On pose $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, -1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1, 0)$. Calculer $f(v_i)$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$.
2) Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à une base de vecteurs propres de M contenant le plus possible de 0, les autres termes étant $+1$ ou -1.
3) Déterminer M^2, puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4) Déterminer à l'aide de P, la matrice des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ sur chacun des sous-espaces propres de M.

Q1 $p \in]0,1[$. X suit la loi géométrique de paramètre p si

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = pq^{k-1}$ où $q = 1-p$.

$E(X)$ existe et vaut $\frac{1}{p}$. $V(X)$ existe et vaut $\frac{q}{p^2}$.

Q2 $U(\Omega) = [\![2,+\infty[\![$. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. $(\{X_1 = k\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne :

$$P(U=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{X_1=k\} \cap \{U=n\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{X_1=k\} \cap \{X_1+X_2=n\}).$$

$$P(U=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{X_1=k\} \cap \{X_2=n-k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1=k)\,P(X_2=n-k).$$

X_1 et X_2 sont indépendantes.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_1=k) = pq^{k-1}$ et $P(X_2=n-k) = \begin{cases} pq^{n-k-1} & \text{si } n-k \geq 1 \text{ ou si } k \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $P(U=n) = \sum_{k=1}^{n-1} pq^{k-1}pq^{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} p^2q^{n-2} = (n-1)p^2q^{n-2}$.

<u>$U(\Omega) = [\![2,+\infty[\![$ et $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $P(U=n) = (n-1)p^2q^{n-2}$.</u>

$\boxed{U \text{ suit la loi de Pascal de paramètres } 2 \text{ et } p}$

Q3 a) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P_{\{U=n\}}(X_1=k) = \dfrac{P(\{X_1=k\}\cap\{U=n\})}{P(U=n)} = \dfrac{P(\{X_1=k\}\cap\{U=n\})}{(n-1)p^2q^{n-2}}$.

Nous avons vu dans Q2 que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(\{X_1=k\}\cap\{U=n\}) = \begin{cases} p^2q^{n-2} & \text{si } k \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P_{\{U=n\}}(X_1=k) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{si } k \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

<u>Alors pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$, la loi conditionnelle de X_1 sachant que $\{U=n\}$ est la loi uniforme sur $[\![1,n-1]\!]$.</u>

b) Mais d'après a) pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$, $E(X_1 \mid U=n)$ existe et vaut $\frac{1+(n-1)}{2}$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ E(X_1 \mid U=n) = \frac{n}{2}$.

Notons que $|X_1| = X_1$. Alors $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ E(|X_1| \mid U=n) = E(X_1 \mid U=n) = \frac{n}{2}$

1°) $(\{U=n\})_{n\geq 2}$ est un système complet d'événements.

2°) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ P(U=n) \neq 0$

3°) Pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$, $E(|X_1| \mid U=n)$ existe.

4°) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ E(|X_1| \mid U=n)\, P(U=n) = \frac{n}{2}(n-1)p^2q^{n-2} = \frac{p^2}{2} n(n-1)q^{n-2}$.

$|q| < 1$ donc la série de terme général $n(n-1)q^{n-2}$ converge. De plus

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p^3}.$$

Alors la série de terme général $E(|X_1| \mid U=n)\, P(U=n)$ converge.

D'après le théorème des espérances conditionnelles ceci achève de montrer que :

$E(X_1)$ existe et vaut : $\sum_{n=2}^{+\infty} E(X_1 \mid U=n)\, P(U=n)$

Donc $E(X_1) = \sum_{n=2}^{+\infty} E(X_1 \mid U=n)\, P(U=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{p^2}{2} n(n-1)q^{n-2} = \frac{p^2}{2} \times \frac{2}{p^3} = \frac{1}{p}$.

Ainsi $E(X_1)$ existe et vaut $\frac{1}{p}$. Inouï !

Q4 $T(\Omega) = \mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. $(\{X_1 = k\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.

La formule des probabilités totales donne :

$$P(T=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{T=n\} \cap \{X_1=k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{X_1 - X_2 = n\} \cap \{X_1 = k\}).$$

$$P(T=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k-n\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)\, P(X_2 = k-n).$$

↑ X_1 et X_2 sont indépendantes

$\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $P(X_1=\ell)=pq^{\ell-1}$ et $P(X_2=\ell-n)=\begin{cases} pq^{\ell-n-1} & \text{si } \ell-n\geq 1 \text{ ou } \ell \geq n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$P(T=n)=\sum_{\ell=\max(1,n+1)}^{+\infty} pq^{\ell-1}pq^{\ell-n-1} = p^2q^{-n-2}\sum_{\ell=\max(1,n+1)}^{+\infty}(q^2)^{\ell}.$$

$$P(T=n)=p^2q^{-n-2}\sum_{i=0}^{+\infty}(q^2)^{i+\max(1,n+1)} = p^2q^{-n-2}(q^2)^{\max(1,n+1)}\frac{1}{1-q^2}.$$

$i=\ell-\max(1,n+1)$

$$P(T=n)=p^2q^{2\max(1,n+1)-n-2}\frac{1}{p(1+q)}=\frac{p\,q^{2\max(1,n+1)-n-2}}{1+q}$$

$1-q^2=(1-q)(1+q)=p(1+q)$

$\underline{1^{\text{er}}\text{ cas}}$.. $n\geq 0$. $\max(1,n+1)=n+1$. $P(T=n)=\dfrac{p\,q^{2(n+1)-n-2}}{1+q}=\dfrac{pq^n}{1+q}=\dfrac{pq^{|n|}}{1+q}$.

$\underline{2^{\text{ième}}\text{ cas}}$.. $n<0$. $\max(1,n+1)=1$. $P(T=n)=\dfrac{pq^{2-(n-2)}}{1+q}=\dfrac{pq^{-n}}{1+q}=\dfrac{pq^{|n|}}{1+q}$.

Finalement $\forall n\in\mathbb{Z}$, $P(T=n)=\dfrac{pq^{|n|}}{1+q}$.

Q5 a) X_1 et X_2 possèdent un moment d'ordre 2 donc X_1+X_2 et X_1-X_2 possèdent un moment d'ordre 2.

Alors U et T possèdent un moment d'ordre 2 et ainsi $\text{cov}(U,T)$ existe.

De plus $\text{cov}(U,T)=\text{cov}(X_1+X_2,X_1-X_2)\overset{\text{bilinéarité de la covariance}}{=}\text{cov}(X_1,X_1)-\underbrace{\text{cov}(X_1,X_2)}_{=0}+\underbrace{\text{cov}(X_2,X_1)}_{=0}-\text{cov}(X_2,X_2)$

$\text{cov}(U,T)=V(X_1)-V(X_2)=0$ ($X_1\hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $X_2\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$). X_1 et X_2 sont indépendantes

$\text{cov}(U,T)=0$.

b) $P(\{U=3\}\cap\{T=0\})=P(\{X_1+X_2=3\}\cap\{X_1=X_2\})=P(\{X_1=\frac{3}{2}\}\cap\{X_2=\frac{3}{2}\})=0$.

$P(U=3)=2p^2q\neq 0$ et $P(T=0)=\frac{p}{1+q}\neq 0$; $P(U=3)P(T=0)\neq 0$.

$X_1(\Omega)=X_2(\Omega)=\mathbb{N}^*$

Donc $P(\{U=3\}\cap\{T=0\})\neq P(U=3)P(T=0)$.

Alors U et T ne sont pas indépendantes et pourtant $\text{cov}(U,T)=0$...

R.

Question 5 HEC 2009-5

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant comme matrice u dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Q1. On pose $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,-1,1,1)$, $v_3 = (1,0,1,0)$. Calculer $f(v_i)$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$.

Q2. Montrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à une base de vecteurs propres de M contenant le plus possible de 0, les autres termes étant $+1$ ou -1.

Q3. Déterminer M^2, puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Q4. Déterminer à l'aide de P, la matrice des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ sur chacun des sous-espaces propres de M.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1. $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3) = 2v_3$.

Q2. M est symétrique à coefficients réels donc **M est diagonalisable**.

D'après Q1 $2 \in \operatorname{Sp} M$ et $\dim SEP(M,2) \geqslant 3$ (v_1, v_2, v_3 est clairement libre).

Alors il existe un réel α tel que M soit semblable à $\operatorname{Diag}(2,2,2,\alpha)$.

$4 = \operatorname{Tr}(M) = \operatorname{Tr}(\operatorname{Diag}(2,2,2,\alpha)) = 6 + \alpha$; $\alpha = -2$.

$\dim SEP(M,2) \geqslant 3$, $\dim SEP(M,-2) \geqslant 1$.

Nécessairement M ne peut avoir d'autres valeurs propres que -2 et 2.

De plus $\dim SEP(M,-2) = 1$ et $\dim SEP(M,2) = 3$.

$\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) = SEP(M,-2) \oplus SEP(M,2)$ et $SEP(M,-2)$ et $SEP(M,2)$ sont orthogonaux. Alors $SEP(M,-2) = (SEP(M,2))^\perp$.

$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille d'éléments de $SEP(M,2)$ visiblement libre.

$\mathcal{B}_1$ est une base de $SEP(M,2)$ car $\dim SEP(M,2) = 3$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. $X \in SEP(M,-2) \iff X$ est orthogonal à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$X \in SEP(M,-2) \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = -x \\ 0 = x + x - x + t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = -x \\ t = -x \end{cases}$$

$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $SEP(M,-2)$.

Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $2, 2, 2$ et -2.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$, P est inversible et $P^{-1}MP = \mathrm{Diag}(2,2,2,-2)$.

Q3 * $M^2 = 4I_4$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^{2n} = 4^n I_4$ et $M^{2n+1} = 4^n M$.

Q4 Posons $v_4 = (1,-1,-1,-1)$. Notons $\hat{\mathcal{B}}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\hat{\mathcal{B}}$ la base (v_1, v_2, v_3, v_4) de $\mathbb{R}^4$ (base, ok ?). P est la matrice de passage de $\hat{\mathcal{B}}_0$ à $\hat{\mathcal{B}}$.

Soit p_1 (resp. p_2) la projection orthogonale sur $SEP(M,2)$ (resp. $SEP(M,-2)$).

$$\mathrm{Mat}_{\hat{\mathcal{B}}}(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\hat{\mathcal{B}}}(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

** Alors $\mathrm{Mat}_{\hat{\mathcal{B}}_0}(p_1) = P\,\mathrm{Diag}(1,1,1,0)\,P^{-1}$ et $\mathrm{Mat}_{\hat{\mathcal{B}}_0}(p_2) = P\,\mathrm{Diag}(0,0,0,1)\,P^{-1}$.

* Peut s'obtenir directement avec $M^2 = P(\mathrm{Diag}(2,2,2,-2))^2 P^{-1}$.

** $$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.\ \mathrm{Mat}_{\hat{\mathcal{B}}_0}(p_1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.\ \mathrm{Mat}_{\hat{\mathcal{B}}_0}(p_2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

HEC 2009 S 6

Sujet S 6 - Exercice

1) Question de cours : Définition de la convergence absolue d'une série numérique. Lien entre convergence et convergence absolue.

2) **a)** Justifier pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}(1+e^{-2t})^p}\,dt$.

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{I}_{k,p} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}(1+e^{-2t})^p}\,dt$$

b) Calculer $\mathrm{I}_{k,0}$ en fonction de k (on pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{2kt}$, après l'avoir justifié).

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_{n,1}$

3) **a)** Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer la somme $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}$ en fonction de $\mathrm{I}_{2n+3,1}$ et $\mathrm{I}_{1,1}$.

b) En déduire que la série de terme général $u_j = \dfrac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}$ est convergente. Exprimer sa somme S en fonction de $\mathrm{I}_{1,1}$.

4) Montrer que : $0 < \mathrm{S} < 1$.

* **Sujet S 6 - Exercice sans préparation**

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soit $n \geqslant 1$ et $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$ un n-échantillon indépendant, identiquement distribué de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose λ inconnu et on cherche à l'estimer par un intervalle de confiance.

On pose :

$$\overline{\mathrm{X}}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_i \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{\mathrm{X}}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

A l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

* QS déjà vue à l'oral ESCP 2007

Question qui figure également dans le sujet 10 de l'oral HEC 2010.

R.

HEC 2009 S6 Correction de l'exercice

(Q1) Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels.

* la série de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge.
* si la série de terme général u_n est absolument convergente elle est convergente.
* si la série de terme général u_n est absolument convergente : $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$.

(Q2) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in \mathbb{N}$. $f_{k,p} : t \mapsto \dfrac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}\,(1+e^{-2t})^p}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

* 1) $f_{k,p}(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{2^p} \dfrac{1}{t^{1/2}}$

  2) $\forall t \in]0,1]$, $f_{k,p}(t) \geq 0$

  3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^p} \frac{1}{t^{1/2}}\,dt$ converge puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}}$ converge $(1/2 < 1)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^1 f_{k,p}(t)\,dt$ converge.

* $t^2 f_{k,p}(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} t^2 \dfrac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{t^{3/2}}{e^{kt}} = \dfrac{1}{k^{3/2}\sqrt{\pi}} \times \dfrac{(kt)^{3/2}}{e^{kt}}$ et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{(kt)^{3/2}}{e^{kt}} = 0$ par croissance comparée. Alors 1) $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \left[t^2 f_{k,p}(t)\right] = 0$ donc $f_{k,p}(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

  2) $\forall t \in [1,+\infty[$, $f_{k,p}(t) \geq 0$ et $\frac{1}{t^2} \geq 0$

  3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge $(2 > 1)$

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{k,p}(t)\,dt$ converge.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{k,p}(t)\,dt$ converge. Ainsi :

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout p dans $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{\pi t}\,(1+e^{-2t})^p}\,dt$ converge.

b) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $A \in \mathbb{R}_+^*$. $t \mapsto \sqrt{2\ell t}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ ce qui justifie le changement de variable $u=\sqrt{2\ell t}$ dans ce qui suit.

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-\ell t}}{\sqrt{\pi t}}\,dt \underset{\substack{u=\sqrt{2\ell t}\\ t=u^2/2\ell\\ dt=(u/\ell)du}}{=} \int_{\sqrt{2\ell\varepsilon}}^{\sqrt{2\ell A}} e^{-u^2/2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{2\ell}}{u}\frac{u}{\ell}\,du = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\ell}}\int_{\sqrt{2\ell\varepsilon}}^{\sqrt{2\ell A}} e^{-u^2/2}\,du. \quad (*)$$

Le cours de probabilité indique que $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du$ converge et vaut 1.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$. Par parité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$ converge et vaut $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

Alors $\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{2\ell\varepsilon}=0$, $\lim_{A\to+\infty}\sqrt{2\ell A}=+\infty$, $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\ell t}}{\sqrt{\pi t}}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$ convergent.

En faisant tendre ε vers 0 puis A vers $+\infty$ dans $(*)$ il vient :

$$I_{\ell,0}=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\ell t}}{\sqrt{\pi t}}\,dt=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\ell}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2/2}\,du=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\ell}}\times\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\frac{1}{\sqrt{\ell}}.$$

$$\forall \ell\in\mathbb{N}^*,\quad I_{\ell,0}=\frac{1}{\sqrt{\ell}}.$$

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall t\in]0,+\infty[$, $0\le\frac{1}{1+e^{-2t}}\le 1$ et $\frac{e^{-nt}}{\sqrt{\pi t}}\ge 0$

Alors $\forall t\in]0,+\infty[$, $0\le\frac{e^{-nt}}{\sqrt{\pi t}(1+e^{-2t})}\le\frac{e^{-nt}}{\sqrt{\pi t}}$.

$\forall t\in]0,+\infty[$, $0\le f_{n,1}(t)\le f_{n,0}(t)$. En intégrant il vient :

$0\le I_{n,1}\le I_{n,0}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ donc

par encadrement il vient : $\lim_{n\to+\infty} I_{n,1}=0$.

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_{2n+3,1}+I_{2n+1,1}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\frac{1}{1+e^{-2t}}\Big(\underbrace{e^{-(2n+3)t}+e^{-(2n+1)t}}_{=e^{-(2n+1)t}(e^{-2t}+1)}\Big)dt\,.$$

$$I_{2n+3,1}+I_{2n+1,1}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-(2n+1)t}\,dt = I_{2n+1,0}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,.$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ I_{2n+3,1}+I_{2n+1,1}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left[I_{2j+3,1}+I_{2j+1,1}\right]=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j I_{2j+3,1}+\sum_{j=0}^{n}(-1)^j I_{2j+1,1}$$

$j\leftarrow j+1$

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1} I_{2j+1,1}+\sum_{j=0}^{n}(-1)^j I_{2j+1,1}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j I_{2j+1,1}-\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j I_{2j+1,1}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}=I_{1,1}-(-1)^{n+1}I_{2n+3,1}\,.$$

Q2c)

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|(-1)^{n+1}I_{2n+3,1}\right|=\left|I_{2n+3,1}\right|=I_{2n+3,1}\ \text{et}\ \lim_{n\to+\infty}I_{2n+3,1}\overset{\downarrow}{=}0$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left((-1)^{n+1}I_{2n+3,1}\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}=I_{1,1}$.

Ainsi
- 1) la série de terme général $u_j=\frac{(-1)^j}{\sqrt{2j+1}}$ converge.
- 2) $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}u_j=I_{1,1}$.

Q4 $\forall t\in\,]0,+\infty[,\quad 0<\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}\,(1+e^{-2t})}=f_{1,1}(t)<\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}=f_{1,0}(t)$.

Alors $0<I_{1,1}<I_{1,0}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$. Donc $0<\sum\limits_{j=0}^{+\infty}u_j<1$ ou $0<S<1$.

R.

Question 6 HEC 2009-6

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $n \geqslant 1$ et $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon indépendant, identiquement distribué de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose λ inconnu et on cherche à l'estimer par un intervalle de confiance.

On pose : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$ et $T_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

A l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Les variables aléatoires X_k sont indépendantes, ont même loi, ont une espérance commune égale à λ et une variance commune égale à λ $(\lambda > 0)$.

Alors le théorème de la limite centrée montre que la suite de terme général $S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et dont nous noterons ϕ la fonction de répartition.

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim_{n \to +\infty} P(S_n^* \leqslant x) = \phi(x)$.

$S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$. $E(S_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n\lambda$.

$V(S_n) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n\lambda$

$\uparrow$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes

Alors $S_n^* = \dfrac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} = \dfrac{n\overline{X}_n - n\lambda}{\sqrt{n}\sqrt{\lambda}} = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = T_n$!

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim_{n \to +\infty} P(T_n \leqslant x) = \phi(x)$.

Dans la suite nous supposerons n suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler la fonction de répartition de T_n à ϕ !!

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $P(|T_n| \leqslant \varepsilon) = P(-\varepsilon \leqslant T_n \leqslant \varepsilon) = \phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon) = \phi(\varepsilon) - (1 - \phi(\varepsilon)) = 2\phi(\varepsilon) - 1$.

ϕ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et $\phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

Alors $\forall y \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[, \ \exists!\, x \in]0, +\infty[, \ \phi(x) = y$.

$\alpha \in]0,1[$. Donc $1-\frac{\alpha}{2} \in]\frac{1}{2},1[$. Alors $\exists !\, t_\alpha \in]0,+\infty[$, $\Phi(t_\alpha) = 1-\frac{\alpha}{2}$.

Donc $2\Phi(t_\alpha)-1 = 2(1-\frac{\alpha}{2})-1 = 1-\alpha$.

Par conséquent $\underline{P(|T_n| \leq t_\alpha) = 1-\alpha}$.

$$P(|T_n| \leq t_\alpha) = P(-t_\alpha \leq T_n \leq t_\alpha) = P\left(-t_\alpha \leq \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq t_\alpha\right).$$

$$P(|T_n| \leq t_\alpha) = P\left(-\frac{t_\alpha\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}_n-\lambda \leq \frac{t_\alpha\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\lambda-\frac{t_\alpha\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}_n \leq \lambda+\frac{t_\alpha\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}}\right).$$

$$P(|T_n| \leq t_\alpha) = P\left(\left(\sqrt{\lambda}-\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2-\frac{t_\alpha^2}{4n} \leq \overline{X}_n \leq \left(\sqrt{\lambda}+\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2-\frac{t_\alpha^2}{4n}\right)$$ ... forme canonique du trinôme.

$$P(|T_n| \leq t_\alpha) = P\left(\left\{\left(\sqrt{\lambda}-\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2 \leq \overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}\right\} \cap \left\{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n} \leq \left(\sqrt{\lambda}+\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2\right\}\right).$$

$$P(|T_n| \leq t_\alpha) = P\left(\left\{-\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}} \leq \sqrt{\lambda}-\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}}\right\} \cap \left\{\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}} \leq \sqrt{\lambda}+\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right\}\right).$$

$$P(|T_n| \leq t_\alpha) = P\left(\left\{\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}-\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}} \underset{①}{\leq} \sqrt{\lambda}\right\} \cap \left\{\sqrt{\lambda} \underset{②}{\leq} \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}}\right\} \cap \left\{\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}}-\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \underset{③}{\leq} \sqrt{\lambda}\right\}\right)$$

$$P(|T_n| \leq \alpha) = P\left(\left|\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}-\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}}\right| \overset{① \text{ et } ③}{\leq} \sqrt{\lambda} \overset{②}{\leq} \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}}\right)$$

$$P(|T_n| \leq \alpha) = P\left(\left(\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}-\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}}\right)^2 \leq \lambda \leq \left(\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}}\right)^2\right)$$ et $P(|T_n| \leq \alpha) = 1-\alpha$.

Alors $\left[\left(\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}-\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}}\right)^2, \left(\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}+\sqrt{\overline{X}_n+\frac{t_\alpha^2}{4n}}\right)^2\right]$ est un intervalle

de confiance de λ au risque α ou à la confiance $1-\alpha$.

HEC 2009 S7

Sujet S 7 - Exercice

1) Question de cours : Diagonalisabilité d'une matrice, d'un endomorphisme.
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$ (en posant degré$(0) = -\infty$).

2) On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Calculer son rang, en déduire une valeur propre de M et la dimension du sous-espace propre associé. Donner une base de ce sous-espace propre.

3) On pose $P_1 = X^2 - 1$, $P_2 = X^2 - X + 1$ et $P_3 = X^2 + X + 1$. Montrer que $\mathcal{V} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.

On note $V_1 = \mathrm{Vect}(P_1)$, $V_2 = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$

4) On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice M dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de E.

Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{V}$. En déduire que f^3 est nulle, puis préciser l'ensemble des valeurs propres de f.

5) Montrer que V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels stables par f.

6) On veut trouver les sous-espaces vectoriels F stables par f c'est à dire tels que $f(F) \subset F$.
   a) Montrer que E et $\{0\}$ sont stables par F.
   b) Soit D une droite vectorielle stable par f et $u \in D$ un vecteur non nul. Montrer que u est un vecteur propre de f. En déduire que $D = V_1$.
   c) Soit F un plan stable par f et $v = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$ un élément de F. Montrer que $(v, f(v), f^2(v))$ est une famille liée. En déduire que $\gamma = 0$ puis que $F = V_2$.

Sujet S 7 - Exercice sans préparation

Un enfant a dans chacune des deux poches de son blouson, un paquet contenant N bonbons. A chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit, de manière indépendante et avec la probabilité p, sa poche de gauche pour un prendre un.

1) Lorsqu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il en reste k dans l'autre poche ?

2) Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de bonbon dans les deux poches simultanément ?

3) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N}$

Q1 * $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

A diagonalisable

$\Updownarrow$

A est semblable à une matrice diagonale

$\Updownarrow$

Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de A

$\Updownarrow$

$$\bigoplus_{\lambda \in Sp A} SEP(A,\lambda) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

$\Updownarrow$

$$\sum_{\lambda \in Sp A} \dim SEP(A,\lambda) = n$$

* $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et $f \in \mathcal{L}(E)$.

f diagonalisable

$\Updownarrow$ Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f

$\Updownarrow$ Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale

$\Updownarrow$ $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp f} SEP(f,\lambda)$

$\Updownarrow$ $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp f} \dim SEP(f,\lambda)$

Q2 Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$ notons C_i la $i^{\text{ème}}$ colonne de M.

$rg\, M = \dim Vect(C_1, C_2, C_3) = \dim Vect(C_1, C_2)$ car $C_3 = C_1$.

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha C_1 + \beta C_2 = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

$\alpha\begin{pmatrix}0\\-1/4\\1/2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{cases}\beta = 0\\ -\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 0\\ \frac{1}{2}\alpha = 0\end{cases}$; $\alpha = \beta = 0$. Alors (C_1, C_2) est libre. Alors :

$rg\, M = \dim Vect(C_1, C_2) = 2$. $\underline{\underline{rg\, M = 2.}}$

Alors M n'est pas inversible donc $\underline{\underline{0 \text{ est valeur propre de } M.}}$

De plus $\dim SEP(M,0) = 3 - rg\, M = 3 - 2 = 1$. $SEP(M,0)$ est une droite vectorielle.

$M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = C_1 = C_3 = M\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $M\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; $M\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Alors $SEP(M,0)$ est une droite vectorielle qui contient $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

donc $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(M,0)$.

(Q3) Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3=0_E$.

$\alpha(X^2-1)+\beta(X^2-X+1)+\gamma(X^2+X+1)=0_E$

$(\alpha+\beta+\gamma)X^2+(\gamma-\beta)X-\alpha+\beta+\gamma=0_E$

Alors $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\-\alpha+\beta+\gamma=0\\\gamma-\beta=0\end{cases}$; $\begin{cases}\beta=\gamma\\\alpha+2\beta=0\\-\alpha+2\beta=0\end{cases}$; $\begin{cases}\beta=\gamma\\4\beta=0\\\alpha=2\beta\end{cases}$; $\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$.

Ainsi (P_1,P_2,P_3) est une famille libre de cardinal 3 d'éléments de E et

E est de dimension 3.

Donc (P_1,P_2,P_3) est une base de E.

(Q4) $M\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\in SEP(M,0)$ donc $f(P_1)=0_E$.

$M\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1/4&-1/2&-1/4\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$; $f(P_2)=P_1$.

$M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1/4&-1/2&-1/4\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$; $f(P_3)=P_2$.

(*) On pouvait aussi remarquer que $Sp f=Sp M'=\{0\}$ M' triangulaire ...

La matrice M' de f dans γ est : $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$M'^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$M'^3=M'M'^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_{M_3(\mathbb{R})}$. Alors $f^3=0_{\mathcal{L}(E)}$.

X^3 est un polynôme annulateur de f et 0 est la seule racine de X^3.

Alors $Sp f\subset\{0\}$. Or $Sp f=Sp M$ et $0\in Sp M$ donc $0\in Sp f$.

(*) Ainsi $Sp f=\{0\}$. $SEP(M,0)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ donc $SEP(f,0)=Vect(1-X^2)=Vect(X^2-1)=Vect(P_1)$

Ainsi $SEP(f,0)=Vect(P_1)=V_1$.

(Q5) $f(V_1)=f(\mathrm{Vect}(P_1))=\mathrm{Vect}(f(P_1))=\mathrm{Vect}(0_E)=\{0_E\}\subset V_1$; $f(V_1)\subset V_1$.

$f(V_2)=f(\mathrm{Vect}(P_1,P_2))=\mathrm{Vect}(f(P_1),f(P_2))=\mathrm{Vect}(0_E,P_1)=\mathrm{Vect}(P_1)\subset \mathrm{Vect}(P_1,P_2)=V_2$;

donc $f(V_2)\subset V_2$.

<u>V_1 et V_2 sont stables par f.</u>

(Q6) <u>a)</u> • $f(E)\subset E$ donc E est stable par f.

• $f(\{0_E\})=\{0_E\}$ donc $\{0_E\}$ est stable par f.

<u>b)</u> $D=\mathrm{Vect}(u)$ et $f(D)\subset D$. Alors $f(u)\in D=\mathrm{Vect}(u)$.

$\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $f(u)=\lambda u$ et $u\neq 0_E$ donc λ est une valeur propre de f et <u>u est un vecteur propre associé.</u>

Or $\mathrm{Sp}\,f=\{0\}$ et $SEP(f,0)=V_1$. Alors $\lambda=0$ et $u\in V_1$.

donc $D=\mathrm{Vect}(u)\subset V_1$. Comme $\dim D=1$ et $\dim V_1=1$: <u>$D=V_1$.</u>

<u>Remarque</u>.. Ce qui précède montre que <u>V_1 est l'unique droite vectorielle stable par f.</u>

<u>c)</u> $f(F)\subset F$ et $v\in F$. Alors $(v,f(v),f^2(v))$ est une famille d'éléments de F de cardinal 3. Or $\dim F=2$ alors nécessairement <u>$(v,f(v),f^2(v))$ est liée.</u>

$v=\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3$. $f(v)=\alpha.0_E+\beta P_1+\gamma P_2=\beta P_1+\gamma P_2$. $f^2(v)=\beta.0_E+\gamma P_1=\gamma P_1$.

$(\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3,\ \beta P_1+\gamma P_2,\ \gamma P_1)$ est liée donc il existe trois réels a, b et c tels que $(a,b,c)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $a(\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3)+b(\beta P_1+\gamma P_2)+c\,\gamma P_1=0_E$.

$(a\alpha+b\beta+c\gamma)P_1+(a\beta+b\gamma)P_2+a\gamma P_3=0_E$ et (P_1,P_2,P_3) est libre.

donc $\begin{cases}\alpha a+\beta b+\gamma c=0\\ a\beta+\gamma b=0\\ a\gamma=0\end{cases}$. Supposons $\gamma\neq 0$. Alors $\begin{cases}a=0\\ \gamma b=0\\ \beta b+\gamma c=0\end{cases}$.

$\begin{cases}a=0\\ b=0\\ \gamma c=0\end{cases}$. $a=b=c=0$. Ceci est impossible donc <u>$\gamma=0$.</u>

Alors $v = \alpha e_1 + \beta e_2$; $v \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$; $v \in V_2$.

Ainsi $\forall v \in F$, $v \in V_2$. Mais 1) $F \subset V_2$ donc $\underline{\underline{F = V_2}}$.

2) $\dim F = 2 = \dim V_2$

Si F est un plan stable par f, $F = V_2$. Or V_2 est un plan stable par f.

Donc $\underline{\underline{V_2 \text{ est l'unique plan de } E \text{ stable par } f}}$.

d) Notons qu'un sous-espace vectoriel de E est soit $\{0_E\}$, soit E, soit une droite vectorielle, soit un plan vectoriel. Ce qui précède montre que :

$\underline{\underline{\text{les sous-espaces vectoriels de } E \text{ stables par } f \text{ sont } \{0_E\}, V_1, V_2 \text{ et } E}}$.

R.

Question 7 HEC 2009-7

Un enfant a dans chacune des deux poches de son blouson, un paquet contenant N bonbons. A chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit, de manière indépendante et avec la probabilité p, sa poche de gauche pour un prendre un.

Q1. Lorsqu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il en reste k dans l'autre poche ?

Q2. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de bonbon dans les deux poches simultanément ?

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N}$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 On note p_k la probabilité cherchée et A_k l'événement correspondant.

Si $k \notin [\![0,N]\!]$, $p_k = 0$. Supposons $k \in [\![0,N]\!]$.

A_k se réalise ssi ou l'enfant fait $N+1$ tirages dans la poche droite, $N-k$ dans la gauche, le dernier tirage se faisant dans la droite.

ou l'enfant fait $N+1$ tirage dans la poche gauche, $N-k$ dans la droite, le dernier tirage se faisant dans la gauche.

Notons D_i (resp. G_i) l'événement le $i$ème tirage se fait dans la poche droite (resp. gauche) et X_i la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'enfant tire dans la poche droite au cours des i premiers tirages. $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(i, \frac{1}{2})$

$p_k = P(A_k) = P(\{X_{2N-k} = N\} \cap D_{2N+1-k}) + P(\{X_{2N-k} = N-k\} \cap G_{2N+1-k})$.

$p_k = P(X_{2N-k} = N)\, P_{(X_{2N-k}=N)}(D_{2N+1-k}) + P(X_{2N-k} = N-k)\, P_{(X_{2N-k}=N-k)}(G_{2N+1-k})$.

$p_k = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k} \times \frac{1}{2} + \binom{2N-k}{N-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}\frac{1}{2} = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}$.

$\binom{2N-k}{N-k} = \binom{2N-k}{N}$

$p_k = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}$.

Q2 La probabilité pour que les deux poches soient vides est $p_0 = \binom{2N}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N}$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{N} p_k = 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N} = 2^{2N}$

R

HEC 2009 S 8

Sujet S 8 - Exercice

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1) Question de cours : Rappeler la définition de la convergence en probabilité. Démontrer qu'une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, suivant des lois de Poisson de paramètres θ_n, tels que $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 0$, converge en probabilité vers 0.

2) On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2}(x+1)^2 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Démontrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) On note f la fonction dérivée de F et, pour tout nombre réel θ, f_θ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\theta(x) = f(x-\theta) \quad .$$

Vérifier que f_θ est une densité de probabilité.

c) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, admettant f_θ pour densité. Montrer que X possède une espérance et une variance et les calculer.

3) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi, admettant pour densité f_θ.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $U_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $V_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Exprimer, à l'aide de F, θ et n, les fonctions de répartition de U_n et V_n.

b) Justifier, pour tout $\epsilon \in]0,1[$, l'inégalité :

$$\mathbb{P}([-1+\theta \leqslant U_n < -1+\theta+2\epsilon] \cap [1+\theta-2\epsilon < V_n \leqslant 1+\theta]) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{U_n+V_n}{2} - \theta\right| < \epsilon\right]\right).$$

c) En déduire que $\dfrac{U_n+V_n}{2}$ est un estimateur convergent de θ.

d) Est-il sans biais ?

Sujet S 8 - Exercice sans préparation

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$.

1) Etudier la monotonie et la limite éventuelle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^2 = 2n + x_0^2 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2}$.

3) En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
On pourra admettre que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

Q1 • Soit $(X_n)_{n\geq n_0}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$.

La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité si l'une des quatre assertions équivalentes suivantes est vérifiée.

$$\text{i) } \forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0$$

$$\text{ii) } \forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|>\varepsilon)=0$$

$$\text{iii) } \forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|<\varepsilon)=1$$

$$\text{iv) } \forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|\leq\varepsilon)=1$$

• Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(|Y_n-0|\leq\varepsilon)\overset{Y_n(\Omega)=\mathbb{N}}{=}P(Y_n\leq\varepsilon)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{Ent}(\varepsilon)}P(Y_n=k)=\sum_{k=0}^{\mathrm{Ent}(\varepsilon)}\frac{\theta_n^k}{k!}e^{-\theta_n}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}e^{-\theta_n}=1$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\theta_n^k}{k!}=\begin{cases}1 & \text{si } k=0\\ 0 & \text{si } k>0\end{cases}$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(|Y_n-0|\leq\varepsilon)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{\mathrm{Ent}(\varepsilon)}\frac{\theta_n^k}{k!}e^{-\theta_n}=1$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

<u>$(Y_n)_{n\geq1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.</u>

Q2 Notons que $\frac12(-1+1)^2=0$, $1-\frac12(0-1)^2=\frac12=\frac12(0+1)^2$ et $1-\frac12(1-1)^2=1$.

Alors on peut écrire que $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,-1]\\ \frac12(x+1)^2 & \text{si } x\in[-1,0]\\ 1-\frac12(x-1)^2 & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$

$u:x\mapsto0$, $v:x\mapsto\frac12(x+1)^2$, $w:x\mapsto1-\frac12(x-1)^2$ et $\ell:x\mapsto1$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus $\forall x\in\mathbb{R}$, $u'(x)=\ell'(x)=0$, $v'(x)=x+1$ et $w'(x)=-(x-1)$.

En particulier $u'(-1)=0$, $v'(-1)=0$, $v'(0)=1$, $w'(0)=1$, $w'(1)=0$, $\ell'(1)=0$.

Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,-1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$.

Alors 1°) F est continue sur $\mathbb{R}$

2°) F est dérivable et de dérivée continue sur $\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$

3°) F est dérivable à droite et à gauche en $-1, 0, 1$.

4°) $F'_g(-1)=u'(-1)=0$, $F'_d(-1)=v'(-1)=0$, $F'_g(0)=v'(0)=1$, $F'_d(0)=w'(0)=1$,

$F'_g(1)=w'(1)=0$ et $F'_d(1)=t'(1)=0$.

$F'_g(-1)=F'_d(-1)=0$, $F'_g(0)=F'_d(0)=1$, $F'_g(1)=F'_d(1)=0$.

Alors F est dérivable en -1, 0 et 1. De plus $F'(-1)=0$, $F'(0)=1$ et $F'(1)=0$.

$\forall x\in]-\infty,-1[$, $F'(x)=u'(x)=0$; mieux $\forall x\in]-\infty,0]$, $F'(x)=0$.

$\forall x\in]-1,0[$, $F'(x)=v'(x)=x+1$; mieux $\forall x\in[-1,0]$, $F'(x)=x+1=1-|x|$

$\forall x\in]0,1[$, $F'(x)=w'(x)=-(x-1)$; mieux $\forall x\in[0,1]$, $F'(x)=-(x-1)=1-|x|$

$\forall x\in]1,+\infty[$, $F'(x)=t'(x)=0$; mieux $\forall x\in[1,+\infty[$, $F'(x)=0$

Finalement $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{si } x\in[-1,1]\\ 0 & \text{si } x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\end{cases}$.

$x\mapsto 1-|x|$ et $x\mapsto 0$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc F' est continue sur $]-\infty,-1]$, $[-1,1]$ et $[1,+\infty[$. Ce qui suffit pour dire que F' est continue sur $\mathbb{R}$.

Ceci achève de montrer que <u>F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>b)</u> $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=F'(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{si } x\in[-1,1]\\ 0 & \end{cases}$. Soit θ un élément de $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f_\theta(x)=f(x-\theta)$.

* $\forall x\in[-1,1]$, $f(x)=1-|x|\geqslant 0$ et $\forall x\in\mathbb{R}-[-1,1]$, $f(x)=0\geqslant 0$!

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$ donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f_\theta(x) = f(x-\theta) \geqslant 0}$.

* f et $x \mapsto x-\theta$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Par composition f_θ est continue sur $\mathbb{R}$.

* $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ existent et valent 0.

$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ existe et vaut $2\int_0^1 f(t)\,dt$ car f est continue et paire sur $[-1,1]$... et même sur $\mathbb{R}$.

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_0^1 2(1-|t|)\,dt = 2\int_0^1 dt - \int_0^1 2t\,dt = 2 - [t^2]_0^1 = 2-1 = 1.$$

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut 1.

Soit $A \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_0^A f_\theta(t)\,dt = \int_0^A f(t-\theta)\,dt \underset{u=t-\theta}{=} \int_{-\theta}^{A-\theta} f(u)\,du.$

$$\int_0^A f_\theta(t)\,dt = \int_{-\theta}^{A-\theta} f(u)\,du \quad \text{et} \quad \int_A^0 f_\theta(t)\,dt = \int_{A-\theta}^{-\theta} f(u)\,du.$$

$\lim_{A\to+\infty}(A-\theta) = +\infty$, $\lim_{A\to-\infty}(A-\theta) = -\infty$, $\int_{-\theta}^{+\infty} f(u)\,du$ et $\int_{-\infty}^{-\theta} f(u)\,du$ convergent.

Alors $\int_0^{+\infty} f_\theta(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{0} f_\theta(t)\,dt$ convergent et valent $\int_{-\theta}^{+\infty} f(u)\,du$ et $\int_{-\infty}^{-\theta} f(u)\,du$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(t)\,dt$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du$ donc 1.

Ceci achève de montrer que $\underline{f_\theta \text{ est une densité de probabilité pour tout réel } \theta}$.

Notons que $\underline{f \text{ est aussi une densité de probabilité.}}$

c] Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant f_θ pour densité.

Soit F_X sa fonction de répartition.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\theta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_\theta(t)\,dt + \int_{0}^{x} f_\theta(t)\,dt \overset{\text{chgt de var}}{=} \int_{-\infty}^{-\theta} f(u)\,du + \int_{-\theta}^{x-\theta} f(u)\,du.$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x-\theta} f(u)\,du.$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x+\theta) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(X-\theta \leq x) = P(X \leq x+\theta) = F_X(x+\theta) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$ et f est une densité de probabilité donc $X-\theta$ est une variable aléatoire à densité de densité f.

Posons $T = X-\theta$. T est une variable aléatoire de densité f. $X = T+\theta$

Alors $E(X)$ (resp. $V(X)$) existe si et seulement si $E(T)$ (resp. $V(T)$) existe.

En cas d'existence $E(X) = E(T)+\theta$ (resp. $V(X) = V(T)$).

$\int_{-\infty}^{-1} t f(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty} t f(t)\,dt$ existent et valent 0.

$\int_{-1}^{1} t f(t)\,dt$ existe et vaut 0 car $t \mapsto t f(t)$ est continue et impaire sur $[-1,1]$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ existe et vaut 0. $E(T)$ existe et vaut 0.

Alors $\underline{\underline{E(X) \text{ existe et vaut } \theta}}$.

$\int_{-\infty}^{-1} t^2 f(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ existent et valent 0.

$\int_{-1}^{1} t^2 f(t)\,dt$ existe et vaut $2\int_{0}^{1} t^2 f(t)\,dt$ car $t \mapsto t^2 f(t)$ est continue et paire sur $[-1,1]$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ existe et vaut $2\int_{0}^{1} t^2 f(t)\,dt$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = 2\int_{0}^{1} t^2(1-|t|)\,dt = 2\int_{0}^{1}(t^2-t^3)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}.$$

Alors $E(T^2)$ existe et vaut $1/6$. Donc $V(T)$ existe et vaut également $1/6$ car $E(T)=0$.

Donc $V(X)$ existe et vaut $\frac{1}{6}$.

Q3) a) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = X_n - \theta$, $\hat{U}_n = \operatorname{Inf}(T_1, T_2, \dots, T_n)$ et $\hat{V}_n = \operatorname{Sup}(T_1, T_2, \dots, T_n)$

1°/ Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité de densité f et de fonction de répartition F.

2°/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \operatorname{Inf}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \operatorname{Inf}(T_1+\theta, T_2+\theta, \dots, T_n+\theta)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \operatorname{Inf}(T_1, T_2, \dots, T_n) + \theta = \hat{U}_n + \theta$.

De même $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \hat{V}_n + \theta$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\hat{U}_n = \operatorname{Inf}(T_1, \dots, T_n)$.

$P(U_n \leq x) = 1 - P(U_n > x) = 1 - P(\hat{U}_n > x-\theta) \overset{\downarrow}{=} 1 - P(\{T_1 > x-\theta\} \cap \dots \cap \{T_n > x-\theta\})$.

Par indépendance il vient :

$P(U_n \leq x) = 1 - P(T_1 > x-\theta) \dots P(T_n > x-\theta) = 1 - (1 - P(T_1 \leq x-\theta)) \dots (1 - P(T_n \leq x-\theta))$

$P(U_n \leq x) = 1 - (1 - F(x-\theta))^n$.

indépendance

$P(V_n \leq x) = P(\hat{V}_n \leq x-\theta) = P(\{T_1 \leq x-\theta\} \cap \dots \cap \{T_n \leq x-\theta\}) \overset{\downarrow}{=} P(T_1 \leq x-\theta) \dots P(T_n \leq x-\theta)$

$\uparrow \hat{V}_n = \operatorname{Sup}(T_1, \dots, T_n)$.

$P(V_n \leq x) = (F(x-\theta))^n$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ notons F_{U_n} et F_{V_n} les fonctions de répartition de U_n et V_n.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{U_n}(x) = 1 - (1 - F(x-\theta))^n$ et $F_{V_n}(x) = (F(x-\theta))^n$.

b) Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $\omega \in \{-1+\theta \leq U_n < -1+\theta+2\varepsilon\} \cap \{1+\theta-2\varepsilon < V_n \leq 1+\theta\}$.

Alors $\begin{cases} -1+\theta \leq U_n(\omega) < -1+\theta+2\varepsilon \\ 1+\theta-2\varepsilon < V_n(\omega) \leq 1+\theta \end{cases}$

Ainsi $-1+\theta+1+\theta-2\varepsilon < U_n(\omega)+V_n(\omega) < -1+\theta+2\varepsilon+1+\theta$

Donc $\theta-\varepsilon < \left(\frac{U_n+V_n}{2}\right)(\omega) < \theta+\varepsilon$

ce qui donne : $\left|\frac{U_n+V_n}{2}(\omega)-\theta\right| < \varepsilon$ donc $\omega \in \left\{\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right| < \varepsilon\right\}$.

donc l'événement $\{-1+\theta \leq U_n < -1+\theta+2\varepsilon\} \cap \{1+\theta-2\varepsilon < V_n \leq 1+\theta\}$ est contenu dans l'événement $\left\{\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right| < \varepsilon\right\}$. Par croissance de P on a :

$$\underbrace{P(\{-1+\theta \leq U_n < -1+\theta+2\varepsilon\} \cap \{1+\theta-2\varepsilon < V_n \leq 1+\theta\})}_{d_n(\varepsilon)} \leq P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right) \leq 1 \quad (1)$$

le but est de prouver que $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right| < \varepsilon\right) = 1$. Pour cela il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} d_n(\varepsilon) = 1$.

$d_n(\varepsilon) = 1 - P\left(\overline{\{-1+\theta \leq U_n < -1+\theta+2\varepsilon\}} \cup \overline{\{1+\theta-2\varepsilon < V_n \leq 1+\theta\}}\right)$.

Rappelons que $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2$, $P(A\cup B) \leq P(A)+P(B)$.

Alors $d_n(\varepsilon) \geq 1 - P(\overline{-1+\theta \leq U_n < -1+\theta+2\varepsilon}) - P(\overline{1+\theta-2\varepsilon < V_n \leq 1+\theta})$.

$d_n(\varepsilon) \geq 1 - [1-P(-1+\theta \leq U_n < -1+\theta+2\varepsilon)] - [1-P(1+\theta-2\varepsilon < V_n \leq 1+\theta)]$.

$d_n(\varepsilon) \geq -1 + P(-1+\theta \leq U_n < -1+\theta+2\varepsilon) + P(1+\theta-2\varepsilon < V_n \leq 1+\theta)$.

$d_n(\varepsilon) \geq -1 + F_{U_n}(-1+\theta+2\varepsilon) - F_{U_n}(-1+\theta) + F_{V_n}(1+\theta) - F_{V_n}(1+\theta-2\varepsilon)$.

$$d_n(\varepsilon) \geq -1 + \left[1-(1-F(-1+\theta+(2\varepsilon-\theta)))^n\right] - \left[1-(1-F(-1+\theta-\theta))^n\right]$$
$$+ (F(1+\theta-\theta))^n - (F(1+\theta-2\varepsilon-\theta))^n.$$

$$d_n(\varepsilon) \geq -1+1-(1-F(-1+2\varepsilon))^n - 1 + (1-\underbrace{F(-1)}_{=0})^n + (\underbrace{F(1)}_{=1})^n - (F(1-2\varepsilon))^n$$

$$d_n(\varepsilon) \geq -1+1-(1-F(-1+2\varepsilon))^n - 1 + 1 + 1 - (F(1-2\varepsilon))^n.$$

$$d_n(\varepsilon) \geq 1-(1-F(-1+2\varepsilon))^n - (F(1-2\varepsilon))^n.$$

Ainsi : $\underline{1-(1-F(-1+2\varepsilon))^n-(F(1-2\varepsilon))^n \leq d_n(\varepsilon) \leq 1.}$ (2)

<u>1° $\varepsilon \in]0,1[$</u> . $-1+2\varepsilon \in]-1,1[$ et $1-2\varepsilon \in]-1,1[$.

Soit $x \in]-1,1[$.

<u>1er cas</u> : $x \in]-1,0]$. $F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \in]0,\frac{1}{2}]$ et $1-F(x) \in [\frac{1}{2},1[$

Alors $|F(x)|<1$ et $|1-F(x)|<1$

<u>2ème cas</u> : $x \in [0,1[$. $F(x) = 1-\frac{1}{2}(x-1)^2$.

$\frac{1}{2}(x-1)^2 \in [\frac{1}{2},1[$, $F(x) \in]0,\frac{1}{2}]$; $1-F(x) \in [\frac{1}{2},1[$

Ici aussi $|F(x)|<1$ et $|1-F(x)|<1$.

donc $\underline{\forall x \in]-1,1[,\ |F(x)|<1 \text{ et } |1-F(x)|<1.}$

Alors $|1-F(-1+2\varepsilon)|<1$ et $|F(1-2\varepsilon)|<1$. car $-1+2\varepsilon \in]-1,1[$ et $1-2\varepsilon \in]-1,1[$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-F(-1+2\varepsilon))^n = \lim\limits_{n\to+\infty} (F(1-2\varepsilon))^n = 0$.

L'encadrement (2) donne alors $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n(\varepsilon) = 1$

L'encadrement (1) donne : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right) = 1$ et ceci pour

tout ε dans $]0,1[$.

2° $\varepsilon \in [1,+\infty[$. $-1+2\varepsilon \in [1,+\infty[$; $F(-1+2\varepsilon)=1$;

$1-F(-1+2\varepsilon)=0$.

. $1-2\varepsilon \in]-\infty,-1]$; $F(1-2\varepsilon)=0$;

Alors $1-0^n-0^n \leq d_n(\varepsilon) \leq 1$; $d_n(\varepsilon)=1$.

(1) donne alors $P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$.

donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$

Finalement $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} P\left(\left|\frac{U_n+V_n}{2}-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$.

$\left(\frac{U_n+V_n}{2}\right)_{n\geq1}$ est un estimateur convergent de θ car cette suite converge en probabilité vers la variable certaine égale à θ.

d) Rappelons que nous avons posé : $\forall n\in\mathbb{N}, T_n = X_n-\theta$, $\widehat{U}_n = \mathrm{Inf}(T_1,T_2,\dots,T_n)$ et $\widehat{V}_n = \mathrm{Sup}(T_1,T_2,\dots,T_n)$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{U_n+V_n}{2} = \frac{\widehat{U}_n+\theta+\widehat{V}_n+\theta}{2} = \theta+\frac{1}{2}(\widehat{U}_n+\widehat{V}_n)$.

A retenir.

Lemme.. si $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ sont n réels : $\min(a_1,a_2,\dots,a_n) = -\max(-a_1,-a_2,\dots,-a_n)$.

Preuve.. Posons $\alpha = \max(-a_1,-a_2,\dots,-a_n)$.

$\exists\, k_0\in[\![1,n]\!]$, $\alpha=-a_{k_0}$.

de plus $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $-a_k\leq\alpha=-a_{k_0}$. Ainsi $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_k\geq a_{k_0}$.

Alors $\min(a_1,a_2,\dots,a_n) = a_{k_0} = -\alpha = -\max(-a_1,-a_2,\dots,-a_n)$ ▲

le lemme montre alors que $\widehat{U}_n = \mathrm{Inf}(T_1,T_2,\dots,T_n) = -\mathrm{Sup}(-T_1,-T_2,\dots,-T_n)$.

Montrons maintenant que : 1) $\sup(-T_1,-T_2,\dots,-T_n)$ a même loi que $\sup(T_1,T_2,\dots,T_n)$

2) $\hat{U}_n$ a une espérance.

• Soit $k\in[\![1,n]\!]$, T_k est une variable aléatoire de densité f où f est définie par $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{si } x\in[-1,1]\\ 0 & \text{si } x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$.

Rappelons que $f=F'$ et donc que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors $-T_k$ est une variable aléatoire à densité de densité $g: x\mapsto f(-x)$.

Or f est paire sur $\mathbb{R}$ donc $g=f$. Ainsi $-T_k$ a même loi que T_k.

Notons encore que $-T_1,-T_2,\dots,-T_n$ sont indépendantes car $T_1,T_2,\dots,T_n$ sont indépendantes et ajoutons que $-T_1,-T_2,\dots,-T_n$ ont même loi que T_1.

Alors <u>$\sup(-T_1,-T_2,\dots,-T_n)$ a même loi que $\hat{U}_n=\sup(T_1,T_2,\dots,T_n)$.</u>

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{\hat{U}_n}(x)=P(\hat{U}_n\le x)=P(U_n-\theta\le x)=P(U_n\le\theta+x)=F_{U_n}(\theta+x)=(F(\theta+x-\theta))^n=(F(x))^n$

↑ fonction de répartition de $\hat{U}_n$

Or F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc F^n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi $F_{\hat{U}_n}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors $\hat{U}_n$ est une variable aléatoire à densité de densité $(F_{\hat{U}_n})'$.

Posons $g_n=(F_{\hat{U}_n})'$. g_n est continue sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de $x\mapsto xg_n(x)$.

$\forall x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $xg_n(x)=x(F_{\hat{U}_n})'(x)=x(F^n)'(x)=x\times n\times F'(x)(F(x))^{n-1}$.

$\forall x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $xg_n(x)=nxf(x)(F(x))^{n-1}=0$ ← f est nulle sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

Alors $\int_{-\infty}^{-1} tg_n(t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} tg_n(t)\,dt$ convergent et valent 0.

Comme $x\mapsto xg_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\int_{-1}^{1} tg_n(t)\,dt$ existe.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} tg_n(t)\,dt$ converge. Alors $\hat{U}_n$ possède une espérance.

Dans ces conditions $\sup(-T_1,-T_2,\dots,-T_n)$ possède une espérance égale à $E(\hat{U}_n)$.

Rappelons que $\mathrm{Inf}(T_1, T_2, \dots, T_n) = -\mathrm{Sup}(-T_1, -T_2, \dots, -T_n)$.

Alors $\hat{V}_n = \mathrm{Inf}(T_1, T_2, \dots, T_n)$ possède une espérance qui vaut $-E(\hat{U}_n)$

Alors $E(\hat{U}_n + \hat{V}_n)$ existe et vaut $E(\hat{U}_n) + E(\hat{V}_n)$ donc 0.

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{U_n + V_n}{2} = \theta + \frac{1}{2}(\hat{U}_n + \hat{V}_n)$.

Ainsi $E\left(\dfrac{U_n + V_n}{2}\right)$ existe et vaut $\theta + \frac{1}{2} \times 0$ donc θ.

$\dfrac{U_n + V_n}{2}$ est un estimateur sans biais de θ ... et convergent.

2.

Question 8 HEC 2009-8

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$.

Q1. Étudier la monotonie et la limite éventuelle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n^2 = 2n + x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$.

Q3. En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra admettre que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Q1 Une récurrence simple montre que pour tout n dans $\mathbb{N}$, x_n existe et $x_n > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n - x_{n-1} = \dfrac{1}{x_{n-1}} > 0$. $(x_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

Supposons que $(x_n)_{n\geq 0}$ est majorée. Alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge. Notons ℓ sa limite.

$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geq x_0$ car $(x_n)_{n\geq 0}$ est croissante. En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient $\ell \geq x_0$.

Donc $\ell > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient

alors $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$; $\dfrac{1}{\ell} = 0$!!

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Étant croissante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x_n^2 = x_n^2 - x_0^2 + x_0^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - x_{k-1}^2) + x_0^2 = \sum_{k=1}^{n}\left[\left(x_{k-1} + \frac{1}{x_{k-1}}\right)^2 - x_{k-1}^2\right] + x_0^2$

$x_n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[x_{k-1}^2 + 2 + \frac{1}{x_{k-1}^2} - x_{k-1}^2\right] + x_0^2 = \sum_{k=1}^{n} 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{k-1}^2} + x_0^2 = 2n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{k-1}^2} + x_0^2$

Donc $x_n^2 = 2n + x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Q3 Version 1.. On utilise $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n^2 - 2n = x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \geq 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n^2 \geq 2n$.

Soit $n \in [\![1, +\infty[\![$. $\dfrac{x_n^2}{2n} \geq 1$.

De plus $\dfrac{x_n^2}{2n} = 1 + \dfrac{x_0^2}{2n} + \dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} = 1 + \frac{x_0^2}{2n} + \frac{1}{2n}\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x_k^2}$.

Or $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{1}{x_k^2} \leq \dfrac{1}{2k}$.

Donc $1 \leq \dfrac{x_n^2}{2n} = 1 + \dfrac{x_0^2}{2n} + \dfrac{1}{2n}\dfrac{1}{x_0^2} + \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{x_k^2} \leq 1 + \dfrac{x_0^2}{2n} + \dfrac{1}{2n}\dfrac{1}{x_0^2} + \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{2k}$

$0 \leq \dfrac{x_n^2}{2n} - 1 \leq \dfrac{x_0^2}{2n} + \dfrac{1}{2n}\dfrac{1}{x_0^2} + \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{2k} \leq \dfrac{x_0^2}{2n} + \dfrac{1}{2n}\dfrac{1}{x_0^2} + \dfrac{1}{4n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

$\dfrac{1}{4n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4}\dfrac{\ln n}{n}$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\dfrac{\ln n}{n}\right) = 0$.

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_0^2}{2n} + \dfrac{1}{2n}\dfrac{1}{x_0^2} + \dfrac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right) = 0$

Alors par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{x_n^2}{2n} = 1$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x_n^2}{2n}} = 1$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{|x_n|}{\sqrt{2n}} = 1$. $\displaystyle\lim\dfrac{x_n}{\sqrt{2n}} = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0)$. Ainsi $x_n \sim \sqrt{2n}$

<u>Version 2.</u> On n'utilise pas $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \sim \ln n$.

$\displaystyle\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty$. Alors $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![p, +\infty[\![$, $x_k \geq 1$.

$\forall k \in [\![p, +\infty[\![$, $x_k^2 \geq x_k \geq 1$. $\forall k \in [\![p, +\infty[\![$, $\dfrac{1}{x_k^2} \leq \dfrac{1}{x_k} = x_{k+1} - x_k$.

Soit $n \in [\![p+1, +\infty[\![$.

$x_n^2 = 2n + x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{x_k^2} = 2n + x_0^2 + \sum_{k=0}^{p-1}\dfrac{1}{x_k^2} + \sum_{k=p}^{n-1}\dfrac{1}{x_k^2} \leq 2n + x_0^2 + \sum_{k=0}^{p-1}\dfrac{1}{x_k^2} + \sum_{k=p}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)$.

$x_n^2 \leq 2n + x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\dfrac{1}{x_k^2} + x_n - x_p$. Posons $\alpha_p = x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\dfrac{1}{x_k^2} - x_p$.

$x_n^2 \leq 2n + x_n + \alpha_p$. De plus $x_n^2 = 2n + x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{x_k^2} \geq 2n$.

Alors $2n \leq x_n^2 \leq 2n + x_n + \alpha_p$ et $x_n^2 > 0$

Ainsi $\dfrac{2n}{x_n^2} \leq 1 \leq \dfrac{2n}{x_n^2} + \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{\alpha_p}{x_n^2}$; $1 - \dfrac{1}{x_n} - \dfrac{\alpha_p}{x_n^2} \leq \dfrac{2n}{x_n^2} \leq 1$.

$\forall n \in [\![p+1, +\infty[\![, \; 1 - \frac{1}{x_n} - \frac{\alpha_p}{x_n^2} \leq \frac{\ell_n}{x_n^2} \leq 1.$

Or $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} x_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(1 - \frac{1}{x_n} - \frac{\alpha_p}{x_n^2}\right) = 1.$

Par encadrement on obtient $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{\ell_n}{x_n^2} = 1.$

Alors $1 = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \sqrt{\frac{\ell_n}{x_n}} = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{\sqrt{\ell_n}}{|x_n|} = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{\sqrt{\ell_n}}{x_n}.$

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0.$

On retrouve ainsi : $x_n \underset{n \mapsto +\infty}{\sim} \sqrt{\ell_n}$.

HEC 2009 S2

Sujet S 2 - Exercice

1) Question de cours : Existence des moments d'une variable aléatoire discrète.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 2(1-x)^2 \ln(1-x)}{12x^2}$$

   a) Étudier les variations de f.

   b) Montrer que, lorsque x tend vers 0^+, $f(x) \sim \dfrac{x}{18}$.

   Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, strictement positives, indépendantes et de même loi.

   On pose : $U = X_1 + X_2$, $T = X_1 - X_2$, $Y_1 = \dfrac{X_1}{U}$, $Y_2 = \dfrac{X_2}{U}$.

3) a) Montrer que Y_1 et Y_2 suivent la même loi et admettent des moments de tous ordres. Calculer $\mathbb{E}(Y_1)$ et $\mathbb{E}(Y_2)$.

   b) En déduire que $\dfrac{T}{U}$ admet des moments de tous ordres. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{T}{U}\right)$.

   c) Montrer que $\mathbf{Cov}(Y_1, Y_2) = -\mathbb{V}(Y_1)$. En déduire une formule reliant $\mathbb{V}\left(\dfrac{T}{U}\right)$ et $\mathbb{V}(Y_1)$.

4) On suppose que X_1 et X_2 suivent la loi géométrique de paramètre p ($p \in]0,1[$). On pose $q = 1 - p$. On admet le résultat suivant : $\mathbb{V}(Y_1) = f(q)$.

   À l'aide des résultats précédents, établir l'encadrement suivant :

$$0 < \mathbb{V}\left(\frac{T}{U}\right) < \frac{1}{3}$$

Sujet S 2 - Exercice sans préparation

1- Montrer que pour $z > 0$, l'intégrale

$$J(z) = \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

est convergente.

2- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J(z)$ est équivalent en $+\infty$ à $\dfrac{e^{-z}}{z}$.

Sujet S 3 - Exercice

Q1 * Soit X une variable aléatoire discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $r \in \mathbb{N}$.

$X(\Omega)$ a pour cardinal n et $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

X possède un moment d'ordre r qui vaut $\sum_{k=1}^{n} x_k^r P(X = x_k)$.

* Soit X une variable aléatoire infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $r \in \mathbb{N}$.

$X(\Omega) = \{x_k \,;\, k \in [\![n_0, +\infty[\![\}$ et $k \mapsto x_k$ est une bijection de $[\![n_0, +\infty[\![$ sur $X(\Omega)$.

X possède un moment d'ordre r si la série de terme général $x_k^r P(X = x_k)$ est absolument convergente ... ou convergente !

En cas d'existence le moment d'ordre r de X est $\sum_{k=n_0}^{+\infty} x_k^r P(X = x_k)$.

Q2 f est dérivable sur $]0,1[$. Soit $x \in]0,1[$.

$$f'(x) = \frac{1}{12}\frac{1}{x^4}\left[x^2\left(6x - 2 + 4(1-x)\ln(1-x) - 2(1-x)^2\frac{-1}{1-x}\right) - 2x\left(3x^2 - 2x - 2(1-x)^2\ln(1-x)\right)\right].$$

$$f'(x) = \frac{1}{12}\frac{1}{x^4}\left[6x^3 - 2x^2 + 4x^2(1-x)\ln(1-x) + 2x^2(1-x) - 6x^3 + 4x^2 + 4x(1-x)^2\ln(1-x)\right].$$

$$f'(x) = \frac{1}{12}\frac{1}{x^3}\left[-2x^2 + 4x + 4(1-x)\ln(1-x)\right] = \frac{1}{6}\frac{1}{x^3}\left[-x^2 + 2x + 2(1-x)\ln(1-x)\right].$$

Posons $\forall x \in]0,1[$, $u(x) = -x^2 + 2x + 2(1-x)\ln(1-x)$. f' est du signe de u.

u est dérivable sur $]0,1[$. $\forall x \in]0,1[$, $u'(x) = -2x + 2 - 2\ln(1-x) + 2(1-x)\frac{-1}{1-x}$.

$\forall x \in]0,1[$, $u'(x) = -2x - 2\ln(1-x) = -2(x + \ln(1-x))$.

Or $\forall x \in]0,1[$, $\ln(1-x) \leq -x$ (inégalité classique). Alors $\forall x \in]0,1[$, $u'(x) \geq 0$.

u est croissante sur $]0,1[$ et $\lim_{x \to 0} u(x) = 0$. Alors $\forall x \in]0,1[$, $u(x) \geq 0$.

Alors f' est positive sur $]0,1[$. $\underline{\underline{f \text{ est croissante sur }]0,1[.}}$

<u>Remarque</u>.. En fait $\forall x \in]0,1[$, $\ln(1-x) < -x$. Ainsi u' est strictement positive sur $]0,1[$. u est strictement croissante sur $]0,1[$ et

$\lim_{x \to 0} u(x) = 0$. Alors $\forall x \in]0,1[$, $u(x) > 0$. Donc $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) > 0$.

$\underline{\underline{f \text{ est strictement croissante sur }]0,1[.}}$

b) $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$2(1-x)^2 \underset{x\to 0}{=} 2 - 4x + 2x^2 + o(x^3)$.

Par produit et troncature : $2(1-x)^2 \ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 2x^3 - 2x^3 + o(x^3)$

$2(1-x)^2 \ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -2x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

Alors $3x^2 - 2x - 2(1-x)^2\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

Donc $3x^2 - 2x - 2(1-x)^2\ln(1-x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x^3$.

$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\frac{2}{3}x^3}{12x^2} = \frac{x}{18}$. $\quad$ $\underline{f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{18}}$.

Q3 a) • $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{x_i ; i \in I\}$. I est fini ou dénombrable, $i \to x_i$ est une bijection de I sur $X_1(\Omega) = X_2(\Omega)$ et $\forall i \in I$, $x_i \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $z \in Y_1(\Omega) = Y_2(\Omega)$. $(\{X_1 = x_i\})_{i\in I}$ est un système complet d'événements donc :

$P(Y_1 = z) = \sum_{i\in I} P\left(\left\{\frac{X_1}{X_1+X_2} = z\right\} \cap \{X_1 = x_i\}\right) = \sum_{i\in I} P\left(\left\{\frac{x_i}{x_i+X_2} = z\right\} \cap \{X_1 = x_i\}\right)$

$P(Y_1 = z) = \sum_{i\in I} P\left(\left\{X_2 = \frac{1-z}{z}x_i\right\} \cap \{X_1 = x_i\}\right) = \sum_{i\in I} P\left(X_2 = \frac{1-z}{z}x_i\right) P(X_1 = x_i)$

X_1 et X_2 sont indépendantes.

De même $P(Y_2 = z) = \sum_{i\in I} P\left(X_1 = \frac{1-z}{z}x_i\right) P(X_2 = x_i)$.

Or X_1 et X_2 ont même loi donc $\forall i \in I$, $P\left(X_2 = \frac{1-z}{z}x_i\right)P(X_1 = x_i) = P\left(X_1 = \frac{1-z}{z}x_i\right)P(X_2 = x_i)$.

Donc $P(Y_1 = z) = P(Y_2 = z)$ et ceci pour tout z dans $Y_1(\Omega) = Y_2(\Omega)$.

<u>Y_1 et Y_2 ont même loi.</u>

- D'après le cours Y_1 et Y_2 sont des variables aléatoires discrètes.

  Si $Y_1(\Omega) = Y_2(\Omega)$ est fini alors Y_1 et Y_2 possèdent des moments de tout ordre.

Supposons $Y_1(\Omega)=Y_2(\Omega)$ dénombrable. $Y_1(\Omega)=Y_2(\Omega)=\{z_k\ ;\ k\in[\![n_0,+\infty[\![\}$ où $k\mapsto z_k$ est une bijection de $[\![n_0,+\infty[\![$ sur $Y_1(\Omega)=Y_2(\Omega)$. Soit $r\in\mathbb{N}$.

Soit $k\in[\![n_0,+\infty[\![$. $\exists(i,i')\in I_\ell^2$ $z_k=\dfrac{x_i}{x_i+x_{i'}}$. Alors $0<z_k<1$ car $x_i>0$ et $x_{i'}>0$.

Alors $\forall k\in[\![n_0,+\infty[\![$, $0\leq z_k^r\,P(Y_1=z_k)\leq P(Y_1=z_k)$ et la série de terme général $P(Y_1=z_k)$ converge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $z_k^r\,P(Y_1=z_k)$ converge. Elle converge absolument car elle est à termes positifs. Donc Y_1 possède un moment d'ordre r et ceci pour tout r dans $\mathbb{N}$. Y_2 également...

Y_1 et Y_2 possèdent des moments de tous ordres.

Y_1 et Y_2 ont même loi et possède une espérance donc $E(Y_1)=E(Y_2)$.

De plus $Y_1+Y_2=\dfrac{X_1}{X_1+X_2}+\dfrac{X_2}{X_1+X_2}=1$. Alors $1=E(Y_1+Y_2)=E(Y_1)+E(Y_2)=2E(Y_1)$.

Donc $E(Y_1)=E(Y_2)=\dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{I}{U}=\dfrac{X_1-X_2}{X_1+X_2}=Y_1-Y_2$. Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires discrètes qui prennent leurs valeurs dans $]0,1[$ donc $\dfrac{I}{U}$ est une variable aléatoire discrète qui prend ses valeurs dans $]-1,1[$.

Si $\dfrac{I}{U}(\Omega)$ est fini, $\dfrac{I}{U}$ possède des moments de tous ordres.

Supposons $\dfrac{I}{U}(\Omega)$ dénombrable. Posons $L=\dfrac{I}{U}$ et $L(\Omega)=\{\ell_k\ ;\ k\in[\![n_0,+\infty[\![\}$

Soit $r\in\mathbb{N}$.

$\forall k\in[\![n_0,+\infty[\![$, $0\leq|\ell_k^r\,P(L=\ell_k)|=|\ell_k|^r\,P(L=\ell_k)\underset{L(\Omega)\subset]-1,1[}{\leq}P(L=\ell_k)$.

La convergence de la série de terme général $P(L=\ell_k)$ et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent la convergence de la série de terme général $|\ell_k^r P(L=\ell_k)|$.

La série de terme général $\ell_k^r P(L=\ell_k)$ est absolument convergente donc

L possède un moment d'ordre r et ceci pour tout r dans $\mathbb{N}$.

$\frac{T}{U}$ possède des moments de tous ordres.

$E\left(\frac{T}{U}\right) = E(Y_1-Y_2) = E(Y_1)-E(Y_2) = 0$. $\underline{\underline{E\left(\frac{T}{U}\right)=0}}$.

<u>c)</u> Y_1 et Y_2 possèdent un moment d'ordre 2 donc $\mathrm{cov}(Y_1,Y_2)$ existe.

$Y_1+Y_2=1$.

Donc $0 = V(1) = V(Y_1)+V(Y_2)+2\mathrm{cov}(Y_1,Y_2) \overset{Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ ont même loi}}{=} 2V(Y_1)+2\mathrm{cov}(Y_1,Y_2)$.

Alors $2\mathrm{cov}(Y_1,Y_2)+2V(Y_1)=0$; $\underline{\underline{\mathrm{cov}(Y_1,Y_2)=-V(Y_1)}}$.

$V\left(\frac{T}{U}\right) = V(Y_1-Y_2) = V(Y_1)+V(-Y_2)+2\mathrm{cov}(Y_1,-Y_2) = V(Y_1)+V(Y_2)-2\mathrm{cov}(Y_1,Y_2)$.

$V\left(\frac{T}{U}\right) = 2V(Y_1)-2(-V(Y_1))$. $\underline{\underline{V\left(\frac{T}{U}\right)=4V(Y_1)}}$.

Q4 Nous avons vu que <u>f est continue et strictement croissante sur $]0,1[$</u>.

De plus $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{18}$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{18} = 0$; $\underline{\lim_{x\to 0} f(x)=0}$.

$\lim_{x\to 1}\left((1-x)^2\ln(1-x)\right)=0$ par croissance comparée donc $\underline{\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3-2-2\times 0}{12} = \frac{1}{12}}$.

Les trois points précédents montrent que $\forall x\in]0,1[,\ 0 < f(x) < \frac{1}{12}$.

$p\in]0,1[$ donc $q=1-p\in]0,1[$. Alors $0 < V(Y_1) < \frac{1}{12}$ car $V(Y_1)=f(q)$.

Donc $\underline{\underline{0 < V\left(\frac{T}{U}\right) < \frac{1}{3}}}$ car $V\left(\frac{T}{U}\right)=4V(Y_1)$.

Question 2 **HEC 2009-2**

Q1. Montrer que pour $z > 0$, l'intégrale $J(z) = \displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est convergente.

Q2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J(z)$ est équivalent en $+\infty$ $\dfrac{e^{-z}}{z}$.

Q1 $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge car $\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge. Alors pour tout élément z de $]0,+\infty[$, $\displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge.

Q2 Soit $z \in]0,+\infty[$. Soit $A \in]z,+\infty[$. Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $u(t)=\dfrac{1}{t}$ et $v(t) = -e^{-t}$.

u et v sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et, $\forall t \in]0,+\infty[$, $u'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ et $v'(t) = e^{-t}$. Ceci justifie l'intégration par parties qui suit.

$$\int_z^A \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \left[\frac{1}{t}(-e^{-t})\right]_z^A - \int_z^A \left(-\frac{1}{t^2}\right)(-e^{-t})\,dt = -\frac{1}{A}e^{-A} + \frac{1}{z}e^{-z} - \int_z^A \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.$$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{e^{-A}}{A} = 0$ et $\displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge. Alors 1) $\displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$ converge

2) $\displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \frac{1}{z}e^{-z} - \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.$

$\dfrac{z}{e^{-z}} J(z) = 1 - \dfrac{z}{e^{-z}} \displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.$ Montrons que $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} \left(\frac{z}{e^{-z}} \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt\right) = 0.$

$\forall B \in]z,+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{z}{e^{-z}} \displaystyle\int_z^B \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leqslant \frac{z}{e^{-z}}\,\frac{1}{z^2} \int_z^B e^{-t}\,dt = \frac{1}{z}e^{z}\left[-e^{-t}\right]_z^B = \frac{1}{z}e^{z}(e^{-z}-e^{-B}) \leqslant \frac{1}{z}e^{z}e^{-z} = \frac{1}{z}.$

En faisant tendre B vers $+\infty$ il vient $0 \leqslant \dfrac{z}{e^{-z}} \displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{z}$ et ceci pour tout z dans $]0,+\infty[$.

Comme $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} \frac{1}{z} = 0$ il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} \left(\frac{z}{e^{-z}} \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt\right) = 0.$

Alors $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} \frac{z}{e^{-z}} J(z) = 1$. Donc $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} \frac{J(z)}{\frac{e^{-z}}{z}} = 1$. $\quad J(z) \underset{z\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-z}}{z}.$